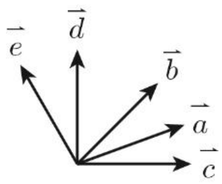
分數欄

113 學年度第一學期普高數學

老師：________ 班級：________ 座號：______ 姓名：__________

一、單一選擇題(共 0 分,每題 0 分)

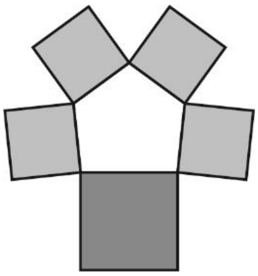
1. (E) 右圖為五個等長的向量，試問向量$\vec{c}$與下列哪一個向量的內積最小？



(A) $\vec{a}$　(B) $\vec{b}$　(C) $\vec{c}$　(D) $\vec{d}$　(E) $\vec{e}$

解析：$\because$ $\vec{c}$ 與 $\vec{e}$ 的夾角為鈍角，$\therefore$ $\vec{c}\cdot\vec{e}<0$，其內積為最小，故選(E)

2. (C) 如圖，有五個正方形的邊圍出一個中間為五邊形的圖案，其中有四個正方形的邊長相等，且中間的五邊形周長為 10。則五個正方形的面積總和的最小值為何？



(A)5　(B)10　(C)20　(D)25　(E)50

解析：設五個正方形的邊長分別為 x,x,x,x,y

依題意可知$4x+y=10$，求$4x^2+y^2$的最小值

根據柯西不等式得$[(2x)^2+y^2](2^2+1^2)\geq[(2x)\cdot 2+y\cdot 1]^2$

$\Rightarrow(4x^2+y^2)\times 5\geq(4x+y)^2=10^2\Rightarrow 4x^2+y^2\geq 20$，當$\dfrac{2x}{2}=\dfrac{y}{1}$時等號成立

令$x=y=t$，代入$4x+y=10\Rightarrow t=2$，即五個正方形面積總和的最小值為 20，故選(C)

3. (D) 設$A(2,-1),B(0,3)$， P為直線$x+y-4=0$上之動點，則$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$之最小值為何？

(A)0　(B)-1　(C)-2　(D)-3　(E)-4

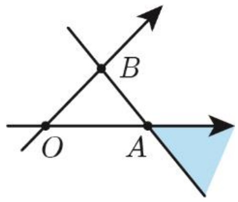
解析：設P點坐標為$(t,4-t)$，則$\overrightarrow{PA}=(2-t,t-5),\overrightarrow{PB}=(-t,t-1)$

因此$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(2-t)(-t)+(t-5)(t-1)=(-2t+t^2)+(t^2-6t+5)=2t^2-8t+5=2(t-2)^2-3$

當$t=2$時，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$有最小值為$-3$

故選(D)

4. (E) 如圖，兩射線$t>0$與OB交於O點，試問下列選項中哪一個向量之終點落在陰影區域內？



(A) $\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\sqrt{3}\overrightarrow{OB}$ (B) $-2\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}$ (C) $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}$

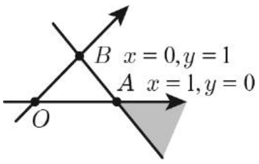
(D) $\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$ (E) $\sqrt{8}\overrightarrow{OA}-\sqrt{3}\overrightarrow{OB}$

解析：令陰影區域內之動點為 P ，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$

∵當 $x+y=1$時， P 會落在直線 AB 上

∴由圖形可知 $y\le 0, x+y\ge 1$

故選(E)



5. (E) 設 $O(0,0), A(3,-2), B(1,3)$，則 P 點的集合 $S=\{P\,|\,\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}, -1\le x\le 1, 0\le y\le 3\}$ 在坐標平面上的區域面積為何？ (A)6 (B)11 (C)22 (D)33 (E)66

解析：區域面積 $=\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 張出的平行四邊形面積 $\times 2\times 3$

$=\left|\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right|\times 6=(9+2)\times 6=66$ ，故選(E)

6. (B) 下列哪一個向量與直線 $\begin{cases}x=2-3t\\ y=1+2t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ 垂直？ (A) $\overrightarrow{a_1}=(-3,2)$ (B) $\overrightarrow{a_2}=(2,3)$ (C) $\overrightarrow{a_3}=(3,2)$ (D) $\overrightarrow{a_4}=(2,1)$ (E) $\overrightarrow{a_5}=(1,-2)$

解析：直線的方向向量為 $\vec{d}=(-3,2)$ 且 $(2,3)\cdot\vec{d}=-6+6=0$

∴所求之垂直向量為 $(2,3)$

故選(B)

7. (A) 直線 $L_1:\begin{cases}x=-1+2t\\ y=2+t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ 與直線 $L_2:\begin{cases}x=-2-t\\ y=-2+3t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ 的交點坐標為 $P(m,n)$ ，則 $m+n$ 為何？ (A) -2 (B) -1 (C)0 (D)1 (E)2

解析：設 $P(-1+2a, 2+a)=(-2-b, -2+3b)\Rightarrow\begin{cases}-1+2a=-2-b\\ 2+a=-2+3b\end{cases}$ ，解得 $(a,b)=(-1,1)$

因此交點 P 為 $(-2-1, -2+3)=(-3,1)\Rightarrow m+n=-3+1=-2$ ，故選(A)

8. (D) 設 $\vec{u}=(-7,1)$ ，直線 $L:3x-4y+1=0$ ，則 $\vec{u}$ 在 L 上之正射影為何？ (A) $(3,-4)$

(B) $(-3,4)$　(C) $(4,3)$　(D) $(-4,-3)$　(E) $(-2,\frac{-3}{2})$

解析：$\because$ L 之一法向量 $(3,-4)$，在 L 上取一方向向量 $\vec{v}=(4,3)$

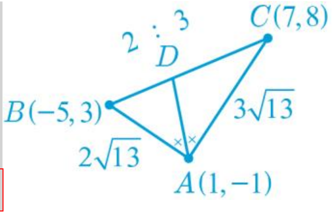
則 $\vec{u}$ 在 L 上之正射影 $=\vec{u}$ 在 $\vec{v}$ 上之正射影 $=(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2})\vec{v}=\frac{-28+3}{25}(4,3)=(-4,-3)$

故選(D)

二、多重選擇題(共 0 分,每題 0 分)

1. (AC D) $\triangle ABC$ 中，$A(1,-1),B(-5,3),C(7,8)$，$\angle A$ 之內角平分線交直線 BC 於 D，且 $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$，試選出正確的選項。　(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(0,13)$　(B) $2\overline{AB}=3\overline{AC}$　(C) $\overline{BD}:\overline{DC}=2:3$　(D) D 點坐標為 $(\frac{-1}{5},5)$　(E)四邊形 $ABEC$ 為菱形

解析：



(A)○：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(-6,4)+(6,9)=(0,13)$

(B)×：$|\overrightarrow{AB}|=|(-5-1,3-(-1))|=|(-6,4)|=2\sqrt{13}$

$|\overrightarrow{AC}|=|(7-1,8-(-1))|=|(6,9)|=3\sqrt{13}$

因此 $3\overline{AB}=2\overline{AC}$

(C)○：由內角平分線定理可知 $\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=2:3$

(D)○：$D=(\frac{3\times(-5)+2\times7}{5},\frac{3\times3+2\times8}{5})=(\frac{-1}{5},5)$

(E)×：$\because$ $3\overline{AB}=2\overline{AC}$，$\therefore$ $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ 平分 $\angle A$，

然而四邊形 $ABEC$ 邊長並不相等，$\therefore$四邊形 $ABEC$ 不為菱形

故選(A)(C)(D)

2. (AB E)關於直線 $L:\begin{cases}x=4-2t\\y=1+3t\end{cases},t\in\mathbb{R}$，下列哪些選項是正確的？ (A) L 的方向向量為 $(2,-3)$ (B) L 通過點 $(18,-20)$ (C) L 的斜率為 $\frac{3}{2}$ (D) L 的方程式為 $2x+3y=11$

(E) L 與直線 $L':\begin{cases}x=2+2t\\y=4-3t\end{cases},t\in\mathbb{R}$，是同一條直線

解析：$L:\begin{cases}x=4-2t\cdots\cdots ①\\y=1+3t\cdots\cdots ②\end{cases}$

① $\times 3+$ ② $\times 2$ 得 $3x+2y=14$

(A) ○：由參數式可知 L 的方向向量為 $(-2,3)//(2,-3)$

(B) ○：$x=18$ 代入 $3x+2y=14$ 得 $54+2y=14\Rightarrow y=-20$

因此，L 過點 $(18,-20)$

(C) ×：$\because$ L 的斜率為 $-\frac{3}{2}$

(D) ×

(E) ○：$L':\begin{cases}x=2+2t\cdots\cdots ①\\y=4-3t\cdots\cdots ②\end{cases}$，① $\times 3+$ ② $\times 2\Rightarrow 3x+2y=14$，可知 L' 與 L 相同

故選(A)(B)(E)

3. (BD)設 $A(2,5),B(-3,4),C(x,y)$，若 $G(4,-3)$ 為 $\triangle ABC$ 的重心，試選出正確的選項。

(A) $x=1,y=2$ (B) $\overrightarrow{AC}=(11,-23)$ (C) $|\overrightarrow{AC}|=26$ (D) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

(E) $|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}|=20$

解析：(A)×：$\because$ $G(4,-3)$ 為 $\triangle ABC$ 的重心

$\therefore 2+(-3)+x=3\times 4,5+4+y=3\times(-3)\Rightarrow x=13,\ y=-18$

(B)○(C)×：$\overrightarrow{AC}=(13-2,-18-5)=(11,-23),|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{11^2+(-23)^2}=5\sqrt{26}$

(D)○：$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ (重心性質)

(E)×：$|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}|=|-\overrightarrow{GC}|=|(-9,15)|=3\sqrt{34}$

故選(B)(D)

4. (AB DE)給定一方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$，試選出正確的選項。 (A)若 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$，則此方程組必有唯一解 (B)若 $c_1=c_2=0$，則此方程組必有解 (C)若 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$，則此方程組必有無限多組解 (D)若 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$，且 $c_1=c_2=0$，則此方程組必有無限多組解

(E)若$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$且$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\neq 0$，則此方程組必定無實數解

解析：(A)○

(B)○：至少有一解$(0,0)$

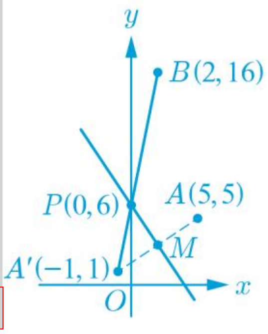
(C)×：$\Delta=0$可能無解

(D)○

(E)○

故選(A)(B)(D)(E)

5. (AC D)設一個撞球檯，其一邊在L上，已知$(0,6),(4,0)$在L上，白球由點$A(5,5)$打出去，碰撞檯邊P點，再折向撞擊B球，B球位置在點$(2,16)$，試選出正確的選項。 (A)直線L的斜率為$-\dfrac{3}{2}$ (B)直線L的法向量為$(2,-3)$ (C)過A點且垂直L的直線方程式為$2x-3y=-5$ (D)A點對L的對稱點為$(-1,1)$ (E)該白球由A經P到B所走的總路程為15



解析：

(A)○：$L:\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{6}=1\Rightarrow y=-\dfrac{3}{2}x+6\Rightarrow m_L=-\dfrac{3}{2}$

(B)×：$L:3x+2y=12$，法向量為$(3,2)$

(C)○：設$L_1:2x-3y=k$且$(5,5)\in L_1\Rightarrow k=2\times5-3\times5=-5$

$\therefore L_1:2x-3y=-5$

(D)○：設$\overleftrightarrow{AA'}:\begin{cases} x=5+3t \\ y=5+2t \end{cases},t\in\mathbb{R}$

設$M(5+3t,5+2t)\in L\Rightarrow 3(5+3t)+2(5+2t)=12\Rightarrow t=-1\Rightarrow M(2,3)$

由中點公式得知，A點對L的對稱點為$A'(-1,1)$

(E)×：$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}=\overline{A'B}=\sqrt{(-1-2)^2+(1-16)^2}=3\sqrt{26}$

故選(A)(C)(D)

6. (BD)試選出正確的選項。 (A)方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，不論$a_1,b_1,a_2,b_2$的值為多少，

$x=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$　(B)方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，若$c_1=c_2=0$，此方程組至少有一組解　(C)方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，當$c_1=c_2=0$時，此方程組有無限多解　(D)若方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y=1 \\ a_2x+b_2y=2 \end{cases}$無限多解，則方程組$\begin{cases} a_1x+a_2y=0 \\ b_1x+b_2y=0 \end{cases}$亦無限多解　(E)方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，若$a_1:a_2=b_1:b_2$，則此方程組無解

解析：(A)×：當$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$時，才成立
(B)○：至少有一組解$(0,0)$
(C)×：若$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$且$c_1=c_2=0$時，方程組恰有一組解
(D)○：∵$a_1b_2-a_2b_1=0$，又方程組$\begin{cases} a_1x+a_2y=0 \\ b_1x+b_2y=0 \end{cases}$至少有一組解$(0,0)$，∴有無限多解
(E)×：$a_1b_2-a_2b_1=0$時，有可能無限多解
故選(B)(D)

7. (DE)已知$\vec{a}$與$\vec{b}$為非零向量，且$\vec{a}\neq\vec{b}$，則下列哪些向量必可平分$\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角？
(A)$\vec{a}+\vec{b}$　(B)$\vec{a}-\vec{b}$　(C)$|\vec{a}|\vec{a}+|\vec{b}|\vec{b}$　(D)$|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}$　(E)$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

解析：當$\vec{a}$與$\vec{b}$長度相同時，$\vec{a}+\vec{b}$可平分$\vec{a}$與$\vec{b}$的夾角

(A)(B)(C) ×

(D) ○：∵$|\vec{b}|\vec{a}$的長度$=|\vec{b}||\vec{a}|$，$|\vec{a}|\vec{b}$的長度$=|\vec{a}||\vec{b}|$

∴$|\vec{b}|\vec{a}$與$|\vec{a}|\vec{b}$的長度相同

因此，$|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}$平分$|\vec{b}|\vec{a}$與$|\vec{a}|\vec{b}$之夾角

$\Rightarrow|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}$平分$\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角

(E) ○：∵$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$的長度$=\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|}=1$，$\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$的長度$=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{b}|}=1$

$\therefore \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 與 $\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 長度相同

因此，$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 平分 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 與 $\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 之夾角

$\Rightarrow \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 平分 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角

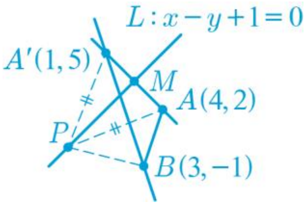
故選(D)(E)

三、填充題(共 0 分,每題 0 分)

1. 設一直線 L 的參數式為 $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ ，及兩點 $A(4,2), B(3,-1)$ ，若 P 點為直線 L 上移動之動點，則 $\triangle PAB$ 的周長之最小值為_____ 。

答案：$3\sqrt{10}$

解析：$L:\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \end{cases}, t\in\mathbb{R} \Rightarrow x-y+1=0$



A 對 L 作對稱得對稱點 $A'(a,b)$

則 $\overleftrightarrow{AA'}\perp L$ ，又 $m_L=1$，故 $m_{\overleftrightarrow{AA'}}=-1$ ，又過 $A(4,2)$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{AA'}: y-2=-(x-4) \Rightarrow x+y-6=0$

故 $\overleftrightarrow{AA'}$ 中點 $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-6=0 \end{cases} \Rightarrow M(\dfrac{5}{2},\dfrac{7}{2}) \Rightarrow (\dfrac{a+4}{2},\dfrac{b+2}{2})=(\dfrac{5}{2},\dfrac{7}{2}) \Rightarrow A'(1,5)$

$\therefore \triangle PAB$ 的周長為 $\overline{AB}+\overline{AP}+\overline{PB}\geq \overline{AB}+\overline{A'B}$

故有最小周長 $\overline{AB}+\overline{A'B}=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}+\sqrt{2^2+(-6)^2}=\sqrt{10}+\sqrt{40}=3\sqrt{10}$

2. 已知平面上兩點 $A(-3,-1), B(5,5)$ ， P 點是直線 $L: 2x-y+10=0$ 上的一個動點，則 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 的最小值為_____ 。

答案：90

解析：依題意可設 $P(t, 2t+10)$

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=[(t+3)^2+(2t+11)^2]+[(t-5)^2+(2t+5)^2]=10t^2+60t+180=10(t+3)^2+90$

$\therefore$ 當 $t=-3$ 時，$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 有最小值為 90，此時 $P(-3,4)$

<另解>

設 $M(1,2)$ 為 $A(-3,-1),B(5,5)$ 之中點，我們利用中線定理 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2\overline{PM}^2+\frac{1}{2}\overline{AB}^2$

$\because \overline{PM}\geq d(M,L)=\frac{|2\times1-2+10|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt5}$

$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PB}^2\geq 2(\frac{10}{\sqrt5})^2+\frac{1}{2}[\sqrt{(-3-5)^2+(-1-5)^2}]^2=90$

3. 若兩直線 $L_1:2x-y+7=0$ 與 $L_2:ax+4y+7=0$ 的其中一個夾角為 $135°$，則實數 $a=$_____。

答案：12 或 $-\frac{4}{3}$

解析：L_1 與 L_2 的交角為 $45°$ 與 $135° \Rightarrow \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\pm\cos45° \Rightarrow \frac{(2,-1)\cdot(a,4)}{\sqrt5\cdot\sqrt{a^2+16}}=\pm\frac{1}{\sqrt2}$

$\Rightarrow \frac{2a-4}{\sqrt5\cdot\sqrt{a^2+16}}=\pm\frac{1}{\sqrt2} \Rightarrow [\pm\sqrt2(2a-4)]^2=(\sqrt5\cdot\sqrt{a^2+16})^2 \Rightarrow 2(2a-4)^2=5(a^2+16)$

$\Rightarrow 3a^2-32a-48=0 \Rightarrow (a-12)(3a+4)=0 \Rightarrow a=12$ 或 $-\frac{4}{3}$

4. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=3\sqrt2, \overline{BC}=8, \overline{AC}=4\sqrt3$，若 O,H 分別為 $\triangle ABC$ 之外心及垂心，則

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=$_____。

答案：10

解析：O 為外心 $\Rightarrow \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AO}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\angle OAB=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{1}{2}\times(3\sqrt2)^2=9$

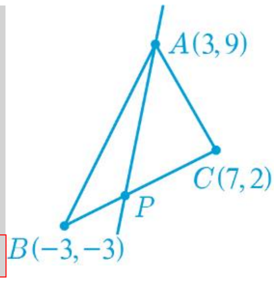
H 為垂心

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cdot\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2}{2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=1$

故 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=10$

5. 設 $A(3,9),B(-3,-3),C(7,2)$，若點 P 在 $\overline{BC}$ 上，且 $\triangle ABC$ 的面積為 $\triangle ABP$ 的 $\frac{5}{2}$ 倍，則 $\overleftrightarrow{AP}$ 的方程式為_____。

答案：$5x-y=6$

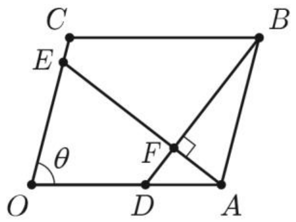
解析：

$\because \triangle ABC$ 的面積為 $\triangle ABP$ 的 $\dfrac{5}{2}$ 倍，$\therefore \overline{BP}:\overline{PC}=2:3$

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{5}(-3,-3)+\dfrac{2}{5}(7,2)=(1,-1)$，$\therefore P(1,-1)$

故 $\overleftrightarrow{AP}: y-9=\dfrac{9-(-1)}{3-1}(x-3)\Rightarrow 5x-y=6$

6. 如圖，四邊形 $OABC$ 為一平行四邊形。已知 $\overline{OA}=5, \overline{OC}=4, \cos\theta=\dfrac{1}{4}$，$\overline{OA}$ 邊上取一點 D，使得 $\overline{OD}=3$，並連接 $\overline{BD}$。若過 A 點對 $\overline{BD}$ 作垂線交 $\overline{BD}$ 於 F 點，並延長 $\overline{AF}$ 交 $\overline{OC}$ 於 E 點，則 $\overline{OE}$ 長度為_____。



答案：$\dfrac{10}{3}$

解析：設 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}, \vec{c}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$， E 在 $\overline{OC}$ 上，$\therefore$可設 $\overrightarrow{OE}=t\vec{c}$ ，其中 t 為實數

$\because \overline{OD}=3$ 且 $\overline{OA}=5$ ，$\therefore \overrightarrow{DA}=\dfrac{2}{5}\vec{a}$

因此 $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\vec{c}$ 且 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}=t\vec{c}-\vec{a}$

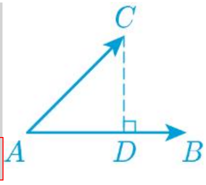
$\because \overline{BD}\perp\overline{AE}\Rightarrow \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AE}=0\Rightarrow(\dfrac{2}{5}\vec{a}+\vec{c})\cdot(t\vec{c}-\vec{a})=0\Rightarrow t|\vec{c}|^2+(\dfrac{2}{5}t-1)\vec{a}\cdot\vec{c}-\dfrac{2}{5}|\vec{a}|^2=0$

又 $\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta=5\times4\times\dfrac{1}{4}=5$ ，$\therefore 16t+(\dfrac{2}{5}t-1)5-\dfrac{2}{5}\cdot25=0\Rightarrow t=\dfrac{5}{6}$

因此，$\overline{OE}$ 長度為 $|\overrightarrow{OE}|=|t\vec{c}|=|t||\vec{c}|=\dfrac{5}{6}\times4=\dfrac{10}{3}$

7. 設 $A(1,-3), B(6,-1), C(7,11)$ 為坐標平面上三點，則 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影為__(1 0 , __，C 點在直線 AB 的垂足 D 之坐標為_____。

答案：(11,1)



解析：

$\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影為 $\left(\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2}\right)\overrightarrow{AB}=\dfrac{(6,14)\cdot(5,2)}{|(5,2)|^2}(5,2)=\dfrac{58}{29}(5,2)=(10,4)$

設 $D(x,y)$，$\overrightarrow{AD}=(x-1,y+3)=(10,4)\Rightarrow D(x,y)=(11,1)$

8. 設 $\vec{a}=(\sqrt{5},-\sqrt{7}),|\vec{b}|=4$，且 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 $150°$，則

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=$_____。 (2) $|\vec{a}-2\vec{b}|=$_____。

答案：(1) -12 (2) $2\sqrt{31}$

解析：(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos150°=\sqrt{12}\times4\times\dfrac{-\sqrt{3}}{2}=-12$

(2)

$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=12-4\times(-12)+4\times16=12+48+64=124$

$\Rightarrow|\vec{a}-2\vec{b}|=2\sqrt{31}$

9. 過點 $A(3,4)$ 且與直線 $L: x-\sqrt{3}y-2=0$ 夾角為 $60°$ 的直線方程式為_____。(有兩解)

答案：$x+\sqrt{3}y-3-4\sqrt{3}=0$ 或 $x=3$

解析：設所求直線斜率為 m，則 $m=\dfrac{y-4}{x-3}\Rightarrow mx-y-3m+4=0$

$\therefore\cos60°=\pm\dfrac{m+(-1)(-\sqrt{3})}{\sqrt{m^2+1}\sqrt{1+(-\sqrt{3})^2}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 4m^2+8\sqrt{3}m+12=4(m^2+1)$

$\Rightarrow m=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$(表示另一條直線斜率不存在)

故直線為 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{y-4}{x-3}\Rightarrow x+\sqrt{3}y-3-4\sqrt{3}=0$ 或 $x=3$

四、計算與證明題(共 0 分,每題 0 分)

1. 設 $\vec{a}=(a_1,a_2),\vec{b}=(b_1,b_2)$，$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張成之平行四邊形的面積為 3，則 $2\vec{a}+3\vec{b},3\vec{a}-2\vec{b}$ 兩向量所張成之平行四邊形的面積為何？

答案：依題意可知$\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right| = 3$

又 $2\vec{a}+3\vec{b}=(2a_1+3b_1, 2a_2+3b_2)$，$3\vec{a}-2\vec{b}=(3a_1-2b_1, 3a_2-2b_2)$

$\therefore$所求$=\left|\begin{vmatrix} 2a_1+3b_1 & 2a_2+3b_2 \\ 3a_1-2b_1 & 3a_2-2b_2 \end{vmatrix}\right|$

$=\left|\begin{vmatrix} 2a_1+3b_1 & 2a_2+3b_2 \\ \frac{-13}{2}b_1 & \frac{-13}{2}b_2 \end{vmatrix}\right|$（第 1 列乘以 $(-\frac{3}{2})$ 加到第 2 列）

$=\frac{13}{2}\left|\begin{vmatrix} 2a_1+3b_1 & 2a_2+3b_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$（第 2 列提出 $(-\frac{13}{2})$）

$=\frac{13}{2}\left|\begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$（第 2 列乘以 (-3) 加到第 1 列）

$=13\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$（第 1 列提出 2）

$=13\times 3=39$

2. 已知平面上三點 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$，且 $\triangle ABC$ 的面積為 2，若 $P(3x_1, 2y_1-x_1)$、$Q(3x_2, 2y_2-x_2)$、$R(3x_3, 2y_3-x_3)$，則 $\triangle PQR$ 的面積為何？

答案：$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$, $\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1, y_3-y_1)$

$\therefore \triangle ABC$ 面積$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right|=2 \Rightarrow \left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right|=4$

$\overrightarrow{PQ}=(3x_2-3x_1, 2y_2-x_2-2y_1+x_1)=(3(x_2-x_1), 2(y_2-y_1)-(x_2-x_1))$

$\overrightarrow{PR}=(3x_3-3x_1, 2y_3-x_3-2y_1+x_1)=(3(x_3-x_1), 2(y_3-y_1)-(x_3-x_1))$

$\therefore \triangle PQR$ 面積$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3(x_2-x_1) & 2(y_2-y_1)-(x_2-x_1) \\ 3(x_3-x_1) & 2(y_3-y_1)-(x_3-x_1) \end{vmatrix}\right|$

$=\frac{3}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & 2(y_2-y_1)-(x_2-x_1) \\ x_3-x_1 & 2(y_3-y_1)-(x_3-x_1) \end{vmatrix}\right|$（第 1 行提出 3）

$=\frac{3}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & 2(y_2-y_1) \\ x_3-x_1 & 2(y_3-y_1) \end{vmatrix}\right|$（第 1 行乘以 1 加到第 2 行）

$=3\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right|$（第 2 行提出 2）

$=3\times 4=12$

3. 設$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=3$，求$\begin{vmatrix} 2a-b & 4a+5b \\ 2c-d & 4c+5d \end{vmatrix}$。

答案：所求$=\begin{vmatrix} 2a-b & 7b \\ 2c-d & 7d \end{vmatrix}$（第 1 行乘以 (-2) 加到第 2 行）

$$=7\begin{vmatrix} 2a-b & b \\ 2c-d & d \end{vmatrix}$$（第 2 行提出 7）

$$=7\begin{vmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{vmatrix}$$（第 2 行乘以 1 加到第 1 行）

$$=14\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$（第 1 行提出 2）

$$=14\cdot 3=42$$

4. 若方程組 $\begin{cases}(a-6)x+(a+1)y=0 \\ (a-10)x+a(a+1)y=a-2\end{cases}$ 無解，則 a 之值為何？

答案：令 $\Delta=\begin{vmatrix} a-6 & a+1 \\ a-10 & a(a+1) \end{vmatrix}=(a+1)\begin{vmatrix} a-6 & 1 \\ a-10 & a \end{vmatrix}=(a+1)(a^2-7a+10)=(a+1)(a-5)(a-2)$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 0 & a+1 \\ a-2 & a(a+1) \end{vmatrix}=(a+1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a-2 & a \end{vmatrix}=-(a+1)(a-2)$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a-6 & 0 \\ a-10 & a-2 \end{vmatrix}=(a-6)(a-2)$$

∴當 $a=5$ 或 -1 時，方程組無解

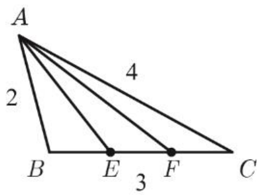
5. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=2,\overline{BC}=3,\overline{CA}=4$，且 E,F 為 $\overline{BC}$ 的三等分點，試求：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$。 (2) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$。

答案：(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=\cancel{2}\times\cancel{4}\times\dfrac{2^2+4^2-3^2}{2\times\cancel{2}\times\cancel{4}}=\dfrac{11}{2}$

(2) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC})\cdot(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC})=\dfrac{2}{9}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\dfrac{2}{9}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\dfrac{5}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$$=\frac{2}{9}\cdot 2^2+\frac{2}{9}\cdot 4^2+\frac{5}{9}\cdot\frac{11}{2}=\frac{135}{18}$$



6. 兩非零向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$，若其長度相等，且 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}|\vec{a}+\vec{b}|$，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角為幾度？

答案：設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角為 θ

依題意可得 $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\sqrt{3}|\vec{a}+\vec{b}|)^2$

$\Rightarrow|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=3(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b})$

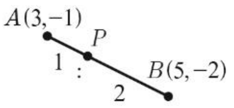
$\Rightarrow 2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2+8\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Rightarrow|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{-|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{4|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad (\because |\vec{a}| = |\vec{b}|)$$

$\therefore \theta = 120°$

7. 已知 $A(3,-1), B(5,-2)$ 為坐標平面上兩點，P 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{PB} = 1:2$，試求 P 點坐標。

答案：由分點公式可得 $P(\frac{1\cdot 5+2\cdot 3}{3}, \frac{1\cdot(-2)+2\cdot(-1)}{3}) = (\frac{11}{3}, \frac{-4}{3})$

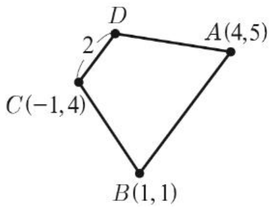


8. 梯形 $ABCD$ 中，$A(4,5), B(1,1), C(-1,4)$，$\overline{AB}$ 平行 $\overline{CD}$，且 $\overline{CD} = 2$，求 D 點的坐標。

答案：設 $D(x,y)$，$\because \overline{AB} = \sqrt{(4-1)^2+(5-1)^2} = 5$，$\therefore \overrightarrow{CD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$

$$\Rightarrow (x+1, y-4) = \frac{2}{5}(3,4) \Rightarrow x = \frac{1}{5}, y = \frac{28}{5}$$

因此，$D(\frac{1}{5}, \frac{28}{5})$



9. 若 $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$，且 $\begin{vmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ -2a+3c & -2b+3d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3c & d \\ 6a & 2b \end{vmatrix} = 21$，則 Δ 之值為何？

答案：$\begin{vmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ -2a+3c & -2b+3d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3c & d \\ 6a & 2b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \frac{13}{2}c & \frac{13}{2}d \\ -2a+3c & -2b+3d \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} c & d \\ 2a & 2b \end{vmatrix} = \frac{13}{2}\begin{vmatrix} c & d \\ -2a+3c & -2b+3d \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

$$= \frac{13}{2}\begin{vmatrix} c & d \\ -2a & -2b \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = 13\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 21$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$$

即 $\Delta = 3$

10. $\triangle ABC$ 中，滿足 $(x+2y-1)\overrightarrow{AB} + (3x-y+4)\overrightarrow{AC} + 7\overrightarrow{BC} = \vec{0}$，求數對 (x,y)。

答案：$(x+2y-1)\overrightarrow{AB} + (3x-y+4)\overrightarrow{AC} + 7(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

$\Rightarrow (x+2y-8)\overrightarrow{AB}+(3x-y+11)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\because$ $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 不平行，$\therefore \begin{cases} x+2y-8=0 \\ 3x-y+11=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$

$\therefore$數對 $(x,y)=(-2,5)$

11. 若方程組 $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ 恰有一組解為 $x=2, y=5$，則方程組 $\begin{cases} (2a+e)x+3by=4b-5e \\ (2c+f)x+3dy=4d-5f \end{cases}$ 的解 x,y 為何？

答案：令 $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \Delta_x=\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}, \Delta_y=\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$

依題意得 $\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=2 \Rightarrow \Delta_x=2\Delta, \dfrac{\Delta_y}{\Delta}=5 \Rightarrow \Delta_y=5\Delta$

考慮 $\begin{cases} (2a+e)x+3by=4b-5e \\ (2c+f)x+3dy=4d-5f \end{cases}$

令 $\Delta'=\begin{vmatrix} 2a+e & 3b \\ 2c+f & 3d \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}=6\Delta+3\Delta_x=12\Delta$

$\Delta_x'=\begin{vmatrix} 4b-5e & 3b \\ 4d-5f & 3d \end{vmatrix}=-15\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}=-15\Delta_x=-30\Delta$

$\Delta_y'=\begin{vmatrix} 2a+e & 4b-5e \\ 2c+f & 4d-5f \end{vmatrix}=8\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}-10\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}=8\Delta-10\Delta_y+4\Delta_x=-34\Delta$

$\therefore$方程組 $\begin{cases} (2a+e)x+3by=4b-5e \\ (2c+f)x+3dy=4d-5f \end{cases}$ 的解為 $x=\dfrac{\Delta_x'}{\Delta'}=\dfrac{-30\Delta}{12\Delta}=-\dfrac{5}{2}, y=\dfrac{\Delta_y'}{\Delta'}=\dfrac{-34\Delta}{12\Delta}=-\dfrac{17}{6}$

12. 設 $A(1,0), B(-1,2), C(3,k)$，其中 $k>0$，若△ABC 的面積為 5，則 k 之值為何？

答案：$\overrightarrow{AB}=(-2,2), \overrightarrow{AC}=(2,k)$

依題意可得△ ABC 面積 $=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix}\right|=5$

$\Rightarrow |-2k-4|=10 \Rightarrow 2k+4=10$ 或 $2k+4=-10$

$\Rightarrow k=3$ 或 $k=-7$（不合）

13. 設 $\vec{a}=(2,-3), \vec{b}=(2,3), \vec{c}=(-1,-3)$，試求：

(1) $|2\vec{a}-\vec{b}-2\vec{c}|$。

(2)若 $(t\vec{a}+\vec{b})$ 平行 $\vec{c}$，則 t 的值為何？

(3)若 $|\vec{a}+\lambda\vec{b}|$ 有最小值，則此時 λ 的值為何？

(4)若 $(\alpha\vec{a}+\vec{b})$ 在 $\vec{c}$ 上的正射影恰為 $\vec{c}$，則 α 的值為何？

答案：(1) $2\vec{a}-\vec{b}-2\vec{c}=2(2,-3)-(2,3)-2(-1,-3)=(4,-3)$

$\therefore |2\vec{a}-\vec{b}-2\vec{c}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

(2) $t\vec{a}+\vec{b}=t(2,-3)+(2,3)=(2t+2,-3t+3)//\vec{c}=(-1,-3)$

$\therefore \dfrac{2t+2}{-1}=\dfrac{-3t+3}{-3}\Rightarrow 6t+6=-3t+3\Rightarrow 9t=-3\Rightarrow t=-\dfrac{1}{3}$

(3) $|\vec{a}+\lambda\vec{b}|=|(2,-3)+\lambda(2,3)|=|(2+2\lambda,-3+3\lambda)|=\sqrt{(2+2\lambda)^2+(-3+3\lambda)^2}$

$=\sqrt{13\lambda^2-10\lambda+13}=\sqrt{13(\lambda-\dfrac{5}{13})^2+\dfrac{144}{13}}$

$\therefore$當 $\lambda=\dfrac{5}{13}$時，$|\vec{a}+\lambda\vec{b}|$有最小值

(4) $\alpha\vec{a}+\vec{b}=(2\alpha+2,-3\alpha+3)$

$\because (\alpha\vec{a}+\vec{b})$在 $\vec{c}$ 上的正射影為 $\vec{c}$

$\therefore [\dfrac{(\alpha\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}]\vec{c}=\vec{c}\Rightarrow \dfrac{(\alpha\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}=1\Rightarrow \dfrac{(2\alpha+2,-3\alpha+3)\cdot(-1,-3)}{10}=1$

$\therefore -2\alpha-2+9\alpha-9=10\Rightarrow 7\alpha=10+11\Rightarrow\alpha=3$

14. 設 x,y 為實數且 $x^2+y^2=26$，則 $3x+2y$ 的最大值為何？此時，數對 (x,y) 為何？

答案：由柯西不等式可得

$(x^2+y^2)(3^2+2^2)\ge(3x+2y)^2\Rightarrow 26\cdot13\ge(3x+2y)^2\Rightarrow 13\sqrt{2}\ge 3x+2y\ge-13\sqrt{2}$

$\therefore 3x+2y$ 最大值 $=13\sqrt{2}$

當 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2}\overset{令}{=}t$ 時有最大值 $\Rightarrow x=3t,y=2t$ 代入 $3x+2y=13\sqrt{2}$ 得

$13t=13\sqrt{2}\Rightarrow t=\sqrt{2}$，$\therefore x=3\sqrt{2},y=2\sqrt{2}$

即當 $(x,y)=(3\sqrt{2},2\sqrt{2})$ 時有最大值 $13\sqrt{2}$

15. 求下列各行列式之值：(1) $\begin{vmatrix}4&2\\3&1\end{vmatrix}$。(2) $\begin{vmatrix}2009&2006\\2007&2008\end{vmatrix}$。

答案：(1) 所求 $=4-6=-2$

(2) 所求 $=\begin{vmatrix}2009&-3\\2007&1\end{vmatrix}$（第 1 行乘以 (-1) 加到第 2 行）

$=\begin{vmatrix}2&-4\\2007&1\end{vmatrix}$（第 2 列乘以 (-1) 加到第 1 列）

$=2+4\cdot2007=8030$

五、混合題(共 0 分,每題 0 分)

1. 有一等腰 $\triangle ABC$，其底邊 $\overline{BC}$ 在直線 $x-y-10=0$ 上，兩腰中一腰 $\overline{AB}$ 在直線上

$2x+y-2=0$，另一腰 $\overline{AC}$ 經過 $P(5,7)$，試回答下列問題。

(1)試選出正確的選項。(10 分)

(A) 底邊 $\overline{BC}$ 和 $\overline{AB}$ 的夾角餘弦值為 $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$

(B) B 的坐標為 $(4,-6)$

(C) A 的坐標為 $(5,-12)$

(D) $\overline{BC}$ 的中點坐標為 $(\frac{17}{2},-\frac{3}{2})$

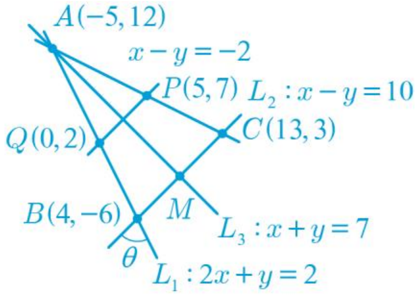
(E) C 的坐標為 $(13,3)$

答：_____。

(2)試求等腰 $\triangle ABC$ 兩腰 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 夾角之餘弦值。(6 分)

答案：(1)(B)(D)(E)　(2) $\frac{4}{5}$

解析：(1)依題意，如圖所示



(A)×：設 $L_1:2x+y-2=0$ 法向量為 $\vec{n_1}=(2,1)$，$L_2:x-y-10=0$ 法向量為 $\vec{n_2}=(1,-1)$

則底邊 $\overline{BC}$ 和 $\overline{AB}$ 的夾角餘弦值為 $\cos\theta=\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{1}{\sqrt{10}}$(取銳角)

(B)○：$L_1:2x+y-2=0$ 及 $L_2:x-y-10=0$ 之交點即為 B 點，坐標為 $(4,-6)$

(C)×：過 P 點作平行底邊 $\overline{BC}$ 的直線，交 $\overline{AB}$ 於 Q 點

$\therefore \overleftrightarrow{PQ}:x-y+2=0$，且 Q 點坐標為 $(0,2)$

作 $\overline{PQ}$ 之中垂線 L_3，分別交 L_1 及 L_2 於 A,M 兩點

$\therefore L_3:x+y=7$，A 點坐標為 $(-5,12)$

(D)○：$\because \triangle ABC$ 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\therefore M$ 點為 $\overline{BC}$ 之中點，其坐標為 $(\frac{17}{2},-\frac{3}{2})$

(E)○：由中點公式得 C 的坐標為 $(13,3)$

(2)由(1)得知 A 點坐標為 $(-5,12)$ 且 C 的坐標為 $(13,3)$

$\therefore \overleftrightarrow{AC}$ 方程式為 $x+2y-19=0$ 法向量為 $\vec{n}=(1,2)$

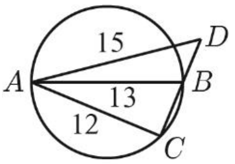
$\therefore \overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 夾角之餘弦值 $=\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n}}{|\vec{n_1}||\vec{n}|}=\frac{4}{5}$

<另解>

由(1)得知，$\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 夾角之餘弦值為

$$\cos(180^\circ-2\theta)=-\cos 2\theta=-(2\cos^2\theta-1)=-(2\times\frac{1}{10}-1)=\frac{4}{5}$$

2. 如圖所示，以長度 13 的線段 AB 為直徑作一圓，於此圓上取一點 C 使得 $\overline{AC}=12$，並於點 C 向點 B 的射線上取一點 D，使得 $\overline{AD}=15$。



(1) 試選出正確的選項。(10 分)

(A) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ (B) $\overline{BC}=5$ (C) $\overline{BD}=4$

(D) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}>\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$ (E) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=156$

答：_____。

(2) 內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$ 之值為_____。(6 分)

答案：(1)(A)(B)(C) (2)20

解析：(1)(A)○：$\because \angle ACD=90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

(B)(C)○：$\overline{BC}=5, \overline{CD}=9, \overline{BD}=\overline{CD}-\overline{BC}=9-5=4$

(D)(E)×：$\because \angle ACD=90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=12\times 12=144$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overline{CB}\times\overline{BD}=5\times 4=20$