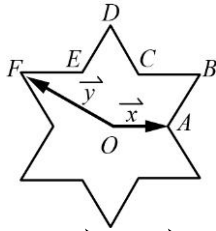


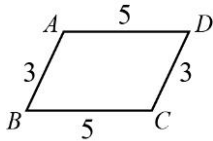
高中數學科 3A 第三次段考 考古卷(A)

一、單選題：每題 2 分、共 30 分

- () 1. 設正三角形 ABC 之周長為 6，則 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$
 (A) 2 (B) -2 (C) -4 (D) 4 (E) $2\sqrt{3}$
- () 2. 坐標平面上， $\overrightarrow{a} = (2, t)$ ， $\overrightarrow{b} = (t, 3)$ ，則滿足 \overrightarrow{a} 與 \overrightarrow{b} 之夾角為 45° 的實數 t 共有幾個？
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4
- () 3. 正六邊形 $ABCDEF$ 中，若 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 1$ ，則 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} =$
 (A) $-\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$ (E) $-\frac{1}{3}$
- () 4. 將一圓的六個等分點分成兩組相間的三點，它們所構成的兩個正三角形扣除內部六條線段後可以形成一正六角星，如圖所示的正六角星是以原點 O 為中心，其中 $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA}$ ， $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{OF}$ 。下列選項中的內積值何者最大？

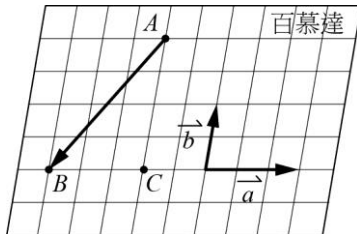


- (A) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA}$ (B) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ (C) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ (D) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$ (E) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OF}$
- () 5. 在平行四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 5$ ，則 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ 之值為



- (A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) 18
- () 6. 設梯形 $OABC$ 中， $\overline{BC} \parallel \overline{AO}$ ， $3\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA}$ ，若 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{x}$ ， $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{y}$ ，則 $\overrightarrow{AB} =$
 (A) $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ (B) $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}$ (C) $\overrightarrow{x} - 2\overrightarrow{y}$ (D) $\overrightarrow{y} - \frac{1}{3}\overrightarrow{x}$ (E) $\overrightarrow{y} - \frac{2}{3}\overrightarrow{x}$

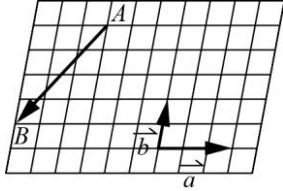
- () 7. 如附圖，傳說中船駛達百慕達三角洲時，須遵循下列兩個怪異磁場 \overrightarrow{a} ， \overrightarrow{b} 的方向；否則會神奇失蹤。今一艘救援艇已開到此海域 A 處，準備前往 B 處尋找一艘載滿黃金的船。若欲完成任務，它應遵循圖示 \overrightarrow{a} ， \overrightarrow{b} 的方向，走了 $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$ ， x, y 是實數，則下列何者正確？



- (A) $x=1, y=2$ (B) $x=1, y=-2$ (C) $x=-1, y=2$ (D) $x=-1, y=-2$ (E) $x=-2, y=-1$
- () 8. 行列式 $\begin{vmatrix} 2996 & 2997 \\ 2998 & 2999 \end{vmatrix}$ 之值為
 (A) 4 (B) 2 (C) 0 (D) -2 (E) -4
- () 9. 若 A, B, C 三點共線，且 $8\overrightarrow{OB} = (2t-3)\overrightarrow{OA} + (3t-4)\overrightarrow{OC}$ ，則實數 $t = ?$ (O 點為不在 \overline{AB} 上的任一點)

- (A)3 (B) $\frac{5}{8}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{1}{8}$ (E) $\frac{1}{2}$

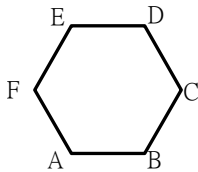
- ()10. 有一長度為 4 之向量 \vec{a} 與單位向量 \vec{e} 之夾角為 120° ，則 \vec{a} 在 \vec{e} 上之正射影為
 (A) $2\vec{e}$ (B) $-2\vec{e}$ (C) $3\vec{e}$ (D) $-3\vec{e}$ (E) $-4\vec{e}$
- ()11. $\vec{a}=(x,2)$ ， $\vec{b}=(3,y)$ ， x,y 為實數，且 $x^2+y^2=13$ ，若 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的最大值 M ，
 最小值 m ，則數對 $(M,m)=$
 (A) $(5,-1)$ (B) $(3,-3)$ (C) $(6,-2)$ (D) $(5,-5)$ (E) $(13,-13)$
- ()12. 如附圖所示，試將 \vec{AB} 寫成 $x\vec{a}+y\vec{b}$ ， x,y 是實數，則



- (A) $x=2, y=-1$ (B) $x=-2, y=1$ (C) $x=-2, y=0$ (D) $x=-1, y=1$ (E) $x=-1, y=-2$
- ()13. 在一平面上有 $\triangle ABC$ ，滿足 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \vec{PB} \cdot \vec{PC} = \vec{PC} \cdot \vec{PA}$ ，則 P 點是 $\triangle ABC$ 的
 (A)內心 (B)外心 (C)垂心 (D)重心 (E)以上皆非
- ()14. 設 $\vec{a}=(1,2)$ ， $\vec{b}=(x,1-x)$ ，若 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})=0$ ，則 $x=$
 (A)5 (B)6 (C)7 (D)8 (E)9
- ()15. 設 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, \vec{a} \perp \vec{b}$ ， $3\vec{x} + \vec{y} = 5\vec{a}$ ， $2\vec{x} - \vec{y} = 5\vec{b}$ ，則 \vec{x} 與 \vec{y} 之
 夾角為
 (A) 45° (B) 60° (C) 90° (D) 120° (E) 135°

二、多重選擇題：每題 2 分、共 30 分

- ()1. $ABCDE$ 為正五邊形，那麼下列向量內積中何者最小？
 (A) $\vec{AB} \cdot \vec{AB}$ (B) $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ (C) $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$ (D) $\vec{AB} \cdot \vec{DE}$ (E) $\vec{AB} \cdot \vec{EA}$
- ()2. 有關向量的性質，下列敘述哪些正確？
 (A) $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$ (B) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 \geq |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ (C) $|\vec{a}| - |\vec{b}| \leq |\vec{a} - \vec{b}|$
 (D)若 $|\vec{a} - 2\vec{b}| = |\vec{a} + 2\vec{b}|$ ，則 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (E)若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ，則 $\vec{b} = \vec{c}$
- ()3. 如附圖 $ABCDEF$ 為一正六邊形，下列何者正確？



- (A) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{BC} \cdot \vec{CD}$ (B) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{AB} \cdot \vec{AF}$ (C) $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{AB} \cdot \vec{AB}$ (D) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} > \vec{AB} \cdot \vec{AD}$ (E) $\vec{AB} \cdot \vec{AE} = 0$
- ()4. 設 A, B, C, D 為坐標平面上相異四點，滿足 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 2$ ，則下列敘述哪些正確？
 (A) $\vec{AC} = \vec{AD}$ (B) $\vec{AC} \parallel \vec{AD}$ (C) $\vec{AC} \perp \vec{AD}$ (D) $\vec{CD} \perp \vec{AB}$ (E) \vec{AB} 可以唯一表示成 $x\vec{AC} + y\vec{AD}$ 的形式，其中 x,y 為實數
- ()5. 已知 \vec{a} 與 \vec{b} 都不是零向量，下列敘述何者正確？
 (A)設 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ ，則 \vec{a}, \vec{b} 的夾角為 120° (B)設 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，則 \vec{a}, \vec{b} 的夾角為 90° (C) $|\vec{a}| |\vec{b}| \geq |\vec{a} \cdot \vec{b}|$ (D) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$ (E) $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} - \vec{b}|$

() 6. 設行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -35$ ，則下列敘述何者為真？

(A) $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = 35$ (B) $\begin{vmatrix} \frac{1}{5}a & \frac{1}{5}b \\ \frac{1}{5}c & \frac{1}{5}d \end{vmatrix} = -7$ (C) $\begin{vmatrix} \frac{1}{5}a & b \\ c & \frac{1}{5}d \end{vmatrix} = -7$ (D) $\begin{vmatrix} a & b + \frac{1}{5}a \\ c & d + \frac{1}{5}c \end{vmatrix} = -7$

(E) $\begin{vmatrix} a & a + \frac{1}{5}b \\ c & c + \frac{1}{5}d \end{vmatrix} = -7$

() 7. 設 A, B, P 為平面上相異三點，若 O 點不在直線 AB 上，試問下列各題中， A, B, P 三點是否共線？

(A) $\vec{AB} = 3\vec{AP}$ (B) $\vec{OP} = \frac{4}{5}\vec{OA} + \frac{1}{5}\vec{OB}$ (C) $\vec{OP} = -\frac{1}{5}\vec{OA} + \frac{6}{5}\vec{OB}$ (D) $2\vec{OP} = 3\vec{OA} - \vec{OB}$ (E) $\vec{OB} = \vec{OA} + \frac{17}{5}\vec{BP}$

() 8. 下列哪些選項正確？

(A) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b+ka & a \\ d+kc & c \end{vmatrix}$ (C) $\begin{vmatrix} 201 & 199 \\ 191 & 209 \end{vmatrix} < \begin{vmatrix} 2997 & 2999 \\ 1997 & 1999 \end{vmatrix}$ (D) $\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e+ka & f+kb \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c-e & d-f \end{vmatrix}$ (E) 若 a, b 均為實數，則 $\begin{vmatrix} 2783+a & 3894+b \\ 5566+2a & 7788+2b \end{vmatrix} = 0$

() 9. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $(\vec{OC} - \vec{OB}) \cdot (\vec{OB} + \vec{OC} - 2\vec{OA}) = 0$ ，則

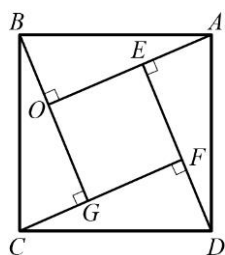
(A) $\triangle ABC$ 為正三角形 (B) $\triangle ABC$ 為等腰三角形 (C) $\triangle ABC$ 為直角三角形 (D) $\vec{AB} = \vec{AC}$ (E) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$

() 10. 下列哪些選項與行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 值一樣？

(A) $O(0,0), P(a,c), Q(b,d)$ 所成 $\triangle OPR$ 面積的兩倍 (B) $\begin{vmatrix} a+1 & b+2 \\ c+1 & d+2 \end{vmatrix}$

(C) $\begin{vmatrix} \frac{d}{110} & 2021b \\ \frac{c}{2021} & 110a \end{vmatrix}$ (D) $\begin{vmatrix} a-\sqrt{2}b & (1+\sqrt{2})b-a \\ c-\sqrt{2}d & (1+\sqrt{2})d-c \end{vmatrix}$ (E) $3 \times \begin{vmatrix} \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b & \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a \\ \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d & \frac{2}{3}d + \frac{1}{3}c \end{vmatrix}$

() 11. 如附圖，大正方形 $ABCD$ 由四個全等的直角三角形與一個小正方形 $OEFG$ 所拼成，其中 $\vec{OA} = 12$ ， $\vec{OB} = 5$ ，試問下列哪些選項是正確的？



(A) $\vec{GB} \cdot \vec{OA} = \vec{0}$ (B) $\vec{OA} \cdot \vec{OF} < \vec{OD} \cdot \vec{OA}$ (C) $\vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{OG}$ (D) 若 $\vec{v} = 5\vec{OA} + 12\vec{OB}$, 則 $\frac{\vec{OA} \cdot \vec{v}}{|\vec{OA}| |\vec{v}|} = \frac{\vec{OB} \cdot \vec{v}}{|\vec{OB}| |\vec{v}|}$ (E) $\vec{BD} = \frac{7}{12}\vec{OA} - \frac{17}{5}\vec{OB}$

() 12. 有關二階行列式的運算性質，下列何者正確？

(A) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+4b & b \\ c+4d & d \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} a & 5b \\ c & 5d \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ (C) $4 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4a & 4b \\ 4c & 4d \end{vmatrix}$ (D) $\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ 2c+3d & 4c+5d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ 2a & 4c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ 3c & 5d \end{vmatrix}$ (E) $\begin{vmatrix} a+3b & 2a+6b \\ 3c+4d & 6c+8d \end{vmatrix} = 0$

() 13. 設 $A(-3, 4), B(8, -6), O(0, 0)$ 為平面上相異三點，令 C 在 \overline{AB} 上且 $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1$ ，且令 $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$ ，則下列何者正確？

(A) 向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 的長度為 15 (B) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -48$ (C) $\cos \angle AOB = -\frac{24}{25}$ (D) $\vec{OC} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ (E) C 坐標為 $(\frac{13}{3}, \frac{-8}{3})$

() 14. 設 O, A, B, C 為平面上相異四點，則下列各條件中，何者可確定 A, B, C 三點共線？

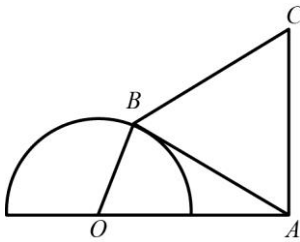
(A) $\vec{OB} = \frac{-5}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OC}$ (B) $\vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC} = \vec{0}$ (C) $\vec{OA} = 7\vec{BC}$ (D) $3\vec{BA} = 4\vec{BC}$ (E) $A(1, 2), B(3, 4), C(5, 6)$

() 15. 下列何者可確認 A, B, C 三點共線？

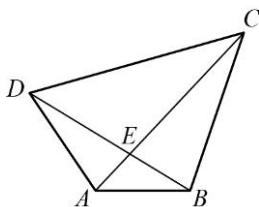
(A) $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{0}$ (B) $\vec{AB} = 3\vec{AC}$ (C) $\vec{OA} = \frac{2}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC}$ (D) $|\vec{AB}| + |\vec{AC}| = |\vec{BC}|$ (E) $3\vec{OA} + 2\vec{OB} = 4\vec{OC}$

三、填充題：每題 2 分、共 40 分

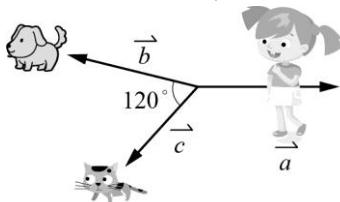
- 設 $\vec{a} = (x+2, -8), \vec{b} = (1-4x, 20)$ ，若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，則 x 之值 = _____。
- 如附圖(此為參考圖)，半圓 O 的半徑為 1， A 為直徑延長線上一點， $\overline{OA} = 2$ ， B 為半圓上任一點，以 \overline{AB} 為一邊做正三角形 ABC ，求四邊形 $OACB$ 面積的最大值 _____。



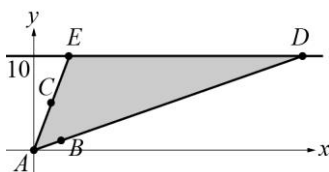
- 設 x 為實數， $\vec{a} = (6, x), \vec{b} = (2, 1)$ ，若 \vec{a} 在 \vec{b} 上之正射影為 $(-4, -2)$ ，則 $x =$ _____。
- 已知 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$ ，試化簡 $\begin{vmatrix} 3a+4c & 3b+4d \\ a-c & b-d \end{vmatrix} =$ _____。
- 設 $\triangle ABC$ 中， E 在 \overline{AC} 上且 $\overline{AE} : \overline{EC} = 2 : 3$ ； F 在 \overline{AB} 上且 $\overline{AF} : \overline{FB} = 3 : 4$ ， \overline{BE} 與 \overline{CF} 交於點 P ，若 $\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ ，則數對 $(x, y) =$ _____。
- 若 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 2, \overline{AC} = 3, \overline{BC} = 4$ 且 $\angle A$ 的角平分線 \overline{AD} 交 \overline{BC} 於 D 點，求 $|\vec{AD}| =$ _____。
- 如附圖，在四邊形 $ABCD$ 中， $\vec{AC} = 3\vec{AB} + 2\vec{AD}$ ， E 為 $\overline{AC}, \overline{BD}$ 之交點，則 $\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} =$ _____。



8. 單位圓之內接正六邊形 $ABCDEF$ ，求值： $\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
9. 已知坐標平面上的四點分別為 $A(a-1, 8)$ 、 $B(-1, a+7)$ 、 $C(3, 6)$ 、 $D(1, 7)$ ，若 \overrightarrow{AB} 在 \overrightarrow{CD} 上之正射影為 $(4, b)$ ，則實數序對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
10. 已知 $A(2, 4)$ 、 $B(5, 10)$ 且 P 是直線 \overline{AB} 上一點，滿足 $2\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$ ，求 P 點的坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
(兩解)
11. 已知 $\vec{a} = (4, 7)$ ， $\vec{b} = (2, 1)$ ，若 \vec{u} ， \vec{v} 為非零向量且 $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ ，其中 $\vec{u} // \vec{b}$ 且 $\vec{v} \perp \vec{b}$ ，則 $\vec{v} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
12. 某天阿花帶著自己心愛的「毛小孩」到公園散步，突然兩隻「毛小孩」狗與貓不受控制，如圖所示，試問：如果狗的拉力為 8 公斤重，貓的拉力為 3 公斤重，且兩力夾角為 120° ，則阿花要施 $\underline{\hspace{2cm}}$ 公斤重的力才可使三力平衡（合力為零）。



13. 設 $\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ，且 $|\vec{a}| = 2$ ， $|\vec{b}| = 1$ ， $|\vec{c}| = 2$ ，求 \vec{a} 與 \vec{b} 的夾角為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
14. 設 $A(0, 0)$ ， $B(1, 3)$ ， $C(-1, 2)$ ， $D(3, 4)$ 為坐標平面上的四點， $|\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{CD}|$ 的最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
15. 平面上 A, B, C 三點共線， O 為不在此線上之任一點，若 $3\overrightarrow{OC} = (2t+1)\overrightarrow{OA} + (3t+4)\overrightarrow{OB}$ ，求實數 $t = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
16. 如附圖， $A(0, 0)$ 、 $B(3, 1)$ 、 $C(2, 5)$ ，若 $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ ， $0 \leq s \leq a$ ， $0 \leq t \leq b$ 且 $\frac{s}{a} + \frac{t}{b} \leq c$ ，使得所有 P 點所成圖形為 $\triangle ADE$ (含內部)，其中 D, E 在直線 $y=10$ 上，則 $a+b-c = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



17. 設三向量 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} ，已知 $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$ ，若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$ ， $\vec{c} \cdot \vec{a} = -3$ ，則 $|\vec{a}| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
18. 已知 $\vec{a} = (2, -4)$ ， $\vec{b} = (-1, 1)$ ， t 為實數，若 $\vec{c} = \vec{a} + t\vec{b}$ ，則當 $t = \underline{\hspace{2cm}}$ 時， $|\vec{c}|$ 有最小值。
19. 四邊形 $ABCD$ ，兩對角線 \overline{AC} ， \overline{BD} 互相垂直且交於 E 點， $\overline{AE} = 4$ ， $\overline{BE} = 6$ ， $\overline{CE} = 8$ ， $\overline{DE} = 4$ ，求向量內積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ 的值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
20. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = \sqrt{13}$ ， $\overline{AC} = 4$ ， $\overline{AB} = 3$ ，則 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。