高中數學科 3A 第三次段考 考古卷(A)

一、單選題：每題 2 分、共 30 分

(　　)1. 設正三角形 ABC 之周長為 6，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$

(A)2　(B)－2　(C)－4　(D)4　(E)$2\sqrt{3}$

答案：(A)

解析：正△之周長 6 ⇒ 邊長 2，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60^\circ=2\times2\times\frac{1}{2}=2$，

故選(A)。

(　　)2. 坐標平面上，$\vec{a}=(2,t)$，$\vec{b}=(t,3)$，則滿足 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角為 45°的實數 t 共有幾個？

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3　(E)4

答案：(C)

解析：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 45^\circ$，$2t+3t=\sqrt{4+t^2}\cdot\sqrt{t^2+9}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$，

平方得 $2(25t^2)=t^4+13t^2+36$，但 $t\geq 0$ ，

$\Rightarrow (t^2-1)(t^2-36)=0 \Rightarrow t^2=1$ 或 36

$\therefore t=1$ 或 6 (2 個)，

故選(C)。

(　　)3. 正六邊形 $ABCDEF$ 中，若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=1$，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=$

(A)$-\frac{1}{6}$　(B)$\frac{1}{3}$　(C)$\frac{1}{2}$　(D)$-\frac{1}{2}$　(E)$-\frac{1}{3}$

答案：(A)

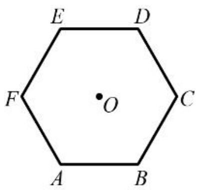
解析：設邊長 a，

$1=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(2\overrightarrow{AO})$

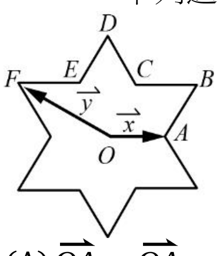
$=2a^2\cos 60^\circ+2a^2=3a^2$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=a^2\cos 120^\circ$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{2}=-\frac{1}{6}$，故選(A)。



(　　)4. 將一圓的六個等分點分成兩組相間的三點，它們所構成的兩個正三角形扣除內部六條線段後可以形成一正六角星，如圖所示的正六角星是以原點 O 為中心，其中 $\vec{x}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{y}=\overrightarrow{OF}$。下列選項中的內積值何者最大？



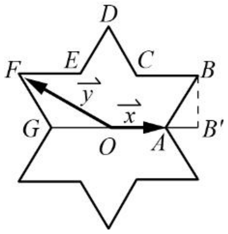
(A)$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}$　(B)$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　(C)$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$　(D)$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$　(E)$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OF}$

答案：(B)

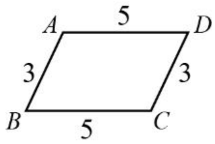
解析：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cdot\cos\angle BOA$

$=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB'}|$，

分別作 B, C, D, F 在 $\overrightarrow{OA}$ 的投影點，
考慮各向量在 $\overrightarrow{OA}$ 的投影量即可
$\therefore \overline{OB'} > \overline{OA} > \overline{OC'} > 0 > -\overline{OF'}$
故選(B)



(　　)5.　在平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=5$，則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 之值為



(A)10　(B)12　(C)14　(D)16　(E)18

答案：(D)

解析：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$
$=|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=5^2-3^2=16$，

故選(D)。

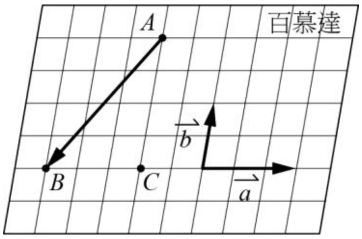
(　　)6.　設梯形 $OABC$ 中，$\overline{BC}\,//\,\overline{AO}$，$3\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}$，若 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{x}$，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{y}$，則 $\overrightarrow{AB}=$

(A) $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}$　(B) $\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}$　(C) $\overrightarrow{x}-2\overrightarrow{y}$　(D) $\overrightarrow{y}-\frac{1}{3}\overrightarrow{x}$　(E) $\overrightarrow{y}-\frac{2}{3}\overrightarrow{x}$

答案：(E)

解析：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{y}+\frac{1}{3}\overrightarrow{x}-\overrightarrow{x}=\overrightarrow{y}-\frac{2}{3}\overrightarrow{x}$，故選(E)

(　　)7.　如附圖，傳說中船駛達百慕達三角洲時，須遵循下列兩個怪異磁場 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 的方向；否則會神奇失蹤。今一艘救援艇已開到此海域 A 處，準備前往 B 處尋找一艘載滿黃金的船。若欲完成任務，它應遵循圖示 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 的方向，走了 $x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$，$x$，$y$ 是實數，則下列何者正確？



(A)$x=1$，$y=2$　(B)$x=1$，$y=-2$　(C)$x=-1$，$y=2$　(D)$x=-1$，$y=-2$　(E)$x=-2$，$y=-1$

答案：(D)

解析：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=-2\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$

$\therefore x=-1$，$y=-2$

故選(D)

(　　)8.　行列式 $\begin{vmatrix} 2996 & 2997 \\ 2998 & 2999 \end{vmatrix}$ 之值為

(A)4　(B)2　(C)0　(D)-2　(E)-4

答案：(D)

解析：$\begin{vmatrix} 2996 & 2997 \\ 2998 & 2999 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2996 & 1 \\ 2998 & 1 \end{vmatrix} = -2$，

×(−1)

故選(D)。

(　　)9. 若 A、B、C 三點共線，且 $8\overrightarrow{OB}=(2t-3)\overrightarrow{OA}+(3t-4)\overrightarrow{OC}$，則實數 $t=$？(O 點為不在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上的任一點)

(A)3　(B)$\frac{5}{8}$　(C)$\frac{3}{8}$　(D)$\frac{1}{8}$　(E)$\frac{1}{2}$

答案：(A)

解析：$8\overrightarrow{OB}=(2t-3)\overrightarrow{OA}+(3t-4)\overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{OB}=\frac{2t-3}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3t-4}{8}\overrightarrow{OC}$

因 A、B、C 三點共線，則 $\frac{2t-3}{8}+\frac{3t-4}{8}=1 \Rightarrow t=3$，故選(A)

(　　)10. 有一長度為 4 之向量 $\overrightarrow{a}$ 與單位向量 $\overrightarrow{e}$ 之夾角為 120°，則 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{e}$ 上之正射影為

(A)$2\overrightarrow{e}$　(B)$-2\overrightarrow{e}$　(C)$3\overrightarrow{e}$　(D)$-3\overrightarrow{e}$　(E)$-4\overrightarrow{e}$

答案：(B)

解析：正射影為$(|\overrightarrow{a}|\cos 120^\circ)\overrightarrow{e}=(4\times\frac{-1}{2})\overrightarrow{e}=-2\overrightarrow{e}$，

故選(B)。

(　　)11. $\overrightarrow{a}=(x,2)$，$\overrightarrow{b}=(3,y)$，x，y 為實數，且 $x^2+y^2=13$，若 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最大值 M，最小值 m，則數對 $(M,m)=$

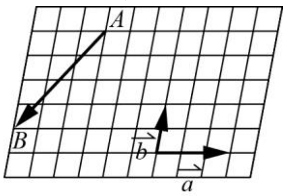
(A)$(5,-1)$　(B)$(3,-3)$　(C)$(6,-2)$　(D)$(5,-5)$　(E)$(13,-13)$

答案：(E)

解析：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=(x,2)\cdot(3,y)=3x+2y$，由柯西不等式知

$(x^2+y^2)(3^2+2^2)\geq(3x+2y)^2 \Rightarrow 13\times13\geq(3x+2y)^2 \Rightarrow -13\leq 3x+2y\leq 13$，則 $M=13$，$m=-13$，故選(E)

(　　)12. 如附圖所示，試將 $\overrightarrow{AB}$ 寫成 $x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$，$x$，$y$ 是實數，則

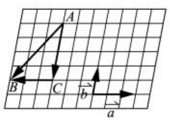


(A)$x=2$，$y=-1$　(B)$x=-2$，$y=1$　(C)$x=-2$，$y=0$　(D)$x=-1$，$y=1$　(E)$x=-1$，$y=-2$

答案：(E)

解析：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=-2\overrightarrow{b}+(-\overrightarrow{a})=-\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$，

則 $x=-1$，$y=-2$，故選(E)



(　　)13. 在一平面上有△ABC，滿足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$，則 P 點是△ABC 的

(A)內心　(B)外心　(C)垂心　(D)重心　(E)以上皆非

答案：(C)

解析：$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC} \Rightarrow \overrightarrow{PB}\cdot(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})=0 \Rightarrow \overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA} \Rightarrow \overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})=0 \Rightarrow \overrightarrow{PC}\perp\overrightarrow{AB}$

$\therefore P$ 為 $\triangle ABC$ 的垂心

(　　)14. 設 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(x,1-x)$，若 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$，則 $x=$
(A)5　(B)6　(C)7　(D)8　(E)9

答案：(C)

解析：$0=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}$
$=5+(x+2-2x)$
$\therefore x=7$，故選(C)。

(　　)15. 設 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\perp\vec{b}$，$3\vec{x}+\vec{y}=5\vec{a}$，$2\vec{x}-\vec{y}=5\vec{b}$，則 $\vec{x}$ 與 $\vec{y}$ 之夾角為
(A)45°　(B)60°　(C)90°　(D)120°　(E)135°

答案：(E)

解析：$\begin{cases}3\vec{x}+\vec{y}=5\vec{a}\\ 2\vec{x}-\vec{y}=5\vec{b}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}\\ \vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}\end{cases}$，

$|\vec{x}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=5$，

$|\vec{y}|^2=4|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}=40$，

$\vec{x}\cdot\vec{y}=2|\vec{a}|^2-3|\vec{b}|^2=-10$，

設 $\vec{x}$ 與 $\vec{y}$ 之夾角 θ，

$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{-10}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{40}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

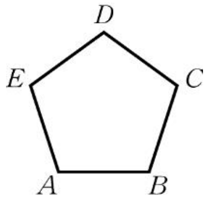
$\Rightarrow$ 夾角 $\theta=135°$，
故選(E)。

二、多重選擇題：每題 2 分、共 30 分

(　　)1. $ABCDE$ 為正五邊形，那麼下列向量內積中何者最小？
(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$　(B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$　(C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$　(D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}$　(E) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EA}$

答案：(C)(D)

解析：(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|^2$
(B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}|^2\cos 72°$
(C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{AB}|^2\cos 144°$
(D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=|\overrightarrow{AB}|^2\cos 144°$
(E) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EA}=|\overrightarrow{AB}|^2\cos 72°$
故選(C)(D)



(　　)2. 有關向量的性質，下列敘述哪些正確？
(A) $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$　(B) $|\vec{a}+\vec{b}|^2\ge|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$　(C) $|\vec{a}|-|\vec{b}|\le|\vec{a}-\vec{b}|$　(D)若 $|\vec{a}-2\vec{b}|=|\vec{a}+2\vec{b}|$，則 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$　(E)若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，則 $\vec{b}=\vec{c}$

答案：(A)(C)

解析：(A) ○：$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|\le|\vec{a}||\vec{b}|$

(B) ×：$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+|\vec{b}|^2$

∴ $(|\vec{a}|-|\vec{b}|)^2\le|\vec{a}+\vec{b}|^2\le(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$，

和原題不合

(C) ○：$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})^2=|\vec{a}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+|\vec{b}|^2$

$\Rightarrow(|\vec{a}|-|\vec{b}|)^2\le|\vec{a}-\vec{b}|^2$

$\Rightarrow|\vec{a}|-|\vec{b}|\le|\vec{a}-\vec{b}|$

(D) ×：$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}-2\vec{b}|^2\Rightarrow 8|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0$

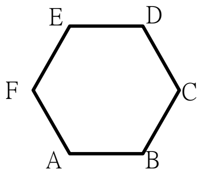
∴ $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

(E) ×：若 $\vec{b}\,//\,\vec{c}$ 且 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 及 $\vec{c}$，

則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，但 $\vec{b}\neq\vec{c}$

故選(A)(C)

(　　)3. 如附圖 $ABCDEF$ 為一正六邊形，下列何者正確？



(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}$　(B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$　(C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$　(D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$　(E) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=0$

答案：(A)(C)(D)(E)

解析：(A)(B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos 60°=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$。

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{CD}|\cos 60°=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$。

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AF}|\cos 120°=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$。

(C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos 60°=|\overrightarrow{AB}|^2$。

(D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}>0$。

(E) $\angle EAB=90°$。

故選(A)(C)(D)(E)。

(　　)4. 設 A, B, C, D 為坐標平面上相異四點，滿足 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2$，則下列敘述哪些正確？

(A) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$　(B) $\overrightarrow{AC}\,//\,\overrightarrow{AD}$　(C) $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AD}$　(D) $\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{AB}$　(E) $\overrightarrow{AB}$ 可以唯一表示成 $x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AD}$ 的形式，其中 x, y 為實數

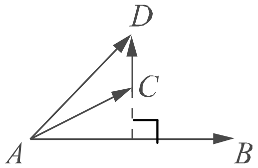
答案：(D)(E)

解析：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DC}$，

又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\neq0\Rightarrow\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 不平行，又如附圖，$\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 不垂直，因 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 不平行，

故 $\overrightarrow{AB}$ 可以唯一表成 $x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，$x, y$ 為實數，

故選(D)(E)。



(　　)5. 已知 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 都不是零向量，下列敘述何者正確？
(A)設$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$，則 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夾角為 $120°$　(B)設$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，則 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夾角為 $90°$　(C)$|\vec{a}||\vec{b}|\geq|\vec{a}\cdot\vec{b}|$　(D)$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2$　(E)$|\vec{a}|+|\vec{b}|\geq|\vec{a}-\vec{b}|$。

答案：(A)(B)(C)(D)(E)

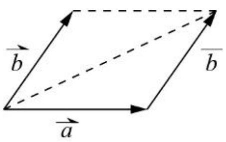
解析：(A)作圖(一)得知。

(B)作圖(二)對角線等長 ⇒ 矩形。

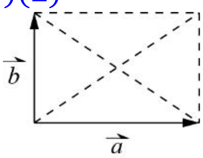
(C) $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\ \ 1\leq|\vec{a}||\vec{b}|$。

(E)作圖(三)由三角形邊長：兩邊和與第三邊比較。

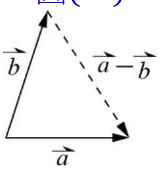
故選(A)(B)(C)(D)(E)。



圖(一)



圖(二)



圖(三)

(　　)6. 設行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=-35$，則下列敘述何者為真？

(A)$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}=35$　(B)$\begin{vmatrix} \frac{1}{5}a & \frac{1}{5}b \\ \frac{1}{5}c & \frac{1}{5}d \end{vmatrix}=-7$　(C)$\begin{vmatrix} \frac{1}{5}a & b \\ c & \frac{1}{5}d \end{vmatrix}=-7$　(D)$\begin{vmatrix} a & b+\frac{1}{5}a \\ c & d+\frac{1}{5}c \end{vmatrix}=-7$

(E)$\begin{vmatrix} a & a+\frac{1}{5}b \\ c & c+\frac{1}{5}d \end{vmatrix}=-7$

答案：(A)(E)

解析：(A)兩列對調，其值變號。

(B)提公因數，所求$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=-\frac{7}{5}$。

(C)左式$=\frac{1}{25}ad-bc$。

(D)$\begin{vmatrix} a & b+\frac{1}{5}a \\ c & d+\frac{1}{5}c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=-35$。

$\times(-\frac{1}{5})$

(E) $\begin{vmatrix} a & a+\frac{1}{5}b \\ c & c+\frac{1}{5}d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{1}{5}b \\ c & \frac{1}{5}d \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\times(-35) = -7$。

$\times(-1)$

故選(A)(E)。

(　　)7. 設 A，B，P 為平面上相異三點，若 O 點不在直線 AB 上，試問下列各題中，A，B，P 三點是否共線？

(A) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AP}$　(B) $\overrightarrow{OP} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$　(C) $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{6}{5}\overrightarrow{OB}$　(D)2 $\overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$　(E) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \frac{17}{5}\overrightarrow{BP}$

答案：(A)(B)(C)(D)(E)

解析：(A) ○：$\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{AP} \Rightarrow A$，$B$，$P$ 三點共線。

(B) ○：$\because \frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1$

(C) ○：$\because (-\frac{1}{5})+\frac{6}{5}=1$

(D) ○：$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$　$\because \frac{3}{2}+(-\frac{1}{2})=1$

(E) ○：$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\frac{17}{5}(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=-\frac{5}{17}\overrightarrow{OA}+\frac{22}{17}\overrightarrow{OB}$

$\because (-\frac{5}{17})+\frac{22}{17}=1$

故選(A)(B)(C)(D)(E)。

(　　)8. 下列哪些選項正確？

(A) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$　(B) $\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b+ka & a \\ d+kc & c \end{vmatrix}$　(C) $\begin{vmatrix} 201 & 199 \\ 191 & 209 \end{vmatrix} < \begin{vmatrix} 2997 & 2999 \\ 1997 & 1999 \end{vmatrix}$　(D) $\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e+ka & f+kb \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c-e & d-f \end{vmatrix}$　(E)若 a，b 均為實數，則 $\begin{vmatrix} 2783+a & 3894+b \\ 5566+2a & 7788+2b \end{vmatrix} = 0$

答案：(B)(D)(E)

解析：(A) 錯　$\because \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(B) 對　$\because \begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} \times(-k) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

而 $-\begin{vmatrix} b+ka & a \\ d+kc & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

$\times(-k)$

(C) 錯　∵ $\begin{vmatrix} 201 & 199 \\ 191 & 209 \end{vmatrix} \times(-1) = \begin{vmatrix} 201 & 199 \\ -10 & 10 \end{vmatrix}$

$= 10\begin{vmatrix} 201 & 199 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 10(201+199) = 4000$

而 $\begin{vmatrix} 2997 & 2999 \\ 1997 & 1999 \end{vmatrix} \times(-1)$

$= \begin{vmatrix} 1000 & 1000 \\ 1997 & 1999 \end{vmatrix} = 1000\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1997 & 1999 \end{vmatrix}$

$= 1000(1999-1997) = 2000$

∴ 錯

(D) 對　∵ $\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} \times(-k) + \begin{vmatrix} e+ka & f+kb \\ a & b \end{vmatrix} \times(-k)$

$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a & b \\ c-e & d-f \end{vmatrix}$

(E) 對　∵ $\begin{vmatrix} 2783+a & 3894+b \\ 5566+2a & 7788+2b \end{vmatrix} \times(-2)$

$= \begin{vmatrix} 2783+a & 3894+b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

故選(B)(D)(E)

(　　)9.　在△ABC中，若 $(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$，則

(A)△ABC為正三角形　(B)△ABC為等腰三角形　(C)△ABC為直角三角形　(D) $\overline{AB}=\overline{AC}$　(E) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

答案：(B)(D)

解析：$(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$，

$\overrightarrow{BC}\cdot[(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})]=0$，

$\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$，

若 $\overline{BC}$ 之中點為 M，

則 $\overrightarrow{BC}\cdot(2\overrightarrow{AM})=0$，

$\overline{BC}\perp\overline{AM}$，$\overline{AM}$ 為 $\overline{BC}$ 的中垂線，$\overline{AB}=\overline{AC}$

(　　)10.　下列哪些選項與行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 值一樣？

(A) $O(0,0)$、$P(a,c)$、$Q(b,d)$ 所成△OPR面積的兩倍　(B) $\begin{vmatrix} a+1 & b+2 \\ c+1 & d+2 \end{vmatrix}$

(C) $\begin{vmatrix} \dfrac{d}{110} & 2021b \\ \dfrac{c}{2021} & 110a \end{vmatrix}$ (D) $\begin{vmatrix} a-\sqrt{2}b & (1+\sqrt{2})b-a \\ c-\sqrt{2}d & (1+\sqrt{2})d-c \end{vmatrix}$ (E) $3\times\begin{vmatrix} \dfrac{2}{3}a+\dfrac{1}{3}b & \dfrac{2}{3}b+\dfrac{1}{3}a \\ \dfrac{2}{3}c+\dfrac{1}{3}d & \dfrac{2}{3}d+\dfrac{1}{3}c \end{vmatrix}$

答案：(C)(D)(E)

解析：(A) $\triangle OPR$ 面積$=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right|$

(B) $\begin{vmatrix} a+1 & b+2 \\ c+1 & d+2 \end{vmatrix}=(a+1)(d+2)-(b+2)(c+1)$不一定等於 $ad-bc$

(C) $\begin{vmatrix} \dfrac{d}{110} & 2021b \\ \dfrac{c}{2021} & 110a \end{vmatrix}=da-bc=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(D) $\begin{vmatrix} a-\sqrt{2}b & (1+\sqrt{2})b-a \\ c-\sqrt{2}d & (1+\sqrt{2})d-c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-\sqrt{2}b & b \\ c-\sqrt{2}d & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

×1

(E) $3\times\begin{vmatrix} \dfrac{2}{3}a+\dfrac{1}{3}b & \dfrac{2}{3}b+\dfrac{1}{3}a \\ \dfrac{2}{3}c+\dfrac{1}{3}d & \dfrac{2}{3}d+\dfrac{1}{3}c \end{vmatrix}$

×1

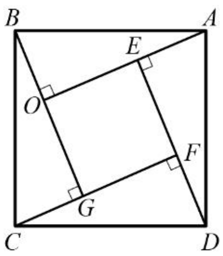
$=3\times\dfrac{1}{3}\begin{vmatrix} 2a+b & a+b \\ 2c+d & c+d \end{vmatrix}$

×(−1)

$=\begin{vmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

故選(C)(D)(E)

(　　)11. 如附圖，大正方形 $ABCD$ 由四個全等的直角三角形與一個小正方形 $OEFG$ 所拼成，其中 $\overline{OA}=12$，$\overline{OB}=5$，試問下列哪些選項是正確的？



(A) $\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{0}$ (B) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OF}<\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OA}$ (C) $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{OG}$ (D)若 $\vec{v}=5\overrightarrow{OA}+12\overrightarrow{OB}$，則 $\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\vec{v}}{|\overrightarrow{OA}||\vec{v}|}=\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\vec{v}}{|\overrightarrow{OB}||\vec{v}|}$ (E) $\overrightarrow{BD}=\dfrac{7}{12}\overrightarrow{OA}-\dfrac{17}{5}\overrightarrow{OB}$

答案：(C)(D)(E)

解析：(A) $\overline{GB}\perp\overline{OA}\Rightarrow\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{OA}=0\neq\overrightarrow{0}$

(B) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OF}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OE}|=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OA}$

(C) $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OG}$

(D) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{v}=5|\overrightarrow{OA}|^2+12\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=5\times12^2$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{v}=5\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+12|\overrightarrow{OB}|^2=12\times5^2$

$(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{v})|\overrightarrow{OB}|=(5\times12^2\times5)=(12\times5^2)\times12=(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{v})|\overrightarrow{OA}|$

$\therefore \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{v}|}=\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{v}|}$

(E) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED})-\overrightarrow{OB}$

$=\dfrac{7}{12}\overrightarrow{OA}-\dfrac{12}{5}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB}$

$=\dfrac{7}{12}\overrightarrow{OA}-\dfrac{17}{5}\overrightarrow{OB}$

故選(C)(D)(E)

(　　)12. 有關二階行列式的運算性質，下列何者正確？

(A) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+4b & b \\ c+4d & d \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} a & 5b \\ c & 5d \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ (C) $4\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4a & 4b \\ 4c & 4d \end{vmatrix}$ (D) $\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ 2c+3d & 4c+5d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c \\ 2a & 4c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & d \\ 3c & 5d \end{vmatrix}$ (E) $\begin{vmatrix} a+3b & 2a+6b \\ 3c+4d & 6c+8d \end{vmatrix}=0$

答案：(A)(E)

解析：(A) $\begin{vmatrix} a+4b & b \\ c+4d & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4b & b \\ 4d & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(B) $\begin{vmatrix} a & 5b \\ c & 5d \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$

(C) $\begin{vmatrix} 4a & 4b \\ 4c & 4d \end{vmatrix}=4^2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(D) $\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ 2c+3d & 4c+5d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b & c \\ 2c+3d & 4c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a+b & d \\ 2c+3d & 5d \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} a & c \\ 2a & 4c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & c \\ 3d & 4c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & d \\ 2c & 5d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & d \\ 3d & 5d \end{vmatrix}$

$=4ac-2c^2+4bc-3dc+5ad-2cd+5bd-3d^2$

$\neq 4ac-2ac+5bd-3dc$

(E) $\begin{vmatrix} a+3b & 2a+6b \\ 3c+4d & 6c+8d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+3b & 0 \\ 3c+4d & 0 \end{vmatrix}=0$

$\times(-2)$

故選(A)(E)

(　　)13. 設 $A(-3,4)$，$B(8,-6)$，$O(0,0)$為平面上相異三點，令 C在$\overline{AB}$上且$\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$，且令 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OB}$，則下列何者正確？
(A)向量 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 的長度為 15　(B) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-48$　(C)$\cos\angle AOB=-\dfrac{24}{25}$　(D)$\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{a}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{b}$　(E)C坐標為$\left(\dfrac{13}{3},\dfrac{-8}{3}\right)$

答案：(B)(C)(D)(E)

解析：(A) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(-3,4)+(8,-6)=(5,-2)$。

(B) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-24-24=-48$。

(C) $\cos\angle AOB=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}=\dfrac{-48}{5\times10}=-\dfrac{24}{25}$。

(D)(E)由分點公式$\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{a}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{b}=\left(\dfrac{13}{3},\dfrac{-8}{3}\right)$，

$\therefore C\left(\dfrac{13}{3},-\dfrac{8}{3}\right)$。

故選(B)(C)(D)(E)。

(　　)14. 設 O，A，B，C為平面上相異四點，則下列各條件中，何者可確定 A，B，C三點共線？
(A)$\overrightarrow{OB}=\dfrac{-5}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OC}$　(B)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$　(C)$\overrightarrow{OA}=7\overrightarrow{BC}$　(D)$3\overrightarrow{BA}=4\overrightarrow{BC}$　(E)$A(1,2)$，$B(3,4)$，$C(5,6)$

答案：(D)(E)

解析：(A)$\dfrac{-5}{3}\neq\dfrac{2}{3}\neq1$。

(B)$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$1+1\neq1$。

(C)只能確定$\overrightarrow{OA}//\overrightarrow{BC}$。

(D) $\overrightarrow{BA}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{BC}\Rightarrow A$、$B$、$C$一定共線。

(E) $\overrightarrow{AB}=(2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(4,4)=2\overrightarrow{AB}$

$\therefore A$、B、C共線。

故選(D)(E)。

(　　)15. 下列何者可確認 A、B、C三點共線？
(A)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$　(B)$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$　(C)$\overrightarrow{OA}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$　(D)$|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$　(E)$3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OC}$

答案：(A)(B)(C)(D)

解析：(A) $\because\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}$　$\therefore A$，B，C三點共線

(B) $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$　$\therefore\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{AC}$平行且共 A 點
　$\therefore A$，B，C三點共線

(C) $\because\dfrac{2}{2}+\dfrac{1}{3}=1$　$\therefore A$，B，C三點共線

(D) $\because|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$　$\therefore A$，B，C三點共線

(E) $\because\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{4}\overrightarrow{OB}$

$\frac{3}{4}+\frac{2}{4}\neq 1$

$\therefore$ A，B，C三點不共線

故選(A)(B)(C)(D)

三、填充題：每題 2 分、共 40 分

1. 設 $\overrightarrow{a}=(x+2,-8)$，$\overrightarrow{b}=(1-4x,20)$，若 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$，則 x之值＝______。

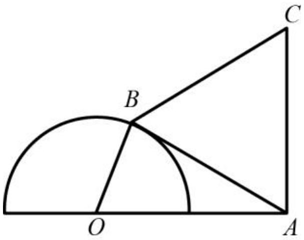
答案：4

解析：$\frac{x+2}{1-4x}=\frac{-8}{20}=\frac{-2}{5}$

$\Rightarrow 5(x+2)=-2(1-4x)$

$\therefore x=4$。

2. 如附圖(此為參考圖)，半圓 O的半徑為 1，A 為直徑延長線上一點，$\overline{OA}=2$，B 為半圓上任一點，以 $\overline{AB}$ 為一邊做正三角形 ABC，求四邊形 $OACB$ 面積的最大值______。



答案：$\frac{5\sqrt{3}}{4}+2$

解析：設$\angle AOB=\theta$，$\overline{AB}^2=1+4-2\cdot 1\cdot 2\cdot\cos\theta=5-4\cos\theta$

$\therefore$四邊形 $OACB$ 之面積為$\triangle OAB+\triangle ABC$

$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(5-4\cos\theta)$

$=\frac{5\sqrt{3}}{4}+(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)$

$=\frac{5\sqrt{3}}{4}+2\sin(\theta-\frac{\pi}{3})$

最大值為$\frac{5\sqrt{3}}{4}+2$

3. 設 x 為實數，$\overrightarrow{a}=(6,x)$，$\overrightarrow{b}=(2,1)$，若 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上之正射影為 $(-4,-2)$，則 x=______。

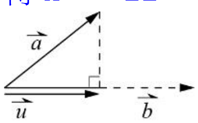
答案：-22

解析：如附圖，$\overrightarrow{u}=(-4,-2)$，

$(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{u})\perp\overrightarrow{b}$

$\Rightarrow(10,x+2)\cdot(2,1)=0$，

得 $x=-22$。



4. 已知$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=3$，試化簡$\begin{vmatrix} 3a+4c & 3b+4d \\ a-c & b-d \end{vmatrix}=$______。

答案：-21

解析：$\begin{vmatrix} 3a+4c & 3b+4d \\ a-c & b-d \end{vmatrix} \times 4 = \begin{vmatrix} 7a & 7b \\ a-c & b-d \end{vmatrix}$

$= 7\begin{vmatrix} a & b \\ a-c & b-d \end{vmatrix} \times(-1)$

$= 7\begin{vmatrix} a & b \\ -c & -d \end{vmatrix}$

$= 7\times(-1)\times3 = -21$。

5. 設△ABC中，E在$\overline{AC}$上且$\overline{AE}:\overline{EC}=2:3$；$F$在$\overline{AB}$上且$\overline{AF}:\overline{FB}=3:4$，$\overline{BE}$與$\overline{CF}$交於點 P，若$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對$(x, y)=$______。

答案：$(\frac{9}{29}, \frac{8}{29})$

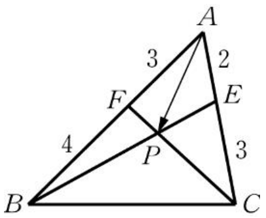
解析：$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=\frac{7x}{3}\overrightarrow{AF}+y\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \frac{7}{3}x+y=1$

$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+\frac{5y}{2}\overrightarrow{AE}$

$\Rightarrow x+\frac{5}{2}y=1$

$\therefore \begin{cases} 7x+3y=3 \\ 2x+5y=2 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{9}{29}$，$y=\frac{8}{29}$



6. 若△ABC中，$\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=3$，$\overline{BC}=4$且∠A的角平分線$\overline{AD}$交$\overline{BC}$於 D點，求$|\overrightarrow{AD}|=$______。

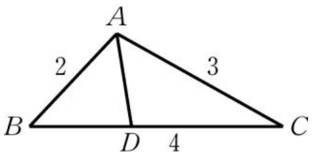
答案：$\frac{6}{5}$

解析：$\because \overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

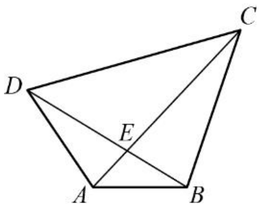
$\therefore |\overrightarrow{AD}|^2=\frac{4}{25}\times9+\frac{9}{25}\times4+\frac{12}{25}\times\frac{2^2+3^2-4^2}{2}$

$=\frac{72}{25}+(-\frac{36}{25})=\frac{36}{25}$

$\therefore |\overrightarrow{AD}|=\frac{6}{5}$



7. 如附圖，在四邊形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$，$E$為$\overline{AC}$，$\overline{BD}$之交點，則$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=$______。



答案：$\frac{1}{4}$

解析：若 $\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AC}$，則 $\overrightarrow{AE}=3t\overrightarrow{AB}+2t\overrightarrow{AD}$

$\because$ E，B，D三點共線　$\therefore$ $3t+2t=1$ $\Rightarrow$ $t=\frac{1}{5}$

$\therefore \overrightarrow{AE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\frac{1}{4}$

8. 單位圓之內接正六邊形 $ABCDEF$，求值：$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})=$______。

答案：-1

解析：正六邊形 $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{0}$ ，

所求$=\overrightarrow{OA}\cdot(-\overrightarrow{OA})=-|\overrightarrow{OA}|^2=-1$。

9. 已知坐標平面上的四點分別為 $A(a-1,8)$、$B(-1,a+7)$、$C(3,6)$、$D(1,7)$，若 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 上之正射影為 $(4,b)$，則實數序對 $(a,b)=$______。

答案：$(-3,-2)$

解析：$\overrightarrow{AB}=(-a,a-1)$

$\overrightarrow{CD}=(-2,1)$

$\frac{2a+a-1}{(-2)^2+1^2}(-2,1)=(4,b)$

$(\frac{2-6a}{5},\frac{3a-1}{5})=(4,b)$

$$\begin{cases}\frac{2-6a}{5}=4\\ \frac{3a-1}{5}=b\end{cases}$$

$\therefore a=-3$，$b=-2$

10. 已知 $A(2,4)$，$B(5,10)$ 且 P是直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 上一點，滿足 $2\overline{AP}=\overline{PB}$，求 P點的坐標為______。(兩解)

答案：$(-1,-2)$或$(3,6)$

解析：(1) $A-P-B$時，

$\overline{AP}:\overline{PB}=1:2$，

由分點公式得：

$P(\frac{2\cdot 2+1\cdot 5}{1+2},\frac{2\cdot 4+1\cdot 10}{1+2})$

$=(3,6)$。

(2) $P-A-B$時，設 $P(x,y)$，

由 $\overline{PA}:\overline{AB}=1:1$，

得 $A(2,4)=(\frac{5+x}{2},\frac{10+y}{2})$

$\Rightarrow P(-1,-2)$。

11. 已知 $\overrightarrow{a}=(4,7)$，$\overrightarrow{b}=(2,1)$，若 $\overrightarrow{u}$ ，$\overrightarrow{v}$ 為非零向量且 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ ，其中 $\overrightarrow{u}//\overrightarrow{b}$ 且 $\overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{b}$ ，則 $\overrightarrow{v}=$________。

答案：$(-2,4)$

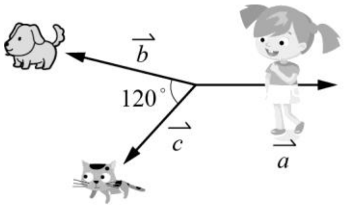
解析：$\overrightarrow{u}$ 為 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影

$$\Rightarrow \overrightarrow{u}=\left(\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2}\right)\overrightarrow{b}=\left(\frac{(4,7)\cdot(2,1)}{(\sqrt{2^2+1^2})^2}\right)(2,1)$$

$$=\frac{15}{5}(2,1)=(6,3)$$

$$\therefore \overrightarrow{v}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{u}=(4,7)-(6,3)=(-2,4)$$

12. 某天阿花帶著自己心愛的「毛小孩」到公園散步，突然兩隻「毛小孩」狗與貓不受控制，如圖所示，試問：如果狗的拉力為 8 公斤重，貓的拉力為 3 公斤重，且兩力夾角為 120°，則阿花要施______公斤重的力才可使三力平衡（合力為零）。



答案：7

解析：$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{a}=-(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$

$$\therefore |\overrightarrow{a}|=\sqrt{|\overrightarrow{b}|^2+2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+|\overrightarrow{c}|^2}$$

$$=\sqrt{8^2+2\times8\times3\times\cos120°+3^2}$$

$$=\sqrt{49}$$

$$=7$$

13. 設 $\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$ ，且 $|\overrightarrow{a}|=2$，$|\overrightarrow{b}|=1$，$|\overrightarrow{c}|=2$，求 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為______。

答案：60°

解析：$|\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}|=|-\overrightarrow{c}|$，平方得

$|\overrightarrow{a}|^2-4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+4|\overrightarrow{b}|^2$

$=|\overrightarrow{c}|^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1=2\times1\times\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=60°$，

$\therefore \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 夾角 θ 為 60°。

14. 設 $A(0,0)$，$B(1,3)$，$C(-1,2)$，$D(3,4)$ 為坐標平面上的四點，$|\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{CD}|$的最小值為______。

答案：$\sqrt{5}$

解析：$\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{CD}=(1,3)+t(4,2)$

$=(4t+1,2t+3)$，

$\therefore |\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{CD}|$

$=\sqrt{(4t+1)^2+(2t+3)^2}$

$=\sqrt{20(t+\frac{1}{2})^2+5}\ \geq\sqrt{5}$ 。

15. 平面上 A，B，C 三點共線，O 為不在此線上之任一點，若 $3\overrightarrow{OC}=(2t+1)\ \overrightarrow{OA}+(3t+4)\ \overrightarrow{OB}$，求實數 $t=$______。

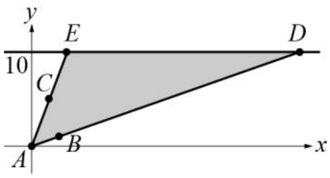
答案：$-\frac{2}{5}$

解析：$\overrightarrow{OC}=\frac{2t+1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{3t+4}{3}\overrightarrow{OB}$

$\because A$、B、C 共線　$\therefore\frac{2t+1}{3}+\frac{3t+4}{3}=1$，

得 $t=-\frac{2}{5}$ 。

16. 如附圖，$A(0,0)$、$B(3,1)$、$C(2,5)$，若 $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，$0\leq s\leq a$，$0\leq t\leq b$ 且 $\frac{s}{a}+\frac{t}{b}\leq c$，使得所有 P 點所成圖形為 $\triangle ADE$（含內部），其中 D、E 在直線 $y=10$ 上，則 $a+b-c=$______。



答案：11

解析：D、E 在 $y=10$ 上

$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+o\overrightarrow{AC}=s(3,1)=(?,10)\Rightarrow s=10$

$\overrightarrow{AE}=o\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=t(2,5)=(?,10)\Rightarrow t=2$

$\because 0\leq s\leq a\Rightarrow a=10$，$0\leq t\leq b\Rightarrow b=2$

又 $\frac{s}{a}+\frac{t}{b}\leq c\Rightarrow\frac{s}{ac}+\frac{t}{bc}\leq 1$ 得 $ac=10$，$bc=2\Rightarrow c=1$（仿照截距式的觀念）

$\therefore a+b-c=10+2-1=11$

17. 設三向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$，已知 $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$，若 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=2$，$\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=-3$，則 $|\overrightarrow{a}|=$______。

答案：$\sqrt{5}$

解析：$\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{0}=0$，

$|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=0$

$|\overrightarrow{a}|^2=-2\times2-3\times(-3)=5$，

$\therefore|\overrightarrow{a}|=\sqrt{5}$ 。

18. 已知 $\overrightarrow{a}=(2,-4)$，$\overrightarrow{b}=(-1,1)$，$t$ 為實數，若 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$，則當 $t=$______時，$|\overrightarrow{c}|$ 有最小值。

答案：3

解析：$\overrightarrow{c}=(2,-4)+(-t,t)=(2-t,-4+t)$

$|\overrightarrow{c}|=\sqrt{(2-t)^2+(t-4)^2}$

$=\sqrt{2(t-3)^2+2}$

$\therefore t=3$ 時，$|\overrightarrow{c}|$ 有最小值

19. 四邊形 $ABCD$，兩對角線 $\overline{AC}$，$\overline{BD}$ 互相垂直且交於 E 點，$\overline{AE}=4$，$\overline{BE}=6$，$\overline{CE}=8$，$\overline{DE}=4$，求向量內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ 的值為________。

答案：-56

解析：坐標化，如附圖，

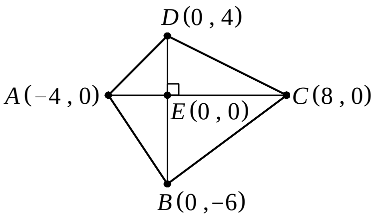
$\overrightarrow{AB}=(4,-6)$，

$\overrightarrow{CD}=(-8,4)$，

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$

$=4\times(-8)+(-6)\times4$

$=-32-24=-56$。



20. 在△ABC 中，$\overline{BC}=\sqrt{13}$，$\overline{AC}=4$，$\overline{AB}=3$，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$______。

答案：6

解析：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{3^2+4^2-13}{2}=6$