高中數學科 3A 第三次段考 考古卷(B)

一、單選題：每題 2 分、共 30 分

(　　)1. 設 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(x,1)$，若 $(\vec{a}+2\vec{b})$ 與 $(2\vec{a}-\vec{b})$ 平行，則 x 之值為

(A)$\dfrac{1}{4}$　(B)$\dfrac{1}{3}$　(C)$\dfrac{1}{2}$　(D)2　(E)3

答案：(C)

解析：$\vec{a}+2\vec{b}=(1+2x,4)$，$2\vec{a}-\vec{b}=(2-x,3)$

$\Rightarrow \dfrac{1+2x}{2-x}=\dfrac{4}{3}$，得 $x=\dfrac{1}{2}$，

故選(C)。

(　　)2. 設 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(4,3)$，若有一實數 t，使得 $|\vec{a}+t\vec{b}|$ 為最小，其最小值為

(A)0　(B)1　(C)-1　(D)2　(E)$\dfrac{1}{2}$

答案：(B)

解析：$|\vec{a}+t\vec{b}|=|(1+4t,2+3t)|$

$=\sqrt{(1+4t)^2+(2+3t)^2}$

$=\sqrt{25(t+\frac{2}{5})^2+1}$

當 $t=-\dfrac{1}{2}$ 時，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ 有最小值 1，

故選(B)。

(　　)3. 若 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x+1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix}$，則 $f(x)$ 之最小值為

(A)3　(B)1　(C)0　(D)-1　(E)-3

答案：(E)

解析：$f(x)=3x-(x+1)+x^2-1=x^2+2x-2=(x+1)^2-3$，最小值$-3$

(　　)4. 平面上有一$\triangle ABC$及另一點 P，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，$t$ 為實數。若 P 在$\triangle ABC$之內部，則下列哪一個選項是 t 的最大範圍？

(A)$0<t<\dfrac{1}{5}$　(B)$0<t<\dfrac{2}{5}$　(C)$0<t<\dfrac{3}{5}$　(D)$0<t<\dfrac{4}{5}$　(E)$0<t<1$

答案：(C)

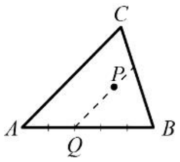
解析：令 $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AQ}+t\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{QP}=t\overrightarrow{AC}$，

由三角形相似關係

$\Rightarrow \dfrac{|\overrightarrow{QP}|}{|\overrightarrow{AC}|}<\dfrac{3}{5}$　$\therefore 0<t<\dfrac{3}{5}$，

故選(C)。



(　　)5. 已知$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$ 且 θ 為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角，則 cosθ 之值為何？

(A)1　(B)-1　(C)$-\frac{3}{5}$　(D)$-\frac{4}{5}$　(E)0

答案：(C)

解析：$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-6}{5\times 2}=-\dfrac{3}{5}$，

故選(C)。

(　　)6. 設 $\vec{a}=(1,3)$，$\vec{b}=(x,1)$，若 $(\vec{a}+2\vec{b})$ 與 $(2\vec{a}-\vec{b})$ 平行，則 x 的值為

(A)1　(B)$\frac{1}{2}$　(C)$\frac{1}{3}$　(D)$\frac{1}{4}$　(E)$\frac{1}{5}$

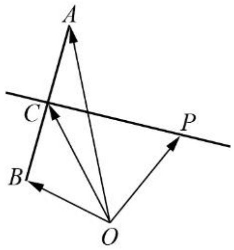
答案：(C)

解析：$\vec{a}+2\vec{b}=(1,3)+2(x,1)=(1+2x,5)$，

$2\vec{a}-\vec{b}=2(1,3)-(x,1)=(2-x,5)$，

因 $(\vec{a}+2\vec{b})//(2\vec{a}-\vec{b})$，則 $\dfrac{1+2x}{2-x}=\dfrac{5}{5}\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}$，故選(C)

(　　)7. 如附圖，O，A，B 是平面上的三點，設 P 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分線 CP 上任意一點，若 $|\overrightarrow{OA}|=4$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，則 $\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=$？



(A)1　(B)3　(C)4　(D)5　(E)6

答案：(E)

解析：$\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$

$=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP})\cdot\overrightarrow{BA}$

$=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA}$　$(\because \overline{AB}\perp\overline{CP})$

$=(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$ ($\because$ C 為 $\overline{AB}$ 中點)

$=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2)=\frac{1}{2}(4^2-2^2)=6$，選(E)

(　　)8. 平面上△ABC 的三頂點為 $A(-1,2)$，$B(5,-2)$，$C(4,1)$，則△ABC 的面積為

(A)7　(B)10　(C)12　(D)14　(E)16

答案：(A)

解析：$\overrightarrow{AB}=(6,-4)$，$\overrightarrow{AC}=(5,-1)$，

△ABC 的面積$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}6&-4\\5&-1\end{vmatrix}\right|=7$，故選(A)

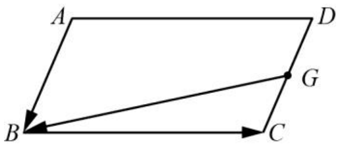
(　　)9. 平行四邊形 $ABCD$ 中，G 點為 $\overline{CD}$ 的中點，而 $\overrightarrow{GB}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{BC}$ $(r，s\in R)$，則 $r+s=$

(A)$\frac{1}{2}$　(B)$-\frac{1}{2}$　(C)$\frac{3}{2}$　(D)$-\frac{3}{2}$　(E)1

答案：(B)

解析：$\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{BC})$，則 $r=\frac{1}{2}$，$s=-1$，

即 $r+s=\frac{1}{2}+(-1)=-\frac{1}{2}$，故選(B)



(　　)10.　在△ABC 中，若 E 為 $\overline{AC}$ 上的一點，F 為 $\overline{AB}$ 上的一點，設 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CF}$ 交於 P 點，且 $\overline{BP}$ ：$\overline{PE}$ ＝5：3，$\overline{CP}$ ：$\overline{PF}$ ＝2：1，則 $\overline{AF}$ ：$\overline{FB}$ ＝？
(A)8：7　(B)7：8　(C)7：9　(D)9：7　(E)8：9

答案：(D)

解析：設 $\overrightarrow{AC}=a\overrightarrow{AE}$ ，$\overrightarrow{AB}=b\overrightarrow{AF}$ ，且 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ，則

(i) ∵ $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+ay\overrightarrow{AE}$ ，

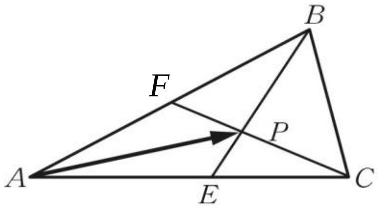
又∵ $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{8}\overrightarrow{AE}$ ，可知 $x=\frac{3}{8}$ ，$ay=\frac{5}{8}$

(ii) ∵ $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=bx\overrightarrow{AF}+y\overrightarrow{AC}$ ，

又∵ $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ，可知 $bx=\frac{2}{3}$ ，$y=\frac{1}{3}$

由(i)(ii)可知 $a=\frac{15}{8}$ ，$b=\frac{16}{9}$

∴ $\overrightarrow{AB}=\frac{16}{9}\overrightarrow{AF}\Rightarrow\overline{AF}:\overline{FB}=9:7$，選(D)



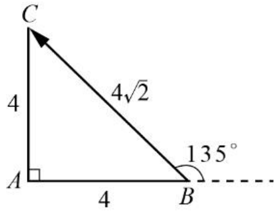
(　　)11.　△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=4\sqrt{2}$ ，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$
(A)$4\sqrt{2}$　(B)$-4\sqrt{2}$　(C)16　(D)-16　(E)-32

答案：(D)

解析：此三角形為直角三角形，如附圖所示：

所求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos 135°=4\times4\sqrt{2}\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-16$

故選(D)



(　　)12.　設 $\overrightarrow{AB}=(3,2)$，$\overrightarrow{AC}=(k,1)$，若△$ABC$ 為∠B＝90°之直角三角形，則 k＝
(A)$\frac{11}{3}$　(B)$\frac{-2}{3}$　(C)$\frac{5}{3}$　(D)$\frac{13\pm\sqrt{3}}{2}$　(E)$\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

答案：(A)

解析：$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=(-3,-2)+(k,1)=(-3+k,-1)$

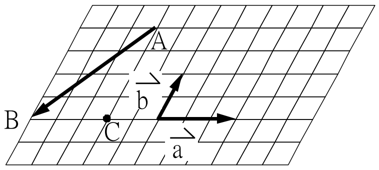
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow-9+3k-2=0\Rightarrow k=\frac{11}{3}$

(　　)13.　$\vec{b}=(3,-1)$ 在 $\vec{a}=(4,2)$ 方向上的正射影為：
(A)$(-3,-2)$　(B)$(-2,-1)$　(C)$(2,1)$　(D)$(1,3)$　(E)$(-1,3)$

答案：(C)

解析：所求＝($\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}$) $\vec{a}$ ＝ $\dfrac{12-2}{20}$ (4,2)＝(2,1)，故選(C)

(　　)14. 如附圖，傳說船駛達<u>百慕達三角洲</u>時，須遵循下列兩個怪異磁場 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的方向；否則會神奇失蹤。今一艘救援艇已開到此海域 A 處，準備前往 B 處尋找一艘載滿黃金的船。若欲完成任務，它應遵循圖示 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的方向，走了 $x\vec{a}+x\vec{b}$ ，x，y 是實數，則



(A) $x=2$，$y=-1$　(B) $x=-2$，$y=1$　(C) $x=-2$，$y=0$　(D) $x=-1$，$y=1$　(E) $x=-1$，$y=-2$

答案：(E)

解析： $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=(-2)\vec{b}+(-1)\vec{a}$

$\therefore x=-1$，$y=-2$，

故選(E)。

(　　)15. 設 ABC 為坐標平面上一三角形，P 為平面上一點且 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ ，則 $\dfrac{\triangle ABP\text{面積}}{\triangle ABC\text{面積}}$ 的比值為

(A) $\dfrac{1}{5}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{2}{5}$　(D) $\dfrac{1}{2}$　(E) $\dfrac{2}{3}$

答案：(C)

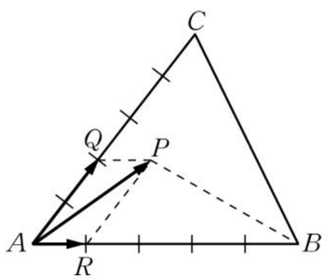
解析：如附圖，$\overline{QP}\,//\,\overline{AB}$

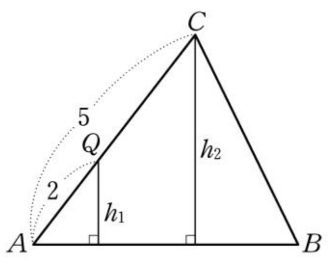
令 $d(P,\overline{AB})=d(Q,\overline{AB})=h_1$

又 $h_1:h_2=\overline{AQ}:\overline{AC}=2:5$

$$\therefore\ \frac{\triangle ABP\text{面積}}{\triangle ABC\text{面積}}=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times h_1}{\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times h_2}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{2}{5}$$

故選(C)





二、多重選擇題：每題 2 分、共 30 分

(　　)1. 下列何者恆正確？

(A) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$　(B) $\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b+ka & a \\ d+kc & c \end{vmatrix}$　(C) $\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e+ka & f+kb \\ a & b \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & b \\ e-c & f-d \end{vmatrix}$　(D)若 $\begin{vmatrix} \sin 3\theta & \cos 3\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=1$，則 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$　(E) $\begin{vmatrix} 401 & 399 \\ 391 & 409 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4994 & 4998 \\ 2994 & 2998 \end{vmatrix}$

答案：(B)(C)(E)

解析：(A)兩行對調，其值變號。

(B)左$=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$，右$=-\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$。

(C)左$=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e & f \\ a & b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} a & b \\ c-e & d-f \end{vmatrix}$。

(D)左$=\sin 3\theta\cos\theta-\cos 3\theta\sin\theta$

$=\sin(3\theta-\theta)=\sin 2\theta=1$

$\therefore 2\theta=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$，$n\in Z$。

(E)左$=\begin{vmatrix} 401 & 399 \\ 391 & 409 \end{vmatrix}\times(-1)=\begin{vmatrix} 401 & 399 \\ -10 & 10 \end{vmatrix}$

$=10\times 800$

右$=\begin{vmatrix} 4994 & 4998 \\ 2994 & 2998 \end{vmatrix}\times(-1)=\begin{vmatrix} 2000 & 2000 \\ 2994 & 2998 \end{vmatrix}$

$=2000\times 4$，

故選(B)(C)(E)。

(　　)2. 已知直線 L：$\begin{cases} x=1-2t \\ y=3+t \end{cases}$ t 為實數，下列直線何者與 L 垂直？

(A)L：$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=4-t \end{cases}$，$t$ 為實數　(B)L：$\begin{cases} x=2+t \\ y=-1-2t \end{cases}$，$t$ 為實數　(C)L：$\begin{cases} x=-1+t \\ y=-1+2t \end{cases}$，$t$ 為實數　(D)$x+2y=0$　(E)$-2x+y+5=0$

答案：(C)(E)

解析：△的方向向量$(-2,1)$，各選項直線的方向向量：

(A)$(2,-1)$；(B)$(1,-2)$；(C)$(1,2)$；(D)$(2,-1)$；(E)$(1,2)$

兩者互相垂者，故選(C)(E)。

(　　)3. 下列各選項中的行列式，哪些與$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$的值一定相等？

(A)$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$　(B)$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$　(C)$\begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{vmatrix}$　(D)$\begin{vmatrix} 1 & b \\ c & ad \end{vmatrix}$　(E)$\begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix}$

答案：(A)(C)(D)

解析：利用展開或基本性質，

故選(A)(C)(D)。

(　　)4. 正六邊形 $ABCDEF$ 的邊長為 2，設 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}$，以 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 向量表下列向量，何者正確？

(A) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$　(B) $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$　(C) $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$　(D) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$

(E) $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{b}-2\overrightarrow{a}$

答案：(A)(C)(E)

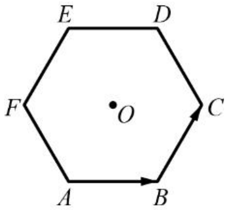
解析：(B) $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{b}$。

(C) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{b}+(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})=-\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$。

(D) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$。

(E) $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BO}=2\overrightarrow{b}-2\overrightarrow{a}$。

故選(A)(C)(E)。



(　　)5. $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$與下列哪些行列式恆相等？

(A)$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$　(B)$\begin{vmatrix} 2a & \frac{1}{2}c \\ 2b & \frac{1}{2}d \end{vmatrix}$　(C)$\begin{vmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{vmatrix}$　(D)$\begin{vmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{vmatrix}$　(E)$\begin{vmatrix} a & -c \\ -b & d \end{vmatrix}$

答案：(A)(B)(C)(D)(E)

解析：(A)(B)(C)(D)(E) ⇒ $ad-bc$

(　　)6. xy平面上有$A(1,0)$、$B(-1,2)$、$C(3,k)$，則下列何者為真？

(A)若$\triangle ABC$之面積$=4$時，$k=2$　(B)若$k=2$時，$\triangle ABC$之面積$=4$　(C)若$k=-8$時，$\triangle ABC$之面積$=6$　(D)若$k=-2$時，A、B、C三點共線　(E)若$k=2$時，$\triangle ABC$為直角三角形

答案：(B)(C)(D)(E)

解析：$\overrightarrow{AB}=(-2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,k)$，

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix}\right|=|k+2|$

(A) $\triangle=4$ ⇒ $k=2$，-6

(B) $k=2$ ⇒ $\triangle=4$

(C) $k=-8$ ⇒ $\triangle=6$

(D) $k=-2$ ⇒ $\triangle=0$

(E) $k=2$ ⇒ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

(　　)7. 颱風作等速直線前進，颱風中心P，暴風半徑為1，清晨零時位在$A(3,-1)$，清晨1時來到$B(2,1)$之點。若y軸為海岸線，$x<0$為陸地，$x>0$為海面。請問下列敘述何者正確？

(A)清晨5時中心位置在$(-2,9)$　(B)颱風前進的速率是每小時$\sqrt{5}$公里（設x軸和y軸上每單位長皆是1公里）　(C)颱風中心在清晨3時登岸　(D)海岸線上首先接觸暴風圈的位置為$(0,3)$　(E)有一地方位在$C(-3,10)$之處，則C點在清晨5點12分開始進入暴風圈

答案：(A)(B)(C)(D)(E)

解析：(A) ○：∵ $\overrightarrow{AB}=(-1,2)$

∴ 清晨5時在$(3,-1)+5(-1,2)=(-2,9)$，

即G點

(B) ○：∵ $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

(C) ○：清晨3時颱風中心在$(3,-1)+3(-1,2)=(0,5)$

(D) ○：∵ D為$(3,-1)+2(-1,2)=(1,3)$，

且$R(0,3)$與$D(1,3)$之距離為1

∴ R點為海岸線上首先接觸暴風半徑之位置

(E) ○：設P為$(k,-2k+5)$時，C點開始進入暴風圈，

則 $\overline{CP}=1 \Rightarrow \sqrt{(k+3)^2+(-2k+5-10)^2}=1$

$\Rightarrow 5k^2+26k+33=0$

$\therefore\ k=-\dfrac{11}{5}$ 或 -3 (不合，$k=-3$ 為離開時)

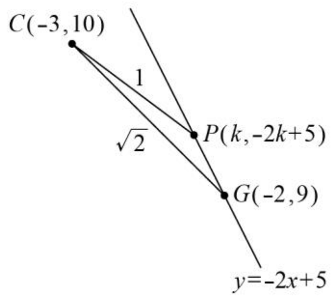
$\Rightarrow P\left(\dfrac{-11}{5}, \dfrac{47}{5}\right)$

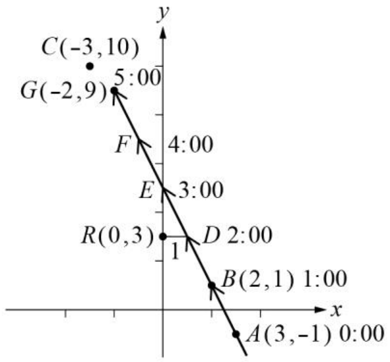
又∵ $\overline{PG}=\sqrt{(-\dfrac{11}{5}+2)^2+(\dfrac{47}{5}-9)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

由 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5}$ 可知，$\dfrac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}\times 60=\dfrac{1}{5}\times 60=12$

即 5：12 時，C 點開始進入暴風圈

故選 (A)(B)(C)(D)(E)





(　　)8. 若 G 為△ABC 之重心，且 $|\overrightarrow{GA}|=2$，$|\overrightarrow{GB}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{GC}|=\sqrt{3}$，則

(A) $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=-\dfrac{3}{2}$　(B) $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=\dfrac{3}{2}$　(C)設 $\overrightarrow{GA}$ 與 $\overrightarrow{GB}$ 之夾角為 θ，則 $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(D)設 $\overrightarrow{GA}$ 與 $\overrightarrow{GB}$ 之夾角為 θ，則 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{46}}{8}$　(E)△ABC 之面積為 $\dfrac{3\sqrt{23}}{4}$

答案：(A)(D)(E)

解析：$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} \Rightarrow |\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}|=|-\overrightarrow{GC}|$

平方得 $|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+2\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=|\overrightarrow{GC}|^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=-\dfrac{3}{2}$，$\cos\theta=\dfrac{-\frac{3}{2}}{2\times\sqrt{2}}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{46}}{8}$，

△ABC 面積 $=3$ (△GAB 面積) $=3\times(\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{46}}{8})=\dfrac{3\sqrt{23}}{4}$，

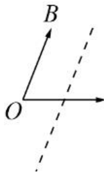
故選(A)(D)(E)。

(　　)9. 設 O，A，B 三點不共線，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，則下列對 P 點軌跡的敘述何者正確？

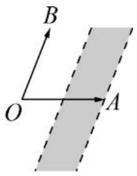
(A)若 $x=\dfrac{1}{2}$，y 為實數，則 P 點軌跡表一直線　(B)若 $\dfrac{1}{2}\le x\le 1$，y 為實數，則 P 點軌跡表一線段　(C)若 $\dfrac{1}{2}\le x\le 1$，$1\le y\le 2$，則 P 點軌跡表一平行四邊形區域　(D)若 x 為實數，y 為實數，則 P 點軌跡表 O，A，B 三點所在的平面　(E)若 $x+y=1$，x 為實數，y 為實數，則 P 點軌跡表一直線

答案：(A)(C)(D)(E)

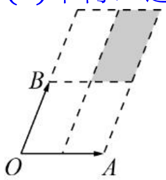
解析：(A)一直線



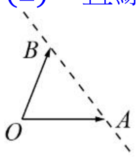
(B)二平行線圍成的區域



(C)平行四邊形區域

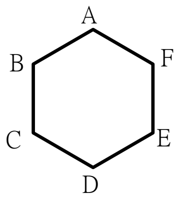


(E)一直線



故選(A)(C)(D)(E)

(　　)10. 如附圖，$ABCDEF$ 為一正六邊形，下列何者敘述為正確？



(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FD}$　(B) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$　(C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$　(D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overline{AB}^2$　(E) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overline{AB}^2$

答案：(A)(B)(C)(E)

解析：(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{FD}$。

(B) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$。

(C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=0$。

(D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AF}|\cos 120°=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$。

(E) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos 60°=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$。

故選(A)(B)(C)(E)。

(　　)11. 設 $\overrightarrow{a}=(6,-7)$，$\overrightarrow{b}=(9,-2)$，下列何者為真？

(A) $|\overrightarrow{a}|=17$　(B) $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為銳角　(C) $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所張的平行四邊形面積為 51

(D) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 互相垂直　(E)與 $\overrightarrow{a}$ 同方向的單位向量為 $\left(\frac{6}{85},-\frac{7}{85}\right)$

答案：(B)(C)(D)

解析：(A) $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{6^2+(-7)^2}=\sqrt{85}$。

(B) $\cos=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{68}{\sqrt{85}\cdot\sqrt{85}}$

$=\dfrac{68}{85}=\dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow$ 夾角 θ 為銳角。

(C)面積 $=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

$=85\times\dfrac{3}{5}=51$。

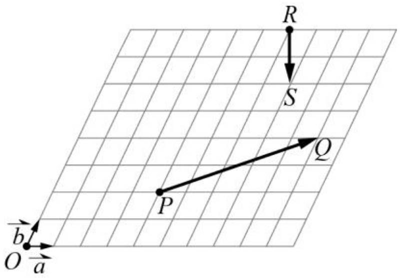
(D) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=0$。

(E)單位向量 $=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\dfrac{6}{\sqrt{85}},\dfrac{-7}{\sqrt{85}}\right)$。

故選(B)(C)(D)。

(　　)12. 附圖為兩組兩兩平行的直線組合，且相鄰兩線等距離，已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 長度均為 1，其夾角為 60°，則下列何者為真？



(A) $\overrightarrow{OP}=5\vec{a}+2\vec{b}$　(B) $\overrightarrow{RS}=\vec{a}-2\vec{b}$　(C) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$　(D) $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{39}$

(E) $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{RS}=-3$

答案：(B)(C)

解析：(A)(C)(D) $\overrightarrow{OP}=4\vec{a}+2\vec{b}$

$|\overrightarrow{AB}|^2=16|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+16\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=16+4+16\times\cos 60°=28$。

(B) $\overrightarrow{RS}=\vec{a}-2\vec{b}$。

(E) $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{RS}=(-5\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=-5+4+8\cdot\dfrac{1}{2}=3$。

故選(B)(C)。

(　　)13. 設 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 為三非零向量，則下列何者為真？
(A)若 $\vec{b}=\vec{c}$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$　(B)若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，則 $\vec{b}=\vec{c}$
(C) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$　(D) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$　(E)若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{0}$

答案：(A)(D)

解析：(B)消去律不成立。

(C)結合律不成立。

(E) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$。

故選(A)(D)。

(　　)14. 設 D，E，F分別為△ABC三邊$\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$之中點，且$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，則

(A) $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\vec{a}$　(B) $\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{2}\vec{b}$　(C) $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$　(D) $\overrightarrow{DA}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

(E) $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$

答案：(A)(B)(C)(D)(E)

解析：(A) $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\vec{a}$。

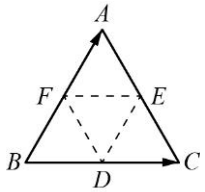
(B) $\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\vec{b}$。

(C) $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$。

(D) $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$。

(E) $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$。

故選(A)(B)(C)(D)(E)。



(　　)15. 設$\vec{u}$、$\vec{v}$為兩非零向量，若$|\vec{u}|=2|\vec{v}|=|2\vec{u}+3\vec{v}|=2$，且$\theta$為$\vec{u}$和$\vec{v}$之夾角，則下列哪些正確？

(A) $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\frac{7}{2}$　(B)$\cos\theta=\frac{7}{8}$　(C)$|\vec{u}+2\vec{v}|=1$　(D)以$\vec{u}$和$\vec{v}$為兩邊的三角形面積為$\frac{\sqrt{15}}{8}$　(E) $\vec{u}$在$\vec{v}$上的正射影長度為$\frac{7}{4}$

答案：(C)(E)

解析：(A) $|2\vec{u}+3\vec{v}|^2=4|\vec{u}|^2+12\vec{u}\cdot\vec{v}+9|\vec{v}|^2$

$\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=-\frac{7}{4}$

(B) $-\frac{7}{4}=2\times1\times\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=-\frac{7}{8}$

(C) $|\vec{u}+2\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+4\vec{u}\cdot\vec{v}+4|\vec{v}|^2=1$

$\therefore|\vec{u}+2\vec{v}|=1$

(D) 所求$=\frac{1}{2}\sqrt{2^2\times1^2-(-\frac{7}{4})^2}=\frac{\sqrt{15}}{8}$

(E) 所以$=||\vec{u}|\cos\theta|=\frac{7}{4}$

故選(C)(E)

三、填充題：每題 2 分、共 40 分

1.　求行列式$\begin{vmatrix}911 & 1808\\1814 & 3599\end{vmatrix}$之值＝______。

答案：-1023

解析：$\begin{vmatrix}911 & 1808\\ 1814 & 3599\end{vmatrix}\times(-2)=\begin{vmatrix}911 & 1808\\ -8 & -17\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}911 & -14\\ -8 & -1\end{vmatrix}$

$\times(-2)$

$=(-911)-112=-1023$。

2. 設$\overline{OA}=2$，$\overline{OB}=3$，$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$之夾角為 $60°$，試求 $|\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}|=$______。

答案：$2\sqrt{7}$

解析：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2\times3\times\cos 60°=3$，

$|\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2-4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+4|\overrightarrow{OB}|^2$

$=4-12+36=28$，

$\therefore|\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}|=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$。

3. 已知$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=3$，則$\begin{vmatrix}3a+4c & 3b+4d\\ a-c & b-d\end{vmatrix}=$________。

答案：-21

解析：$\begin{vmatrix}3a+4c & 3b+4d\\ a-c & b-d\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}7c & 7d\\ a-c & b-d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7c & 7d\\ a & b\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}7c & 7d\\ -c & -d\end{vmatrix}=-7\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=-7\times3=-21$。

4. 設 $A(-4,3)$、$B(2,-1)$，若 P在 AB直線上，但不在$\overline{AB}$上，且$\overline{AP}:\overline{BP}=3:1$，求 P點坐標為______。

答案：$(5,-3)$

解析：$\overrightarrow{BP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$(x-2,y+1)=\dfrac{1}{2}(6,-4)$

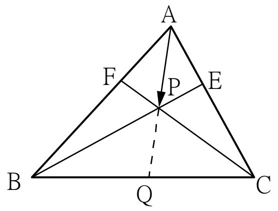
$\therefore x=5$，$y=-3$

$P(5,-3)$

5. $\triangle ABC$中，點 E在$\overline{AC}$上且$\overline{AE}:\overline{EC}=3:4$，點 F在$\overline{AB}$上且$\overline{AF}:\overline{FB}=1:2$，設$\overline{BE}$與$\overline{CF}$交點 P。

(1) 若$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對$(x,y)=$______。

(2) 若延長直線 AP交線段$\overline{BC}$於 Q，則$\overline{AP}:\overline{AQ}=$______。



答案：(1) $(\dfrac{2}{9},\dfrac{1}{3})$；(2) $5:9$

解析：(1) 因$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=3x\overrightarrow{AF}+y\overrightarrow{AC}$，

且 P、F、C三點共線

故 $3x+y=1$…………………………①

又$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+\dfrac{7}{3}y\overrightarrow{AE}$，

且 P、B、E三點共線

故 $x+\frac{7}{3}y=1$，即 $3x+7y=3$……②

解①，②得 $x=\frac{2}{9}$，$y=\frac{1}{3}$，

即 $(x,y)=(\frac{2}{9},\frac{1}{3})$

(2) 因 A、P、Q 三點共線，

故 $\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$，

即 $\overrightarrow{AQ}=\frac{2k}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{3}\overrightarrow{AC}$

又 B、Q、C 三點共線，

故 $\frac{2k}{9}+\frac{k}{3}=1$，得 $k=\frac{9}{5}$

於是 $\overrightarrow{AQ}=\frac{9}{5}\overrightarrow{AP}$，故 $\overline{AP}:\overline{AQ}=5:9$

6. △ABC 中，已知 $\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=8$，$\overline{CA}=9$，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$______。

答案：-16

解析：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})=-|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos B$

$$=-\frac{|\overrightarrow{BA}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2}{2}=-\frac{1}{2}(49+64-81)$$

$=-16$。

7. 於△ABC 中，$\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$______。（以 a，b，c 表之）

答案：$\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$

解析：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC$

$$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2}{2|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}$$

$=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$

8. 設 $|\vec{u}|=2$，$|\vec{v}|=3$，且 $|\vec{u}|$ 與 $|\vec{v}|$ 之間的夾角為 $120°$，求向量 $3\vec{u}-2\vec{v}$ 的長度為______。

答案：$6\sqrt{3}$

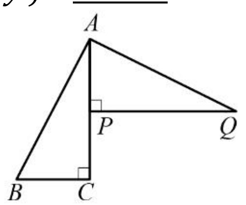
解析：$\vec{u}\cdot\vec{v}=2\times3\times\cos120°=-3$

$\therefore |3\vec{u}-2\vec{v}|^2=9\times4+4\times9-12(-3)$

$=108$

$\therefore |3\vec{u}-2\vec{v}|=6\sqrt{3}$

9. 附圖中 $\angle APQ=\angle ACB=90°$，$\overline{BC}=\overline{PA}=1$，$\overline{AC}=\overline{PQ}=2$，若 $\overrightarrow{CQ}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AQ}$，求數對 $(x,y)=$______。



答案：$(\frac{-4}{5}，\frac{3}{5})$

解析：$\triangle ABC \cong \triangle QAP$

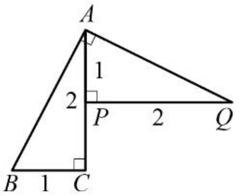
$\therefore \angle BAQ = 90°$

定坐標系 $P(0,0)$，$Q(2,0)$，$A(0,1)$，$C(0,-1)$，$B(-1,-1)$

$\overrightarrow{CQ}=(2,1)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,-2)$，$\overrightarrow{AQ}=(2,-1)$

$(2,1)=x(-1,-2)+y(2,-1) \Rightarrow \begin{cases} -x+2y=2 \\ -2x-y=1 \end{cases}$

$\therefore x=-\frac{4}{5}$，$y=\frac{3}{5}$

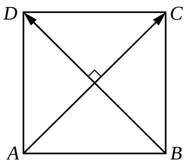


10. 正方形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=2$，試求 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$________。

答案：0

解析：$\because \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$，如附圖

$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$



11. $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=3$，$\angle BAC=60°$，則 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=$______。

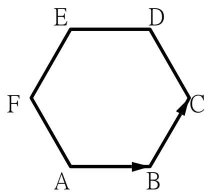
答案：$\sqrt{19}$

解析：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=3$；

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=19$，則 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=\sqrt{19}$

12. 如附圖所示，正六邊形 $ABCDEF$ 中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，則



(1) $\overrightarrow{AF}=$______。

(2) $\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{AE}=$______。（試以 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示之）

答案：(1) $\vec{b}-\vec{a}$；(2) $\vec{b}-2\vec{a}$

解析：(1) $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

$=-\vec{a}+\vec{b}$。

(2) $\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CE}$

$=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BC}$

$=2(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})-\overrightarrow{BC}$

$=-2\vec{a}+\vec{b}$。

13. 設$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}$與$\vec{b}$的夾角為$120°$，t為實數，若$t=\alpha$時，$\vec{a}+(t+1)\vec{b}$與$-\vec{a}+t\vec{b}$之內積有最小值m，求數對$(\alpha,m)=$______。

答案：$(-\frac{1}{2},-7)$

解析：$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2\times\cos 120°=-3$，

$[\vec{a}+(t+1)\vec{b}]\cdot[-\vec{a}+t\vec{b}]$

$=-|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+(t^2+t)|\vec{b}|^2$

$=-9+3+4(t^2+t)$

$=4(t+\frac{1}{2})^2-7$，

$\therefore$ $t=-\frac{1}{2}$時，有最小值-7，

得$(\alpha,m)=(-\frac{1}{2},-7)$。

14. 設A，B，C三點不共線，x，y為實數，若$x\overrightarrow{AB}+(y+1)\overrightarrow{BC}+(x-y+3)\overrightarrow{CA}=\vec{0}$，求數對$(x,y)=$______。

答案：$(4,3)$

解析：$x\overrightarrow{AB}+(y+1)(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-(x-y+3)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$，

$(x-y-1)\overrightarrow{AB}+(-x+2y-2)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$，

$\Rightarrow \begin{cases}x-y-1=0\\-x+2y-2=0\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$。

15. 設a、b、c、d為實數，$a^2+b^2=2$，$4c^2+b^2=9$，若$ad-2bc$之最大值為M，最小值為m，則$(M,m)=$______。

答案：$(3\sqrt{2},-3\sqrt{2})$

解析：$(a^2+b^2)(d^2+(-2c)^2)\geq(ad-2bc)^2$

$\Rightarrow 2\times9\geq(ad-2bc)^2$

$\Rightarrow -3\sqrt{2}\leq ad-2bc\leq3\sqrt{2}$

$\therefore(M,m)=(3\sqrt{2},-3\sqrt{2})$

16. 設$\vec{a}=(x,1)$，$\vec{b}=(3,y)$，$x,y\in\mathbb{R}$，且$x^2+y^2=10$，則$\vec{a}\cdot\vec{b}$的最小值為________。

答案：-10

解析：$\vec{a}\cdot\vec{b}=3x+y$，由柯西不等式，

得$(x^2+y^2)(3^2+1^2)\geq(3x+y)^2$

$\Rightarrow 10\times10\geq(3x+y)^2\Rightarrow -10\leq3x+y\leq10$

$\Rightarrow -10\leq\vec{a}\cdot\vec{b}\leq10$

$\therefore$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$的最小值為-10

17. 設$\triangle ABC$的三邊長分別為$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=6$，求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$______。

答案：$-\frac{5}{2}$

解析：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})=-|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos B$

$=-\frac{1}{2}(|\overrightarrow{BA}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2)$

$=-\frac{1}{2}(16+25-36)=-\frac{5}{2}$。

18. 若點 $A(3,-2)$，$B(x,4)$，且 $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{10}$，則 $x=$________。

答案：5 或 1

解析：$|\overrightarrow{AB}|=(x-3,6)$

$\Rightarrow|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x-3)^2+36}=2\sqrt{10}=\sqrt{40}$

$\Rightarrow(x-3)^2+36=40\Rightarrow(x-3)^2=4\Rightarrow x-3=\pm2$

$\Rightarrow x=5$ 或 1。

19. 設 O 為坐標平面上的原點，P 點坐標為 $(2,1)$，若 A,B 分別是正 x 軸及正 y 軸上的點，使得 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$，求 $\frac{2}{\overline{OA}}+\frac{4}{\overline{OB}}$ 的最小值是______。

答案：$\frac{16}{5}$

解析：設 $A(a,0),B(0,b)$，其中 $a>0$，$b>0$，

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(a-2,-1)\cdot(-2,b-1)=0\Rightarrow 2a+b=5$，

$\frac{2}{\overline{OA}}+\frac{4}{\overline{OB}}=\frac{2}{a}+\frac{4}{b}$，由柯西不等式知

$\left[\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{4}{b}}\right)^2\right]\left[(\sqrt{2a})^2+(\sqrt{b})^2\right]\geq(2+2)^2$

$\Rightarrow\left(\frac{2}{a}+\frac{4}{b}\right)(2a+b)\geq16$，即 $\frac{2}{a}+\frac{4}{b}\geq\frac{16}{5}$，等號成立時 $\frac{\sqrt{\frac{2}{a}}}{\sqrt{2a}}=\frac{\sqrt{\frac{4}{b}}}{\sqrt{b}}$，即 $\frac{1}{a}=\frac{2}{b}$，

所以 $\frac{2}{\overline{OA}}+\frac{4}{\overline{OB}}$ 的最小值是 $\frac{16}{5}$，此時 $a=\frac{5}{4}$，$b=\frac{5}{2}$。

20. $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=4$，$\overline{CA}=3$，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$______。

答案：$-\frac{3}{2}$

解析：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A$

$=\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2}{2}$

$=\frac{1}{2}(4+9-16)=-\frac{3}{2}$。