

113 學年度第一學期普高數學

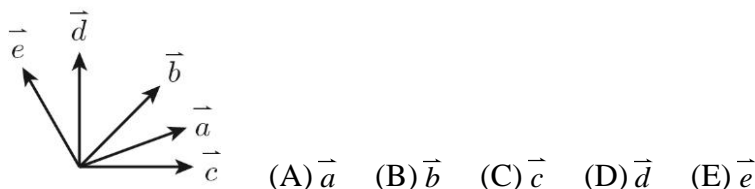
分數欄

老師：_____ 班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

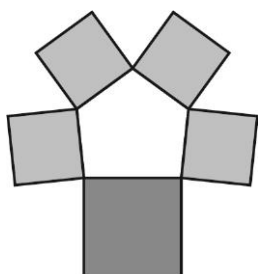


一、單一選擇題(共 0 分,每題 0 分)

1. () 右圖為五個等長的向量，試問向量 \vec{c} 與下列哪一個向量的內積最小？



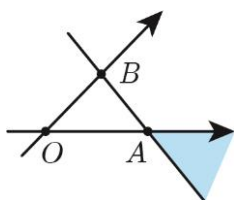
2. () 如圖，有五個正方形的邊圍出一個中間為五邊形的圖案，其中有四個正方形的邊長相等，且中間的五邊形周長為 10。則五個正方形的面積總和的最小值為何？



(A) 5 (B) 10 (C) 20 (D) 25 (E) 50

3. () 設 $A(2, -1), B(0, 3)$ ， P 為直線 $x + y - 4 = 0$ 上之動點，則 $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$ 之最小值為何？
(A) 0 (B) -1 (C) -2 (D) -3 (E) -4

4. () 如圖，兩射線 $t > 0$ 與 OB 交於 O 點，試問下列選項中哪一個向量之終點落在陰影區域內？



(A) $\frac{3}{2}\vec{OA} + \sqrt{3}\vec{OB}$ (B) $-2\vec{OA} + 5\vec{OB}$ (C) $\frac{1}{2}\vec{OA} - 2\vec{OB}$
(D) $\frac{3}{5}\vec{OA} - \frac{3}{2}\vec{OB}$ (E) $\sqrt{8}\vec{OA} - \sqrt{3}\vec{OB}$

5. () 設 $O(0,0), A(3,-2), B(1,3)$ ，則 P 點的集合 $S = \{P \mid \vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB}, -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3\}$ 在坐標平面上的區域面積為何？ (A) 6 (B) 11 (C) 22 (D) 33 (E) 66

6. () 下列哪一個向量與直線 $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ 垂直？ (A) $\vec{a}_1 = (-3, 2)$ (B) $\vec{a}_2 = (2, 3)$
(C) $\vec{a}_3 = (3, 2)$ (D) $\vec{a}_4 = (2, 1)$ (E) $\vec{a}_5 = (1, -2)$

7. () 直線 $L_1: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ 與直線 $L_2: \begin{cases} x = -2 - t \\ y = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ 的交點坐標為 $P(m, n)$ ，則 $m + n$ 為何？ (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

8. () 設 $\vec{u} = (-7, 1)$ ，直線 $L: 3x - 4y + 1 = 0$ ，則 \vec{u} 在 L 上之正射影為何？ (A) $(3, -4)$
 (B) $(-3, 4)$ (C) $(4, 3)$ (D) $(-4, -3)$ (E) $(-2, \frac{-3}{2})$

二、多重選擇題(共 0 分,每題 0 分)

1. () $\triangle ABC$ 中， $A(1, -1), B(-5, 3), C(7, 8)$ ， $\angle A$ 之內角平分線交直線 BC 於 D ，且 $\vec{AE} = 3\vec{AB} + 2\vec{AC}$ ，試選出正確的選項。 (A) $\vec{AB} + \vec{AC} = (0, 13)$ (B) $2\vec{AB} = 3\vec{AC}$
 (C) $\overline{BD} : \overline{DC} = 2 : 3$ (D) D 點坐標為 $(\frac{-1}{5}, 5)$ (E) 四邊形 $ABEC$ 為菱形
2. () 關於直線 $L: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ ，下列哪些選項是正確的？ (A) L 的方向向量為 $(2, -3)$ (B) L 通過點 $(18, -20)$ (C) L 的斜率為 $\frac{3}{2}$ (D) L 的方程式為 $2x + 3y = 11$
 (E) L 與直線 $L': \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ ，是同一條直線
3. () 設 $A(2, 5), B(-3, 4), C(x, y)$ ，若 $G(4, -3)$ 為 $\triangle ABC$ 的重心，試選出正確的選項。
 (A) $x = 1, y = 2$ (B) $\vec{AC} = (11, -23)$ (C) $|\vec{AC}| = 26$ (D) $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$
 (E) $|\vec{GA} + \vec{GB}| = 20$
4. () 給定一方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ ，試選出正確的選項。 (A) 若 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ，則此方程組必有唯一解 (B) 若 $c_1 = c_2 = 0$ ，則此方程組必有解 (C) 若 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ ，則此方程組必有無限多組解 (D) 若 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ ，且 $c_1 = c_2 = 0$ ，則此方程組必有無限多組解
 (E) 若 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ 且 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ，則此方程組必定無實數解
5. () 設一個撞球檯，其一邊在 L 上，已知 $(0, 6), (4, 0)$ 在 L 上，白球由點 $A(5, 5)$ 打出去，碰撞檯邊 P 點，再折向撞擊 B 球， B 球位置在點 $(2, 16)$ ，試選出正確的選項。 (A) 直線 L 的斜率為 $-\frac{3}{2}$ (B) 直線 L 的法向量為 $(2, -3)$ (C) 過 A 點且垂直 L 的直線方程式為 $2x - 3y = -5$ (D) A 點對 L 的對稱點為 $(-1, 1)$ (E) 該白球由 A 經 P 到 B 所走的總路程為 15
6. () 試選出正確的選項。 (A) 方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ ，不論 a_1, b_1, a_2, b_2 的值為多少，

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{(B) 方程組} \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \text{ 若 } c_1 = c_2 = 0, \text{ 此方程組至少}$$

有一組解 (C) 方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, 當 $c_1 = c_2 = 0$ 時, 此方程組有無限多解 (D)

若方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y = 1 \\ a_2x + b_2y = 2 \end{cases}$ 無限多解, 則方程組 $\begin{cases} a_1x + a_2y = 0 \\ b_1x + b_2y = 0 \end{cases}$ 亦無限多解 (E) 方程組

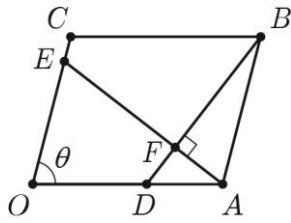
$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, 若 $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$, 則此方程組無解

7. () 已知 \vec{a} 與 \vec{b} 為非零向量, 且 $\vec{a} \neq \vec{b}$, 則下列哪些向量必可平分 \vec{a} 與 \vec{b} 之夾角?

(A) $\vec{a} + \vec{b}$ (B) $\vec{a} - \vec{b}$ (C) $|\vec{a}|\vec{a} + |\vec{b}|\vec{b}$ (D) $|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}$ (E) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

三、填充題(共 0 分,每題 0 分)

- 設一直線 L 的參數式為 $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, 及兩點 $A(4, 2), B(3, -1)$, 若 P 點為直線 L 上移動之動點, 則 $\triangle PAB$ 的周長之最小值為_____。
- 已知平面上兩點 $A(-3, -1), B(5, 5)$, P 點是直線 $L: 2x - y + 10 = 0$ 上的一個動點, 則 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 的最小值為_____。
- 若兩直線 $L_1: 2x - y + 7 = 0$ 與 $L_2: ax + 4y + 7 = 0$ 的其中一個夾角為 135° , 則實數 $a =$ _____。
- $\triangle ABC$ 中, $\overline{AB} = 3\sqrt{2}, \overline{BC} = 8, \overline{AC} = 4\sqrt{3}$, 若 O, H 分別為 $\triangle ABC$ 之外心及垂心, 則 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____。
- 設 $A(3, 9), B(-3, -3), C(7, 2)$, 若點 P 在 \overline{BC} 上, 且 $\triangle ABC$ 的面積為 $\triangle ABP$ 的 $\frac{5}{2}$ 倍, 則 \overline{AP} 的方程式為_____。
- 如圖, 四邊形 $OABC$ 為一平行四邊形。已知 $\overline{OA} = 5, \overline{OC} = 4, \cos \theta = \frac{1}{4}$, \overline{OA} 邊上取一點 D , 使得 $\overline{OD} = 3$, 並連接 \overline{BD} 。若過 A 點對 \overline{BD} 作垂線交 \overline{BD} 於 F 點, 並延長 \overline{AF} 交 \overline{OC} 於 E 點, 則 \overline{OE} 長度為_____。



7. 設 $A(1, -3), B(6, -1), C(7, 11)$ 為坐標平面上三點，則 \overrightarrow{AC} 在 \overrightarrow{AB} 上的正射影為 $\underline{\quad(10, \quad)}$ ， C 點在直線 AB 的垂足 D 之坐標為 $\underline{\quad}$ 。
8. 設 $\vec{a} = (\sqrt{5}, -\sqrt{7}), |\vec{b}| = 4$ ，且 \vec{a} 與 \vec{b} 的夾角為 150° ，則
- (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{\quad}$ 。 (2) $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \underline{\quad}$ 。
9. 過點 $A(3, 4)$ 且與直線 $L: x - \sqrt{3}y - 2 = 0$ 夾角為 60° 的直線方程式為 $\underline{\quad}$ 。(有兩解)

四、計算與證明題(共 0 分,每題 0 分)

- 設 $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ ， \vec{a} 與 \vec{b} 所張成之平行四邊形的面積為 3，則 $2\vec{a} + 3\vec{b}, 3\vec{a} - 2\vec{b}$ 兩向量所張成之平行四邊形的面積為何？
- 已知平面上三點 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ ，且 $\triangle ABC$ 的面積為 2，若 $P(3x_1, 2y_1 - x_1), Q(3x_2, 2y_2 - x_2), R(3x_3, 2y_3 - x_3)$ ，則 $\triangle PQR$ 的面積為何？
- 設 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$ ，求 $\begin{vmatrix} 2a-b & 4a+5b \\ 2c-d & 4c+5d \end{vmatrix}$ 。
- 若方程組 $\begin{cases} (a-6)x + (a+1)y = 0 \\ (a-10)x + a(a+1)y = a-2 \end{cases}$ 無解，則 a 之值為何？
- $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 2, \overline{BC} = 3, \overline{CA} = 4$ ，且 E, F 為 \overline{BC} 的三等分點，試求：
 - $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 。
 - $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 。
- 兩非零向量 \vec{a} 與 \vec{b} ，若其長度相等，且 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a} + \vec{b}|$ ，則 \vec{a} 與 \vec{b} 之夾角為幾度？
- 已知 $A(3, -1), B(5, -2)$ 為坐標平面上兩點， P 在 \overline{AB} 上，且 $\overline{AP} : \overline{PB} = 1 : 2$ ，試求 P 點坐標。
- 梯形 $ABCD$ 中， $A(4, 5), B(1, 1), C(-1, 4)$ ， \overline{AB} 平行 \overline{CD} ，且 $\overline{CD} = 2$ ，求 D 點的坐標。
- 若 $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ，且 $\begin{vmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ -2a+3c & -2b+3d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3c & d \\ 6a & 2b \end{vmatrix} = 21$ ，則 Δ 之值為何？
- $\triangle ABC$ 中，滿足 $(x+2y-1)\overrightarrow{AB} + (3x-y+4)\overrightarrow{AC} + 7\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ ，求數對 (x, y) 。
- 若方程組 $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ 恰有一組解為 $x=2, y=5$ ，則方程組 $\begin{cases} (2a+e)x+3by=4b-5e \\ (2c+f)x+3dy=4d-5f \end{cases}$ 的解 x, y 為何？
- 設 $A(1, 0), B(-1, 2), C(3, k)$ ，其中 $k > 0$ ，若 $\triangle ABC$ 的面積為 5，則 k 之值為何？

13. 設 $\vec{a}=(2,-3), \vec{b}=(2,3), \vec{c}=(-1,-3)$ ，試求：
- (1) $|2\vec{a}-\vec{b}-2\vec{c}|$ 。
 - (2) 若 $(t\vec{a}+\vec{b})$ 平行 \vec{c} ，則 t 的值為何？
 - (3) 若 $|\vec{a}+\lambda\vec{b}|$ 有最小值，則此時 λ 的值為何？
 - (4) 若 $(\alpha\vec{a}+\vec{b})$ 在 \vec{c} 上的正射影恰為 \vec{c} ，則 α 的值為何？
14. 設 x, y 為實數且 $x^2+y^2=26$ ，則 $3x+2y$ 的最大值為何？此時，數對 (x, y) 為何？
15. 求下列各行列式之值：(1) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ 。(2) $\begin{vmatrix} 2009 & 2006 \\ 2007 & 2008 \end{vmatrix}$ 。

五、混合題(共 0 分,每題 0 分)

1. 有一等腰 $\triangle ABC$ ，其底邊 \overline{BC} 在直線 $x-y-10=0$ 上，兩腰中一腰 \overline{AB} 在直線上 $2x+y-2=0$ ，另一腰 \overline{AC} 經過 $P(5,7)$ ，試回答下列問題。

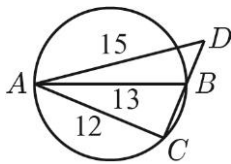
(1) 試選出正確的選項。(10 分)

- (A) 底邊 \overline{BC} 和 \overline{AB} 的夾角餘弦值為 $\pm \frac{1}{\sqrt{10}}$
- (B) B 的坐標為 $(4, -6)$
- (C) A 的坐標為 $(5, -12)$
- (D) \overline{BC} 的中點坐標為 $(\frac{17}{2}, -\frac{3}{2})$
- (E) C 的坐標為 $(13, 3)$

答：_____。

(2) 試求等腰 $\triangle ABC$ 兩腰 \overline{AB} 和 \overline{AC} 夾角之餘弦值。(6 分)

2. 如圖所示，以長度 13 的線段 AB 為直徑作一圓，於此圓上取一點 C 使得 $\overline{AC}=12$ ，並於點 C 向點 B 的射線上取一點 D ，使得 $\overline{AD}=15$ 。



(1) 試選出正確的選項。(10 分)

- (A) $\vec{AC} \cdot \vec{CD} = 0$ (B) $\overline{BC} = 5$ (C) $\overline{BD} = 4$
- (D) $\vec{AC} \cdot \vec{AD} > \vec{AC} \cdot \vec{AB}$ (E) $\vec{AC} \cdot \vec{AD} = 156$

答：_____。

(2) 內積 $\vec{AB} \cdot \vec{BD}$ 之值為_____。(6 分)