10 二元一次聯立方程式

教學流程圖

二元一次聯立方程式

↓

消去法 → 1. 加減消去法（複習國中）

↓

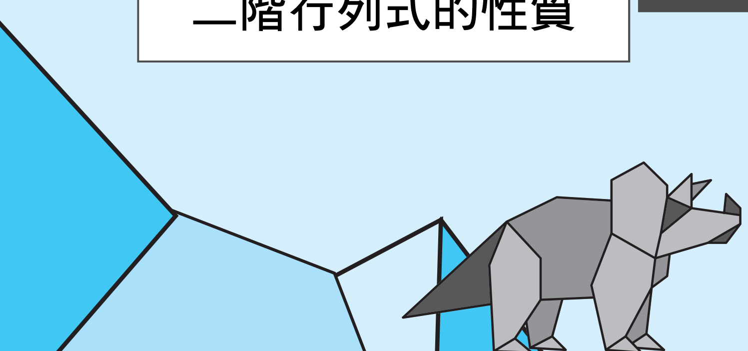
克拉瑪公式 → 1. 克拉瑪公式求解

↓

二元一次聯立方程式的幾何意義 → 1. 二元一次聯立方程式的解與兩直線的相交情形

↓

二階行列式的性質 →
1. 二階行列式的運算性質
2. 向量線性組合與聯立方程式的解
3. 向量線性組合與平行四邊形面積



10 二元一次聯立方程式

主題一 消去法

配合課本 P.190～P.192

1. 利用消去法解聯立方程式：

例如：$\begin{cases}2x+3y=5\cdots\cdots① \\ 3x-y=13\cdots\cdots②\end{cases}$

①＋②×3 得 $11x=44$，所以 $x=4$，代入①得 $y=-1$，故數對 $(x,y)=(4,-1)$。

題型 1 消去法（恰有一解）

範例 1 【配合課本例 1】

設 x，y 為實數且 $(5x+7y+3)^2+(7x+9y+5)^2=0$，則 $\dfrac{x}{y}$ 的值為______。

解

由題意知 $\begin{cases}5x+7y+3=0\cdots\cdots① \\ 7x+9y+5=0\cdots\cdots②\end{cases}$

①×9－②×7 得 $-4x-8=0$，所以 $x=-2$，代入①得 $y=1$，

故 $\dfrac{x}{y}=-2$。

範例 2 【配合課本例 1】

設兩聯立方程式$\begin{cases}x+ay=4\\2x+by=a\end{cases}$與$\begin{cases}3x-y=7\\2x-ay=5\end{cases}$的解相同且恰有一組解，則

(1)方程組的解$(x,y)=$______。

(2)數對$(a,b)=$______。

解

(1) 原式：$\begin{cases}x+ay=4\cdots\cdots①\\2x+by=a\cdots\cdots②\end{cases}$，$\begin{cases}3x-y=7\cdots\cdots③\\2x-ay=5\cdots\cdots④\end{cases}$

①+④得$3x=9$，所以$x=3$，代入③

得$9-y=7$，所以$y=2$，故數對$(x,y)=(3,2)$。

(2) 將$(x,y)=(3,2)$代入②，④中

得$\begin{cases}6+2b=a\\6-2a=5\end{cases}\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{11}{4}$，故數對$(a,b)=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{11}{4}\right)$。

類題 1

設聯立方程式$\begin{cases}2x-ay=1\\x-2y=2\end{cases}$的解$x$，$y$均為正數，則實數$a$的值可能為何？（多選）

(1)-2 (2)2 (3)4 (4)8 (5)1000

解 $\begin{cases}2x-ay=1\cdots\cdots①\\x-2y=2\cdots\cdots②\end{cases}$

①×2－②×a 得$(4-a)x=2-2a\Rightarrow x=\dfrac{2a-2}{a-4}>0$，

所以$(2a-2)(a-4)>0\Rightarrow a>4$或$a<1\cdots\cdots③$

又$x=\dfrac{2a-2}{a-4}$代入②得$y=\dfrac{3}{a-4}>0\Rightarrow a>4\cdots\cdots④$

由③④得$a>4$，故選(4)(5)。

類題 2

設聯立方程式$\begin{cases}3x+py-13=0\\x-py-7=0\end{cases}$與$\begin{cases}x+y-7=0\\2x+y-4q=0\end{cases}$的解相同，則$p=$______，

$q=$______。

解 $\begin{cases}3x+py-13=0\\x-py-7=0\end{cases}\Rightarrow 4x-20=0$，所以$x=5$代入另一組聯立方程式，

得$\begin{cases}5+y-7=0\\10+y-4q=0\end{cases}\Rightarrow y=2$，$q=3$，

又$x-py-7=0\Rightarrow 5-2p-7=0$，所以$p=-1$，故$p=-1$，$q=3$。

題型 2 消去法（無解、無限多解）

範例 3【配合課本例 2】

解聯立方程式$\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+4y=3 \end{cases}$：______。

解
$\begin{cases} x+2y=4 \cdots\cdots ① \\ 2x+4y=3 \cdots\cdots ② \end{cases}$

①×2－②得 $0=5$（不合），

所以聯立方程式無解。

範例 4【配合課本例 2】

解聯立方程式$\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 4x-6y=8 \end{cases}$：______。

解
$\begin{cases} 2x-3y=4 \cdots\cdots ① \\ 4x-6y=8 \cdots\cdots ② \end{cases}$

①×2－②得 $0=0$，

所以聯立方程式有無限多組解，令 $y=t$，$x=\dfrac{4+3t}{2}$，所以解為 $x=\dfrac{4+3t}{2}$，$y=t$，$t\in\mathbb{R}$。

類題 1

解聯立方程式$\begin{cases} 3x-4y=7 \\ 9x-12y=8 \end{cases}$：______。

解
$\begin{cases} 3x-4y=7 \cdots\cdots ① \\ 9x-12y=8 \cdots\cdots ② \end{cases}$，

①×3－②得 $0=13$（不合），所以聯立方程式無解。

10

類題 2

解聯立方程式$\begin{cases}5x+3y=8\\10x+6y=16\end{cases}$：______。

解 $\begin{cases}5x+3y=8\cdots\cdots①\\10x+6y=16\cdots\cdots②\end{cases}$

$①\times2-②$得$0=0$，

所以聯立方程式有無限多組解，設$x=t$，$y=\dfrac{8-5t}{3}$，

所以解為$x=t$，$y=\dfrac{8-5t}{3}$，$t\in\mathbb{R}$。

主題二 克拉瑪公式

配合課本 P.193～P.196

1. 克拉瑪公式：

解聯立方程式$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\cdots\cdots①\\a_2x+b_2y=c_2\cdots\cdots②\end{cases}$

$①\times b_2-②\times b_1$得$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1$，

$①\times a_2-②\times a_1$得$(a_2b_1-a_1b_2)y=a_2c_1-a_1c_2$，

當$a_1b_2-a_2b_1\neq0$時，$x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}$，$y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$，

所以令$\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix}c_1&b_1\\c_2&b_2\end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1&c_1\\a_2&c_2\end{vmatrix}$，

當$\Delta\neq0$時，$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$為二元一次聯立方程式的克拉瑪公式解。

2. 二元一次聯立方程式的解：

承 1.之討論：

(1) 若$\Delta\neq0$，則聯立方程式恰有一組解，其解為$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$。

(2) 若$\Delta=0$，Δ_x，Δ_y至少有一個不為0，則聯立方程式無解。

(3) 若$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$，則聯立方程式有無限多組解。

題型 3 克拉瑪公式

範例 5　【配合課本例 3、4】

設聯立方程式$\begin{cases}(a+2)x-4y=3\\x+(a-3)y=3\end{cases}$恰有一組解，且 x 與 y 的解都是正數，則實數 a 的值可能為何？（多選）

(1) -1　(2) 0　(3) 2　(4) 3　(5) 4

解　由克拉瑪公式，

$\Delta=\begin{vmatrix}a+2 & -4\\1 & a-3\end{vmatrix}=(a+2)(a-3)+4=a^2-a-2=(a-2)(a+1)$，

$\Delta_x=\begin{vmatrix}3 & -4\\3 & a-3\end{vmatrix}=3a-9+12=3(a+1)$，$\Delta_y=\begin{vmatrix}a+2 & 3\\1 & 3\end{vmatrix}=3a+6-3=3(a+1)$，

因為聯立方程式恰有一組解，所以 $\Delta\neq0$，即 $a\neq2$ 且 $a\neq-1$，

又 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{3}{a-2}>0$，所以 $a-2>0\Rightarrow a>2\cdots\cdots$①

$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{3}{a-2}>0$，所以 $a>2\cdots\cdots$②

由①②，即 $a>2$，故選(4)(5)。

範例 6　【配合課本例 3、4】

關於聯立方程式$\begin{cases}x+(3-a)y=3(1-a)\\(3-a)x+4y=1-a\end{cases}$的解，下列選項哪些是正確的？（多選）

(1)當 $a=2$ 時，聯立方程式恰有一組解
(2)當 $a=5$ 時，聯立方程式有無限多組解
(3)當 $a=1$ 時，聯立方程式有無限多組解
(4)當 $a=3$ 時，聯立方程式無解
(5)當 $a=4$ 時，聯立方程式無解

解

(1) ○：$a=2$ 時，$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 4\end{vmatrix}=4-1=3\neq0$，所以聯立方程式恰有一組解。

(2) ╳：$a=5$ 時，$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2\\-2 & 4\end{vmatrix}=0$，$\Delta_x=\begin{vmatrix}-12 & -2\\-4 & 4\end{vmatrix}=-48-8=-56$，所以聯立方程式無解。

(3) ○：$a=1$ 時，$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{vmatrix}=0$，$\Delta_x=\begin{vmatrix}0 & 2\\0 & 4\end{vmatrix}=0$，$\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{vmatrix}=0$，所以聯立方程式有無限多組解。

(4) ╳：$a=3$ 時，$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{vmatrix}=4\neq0$，所以聯立方程式恰有一組解。

(5) ╳：$a=4$ 時，$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\-1 & 4\end{vmatrix}=4-1=3\neq0$，所以聯立方程式恰有一組解。

故選(1)(3)。

類題 1

設聯立方程式 $\begin{cases} 6x+(a-2)y=7a-17 \\ (a+5)x-2y=-8a-24 \end{cases}$，

(1) 若聯立方程式有無限多組解，則 $a=$______。

(2) 若聯立方程式無解，則 $a=$______。

解 由克拉瑪公式，

$$\Delta=\begin{vmatrix} 6 & a-2 \\ a+5 & -2 \end{vmatrix}=-12-(a^2+3a-10)=-a^2-3a-2=-(a+2)(a+1)，$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 7a-17 & a-2 \\ -8a-24 & -2 \end{vmatrix}=-14a+34+8(a^2+a-6)=8a^2-6a-14=2(4a-7)(a+1)，$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 6 & 7a-17 \\ a+5 & -8a-24 \end{vmatrix}=-48a-144-(7a^2+18a-85)=-7a^2-66a-59=-(7a+59)(a+1)。$$

(1) 當 $a=-1$ 時，$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$，所以聯立方程式有無限多組解。

(2) 當 $a=-2$ 時，$\Delta=0$，Δ_x，Δ_y 不為 0，所以聯立方程式無解。

類題 2

設聯立方程式 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，其中 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$，則下列哪些選項中的條件可確定聯立方程式有解？（多選）

(1) $\Delta=5$　(2) $\Delta_x\neq\Delta_y$　(3) $\Delta_x=\Delta_y=0$　(4) a_1，a_2 不為 0，且 $\Delta_x=3$，$\Delta_y=0$

(5) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y$

解 (1) ○：$\Delta=5\neq0$，聯立方程式恰有一組解。

(2) ╳：若 $\Delta=0$，$\Delta_x=3$，$\Delta_y=5$，則聯立方程式無解。

(3) ○：若 $\Delta\neq0$，則聯立方程式恰有一組解，若 $\Delta=0$，則聯立方程式有無限多組解。

(4) ○：由 $\Delta_y=0\Rightarrow\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow a_1c_2-a_2c_1=0\Rightarrow a_1:a_2=c_1:c_2$，令 $c_1=a_1k$，$c_2=a_2k$，

①若 $k=0$，表聯立方程式 $\begin{cases} a_1x+b_1y=0 \\ a_2x+b_2y=0 \end{cases}$，則 $\Delta_x=0$（不合，因為 $\Delta_x=3$）

②若 $k\neq0$，則聯立方程式 $\begin{cases} a_1x+b_1y=a_1k \\ a_2x+b_2y=a_2k \end{cases}$，

$$\Delta_x=3\Rightarrow\begin{vmatrix} a_1k & b_1 \\ a_2k & b_2 \end{vmatrix}=3\Rightarrow k(a_1b_2-a_2b_1)=3\Rightarrow k\times\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=3\Rightarrow k\times\Delta=3，$$

表 $\Delta\neq0$，故恰有一組解。

(5) ○：若 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y\neq0$，則聯立方程式恰有一組解，

若 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$，則聯立方程式有無限多組解。

故選(1)(3)(4)(5)。

題型 4 二元一次聯立方程式的應用

範例 7　【配合課本例 5】

甲，乙兩人合作完成一個社區的防水工程，預計10天完工。當兩人合作到第6天時，甲因為流感生病請假，剩餘的工程由乙獨立8天完成，則甲，乙如果獨自工作，各需幾天才可完成此工程？

解

設甲獨做需 x 天⇒甲一天完成工程的 $\frac{1}{x}$，

乙獨做需 y 天⇒乙一天完成工程的 $\frac{1}{y}$，

由題意：$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{10}（甲，乙合作1天，完成\frac{1}{10}的工作） \\ 6\times\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+8\times\frac{1}{y}=1（甲，乙合作6天，再由乙做8天，完成工作） \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{10}\cdots\cdots① \\ \frac{6}{x}+\frac{14}{y}=1\cdots\cdots② \end{cases}$

①×14－②，$\frac{8}{x}=\frac{4}{10}$，所以 $x=20$，代入①得 $y=20$，

即甲獨做需20天完成，乙獨做需20天完成。

範例 8　【課本內容延伸題】

若聯立方程式 $\begin{cases} (1-k)x+2y=0 \\ 3x+(2-k)y=0 \end{cases}$ 有異於 $(0,0)$ 的解，則 $k=$______。

解

有異於 $(0,0)$ 的解⇒除了 $(0,0)$ 的解之外，尚有其他的解，

所以聯立方程式有無限多組解，即 $\Delta=\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 3 & 2-k \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow 2-3k+k^2-6=0$，所以 $k^2-3k-4=0$

$\Rightarrow (k-4)(k+1)=0$，

故 $k=4$ 或 -1。

類題 1

甲，乙兩人同解聯立方程式$\begin{cases}2x-ay=3\\bx+y=7\end{cases}$，若甲看錯$a$，得聯立方程式的解$(x,y)$為$(2,-1)$；乙看錯$b$，得聯立方程式的解$(x,y)$為$(1,-1)$。假設甲，乙兩人在解題中，除了看錯$a$與$b$之外，沒有發生其他錯誤，則

(1) 數對$(a,b)=$______。

(2) 正確的解(x,y)為______。

解　令$\begin{cases}2x-ay=3\cdots\cdots①\\bx+y=7\cdots\cdots②\end{cases}$

(1) 因為甲看錯a得解$(2,-1)$，代入②合，所以$2b-1=7\Rightarrow b=4$，

乙看錯b得解$(1,-1)$，代入①合，所以$2+a=3\Rightarrow a=1$，

故數對$(a,b)=(1,4)$。

(2) 原式：$\begin{cases}2x-y=3\\4x+y=7\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{5}{3}$，$y=\dfrac{1}{3}$，

故正確的解為$(x,y)=\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{1}{3}\right)$。

類題 2

設k為實數，已知聯立方程式$\begin{cases}x+3y=kx\\5x+3y=ky\end{cases}$有異於$(0,0)$的解，則$k=$______。

解　原聯立方程式$\begin{cases}(1-k)x+3y=0\\5x+(3-k)y=0\end{cases}$有異於$(0,0)$的解，

所以聯立方程式有無限多組解，

即$\Delta=\begin{vmatrix}1-k & 3\\5 & 3-k\end{vmatrix}=0\Rightarrow 3-4k+k^2-15=0$

$\Rightarrow k^2-4k-12=0$，$(k-6)(k+2)=0$

$\Rightarrow k=6$或-2。

主題三　二元一次聯立方程式的幾何意義　配合課本 P.197～P.198

1. 二元一次聯立方程式的解與兩直線的相交情形：

設聯立方程式L：$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$，其中$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\c_2 & b_2\end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\a_2 & c_2\end{vmatrix}$。

(1) 若聯立方程式L恰有一組解，即$\Delta\neq 0\Leftrightarrow$兩直線$L_1$：$a_1x+b_1y=c_1$，$L_2$：$a_2x+b_2y=c_2$相交於一點。

(2) 若聯立方程式L有無限多組解，即$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0\Leftrightarrow$兩直線$L_1$：$a_1x+b_1y=c_1$，$L_2$：$a_2x+b_2y=c_2$重合。

(3) 若聯立方程式L無解，即$\Delta=0$，Δ_x，Δ_y至少有一個不為$0\Leftrightarrow$兩直線L_1：$a_1x+b_1y=c_1$，L_2：$a_2x+b_2y=c_2$平行。

題型 5 二元一次聯立方程式的幾何意義

範例 9【配合課本例 6】

平面上有兩直線 $L_1:(k+2)x+(3k+4)y=1-2k$，$L_2:(2k+1)x+(4k+3)y=2-3k$，
若 L_1 與 L_2 恰交於一點，則 k 值的條件為何？______（請簡答）

解

因為 L_1，L_2 交於一點，所以 $\Delta=\begin{vmatrix} k+2 & 3k+4 \\ 2k+1 & 4k+3 \end{vmatrix}\neq 0$

$\Rightarrow(k+2)(4k+3)-(2k+1)(3k+4)\neq 0\Rightarrow 4k^2+11k+6-(6k^2+11k+4)\neq 0$

$\Rightarrow -2k^2+2\neq 0\Rightarrow k^2-1\neq 0$，$(k-1)(k+1)\neq 0$，

所以 $k\neq 1$ 且 $k\neq -1$。

範例 10【配合課本例 6】

承範例 9，若 L_1，L_2 為重合兩直線，則 k 值為______；
若 L_1，L_2 為平行兩直線，則 k 值為______。

解

由範例 9，若 $\Delta=0$，則 $k=1$ 或 -1。

(1) 當 $k=1$ 時，兩直線 $\begin{cases} 3x+7y=-1 \\ 3x+7y=-1 \end{cases}$ 為兩重合直線（比較係數可知）。

(2) 當 $k=-1$ 時，兩直線 $\begin{cases} x+y=3 \\ -x-y=5 \end{cases}$ 為兩平行直線（比較係數可知）。

類題 1

平面上兩直線 $L_1:2x+(5-a)y=a+3$，$L_2:(5-a)x+2y=9-a$，
若 L_1 與 L_2 恰交於一點，則 a 值的條件為何？______（請簡答）

解　因為 L_1，L_2 交於一點，所以 $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 5-a \\ 5-a & 2 \end{vmatrix}\neq 0$

$\Rightarrow 4-(5-a)^2\neq 0$

$\Rightarrow 4-(25-10a+a^2)\neq 0$

$\Rightarrow -a^2+10a-21\neq 0$，$a^2-10a+21\neq 0$

$\Rightarrow (a-3)(a-7)\neq 0$，

所以 $a\neq 3$ 且 $a\neq 7$。

類題 2 承類題 1，若 L_1 與 L_2 為兩重合直線，則 a 值為______；

若 L_1 與 L_2 為兩平行直線，則 a 值為______。

解 由類題1，若 $\Delta=0$，則 $a=3$ 或 7。

(1) 當 $a=3$ 時，兩直線 $\begin{cases}2x+2y=6\\2x+2y=6\end{cases}$ 為兩重合直線（比較係數可知）。

(2) 當 $a=7$ 時，兩直線 $\begin{cases}2x-2y=10\\-2x+2y=2\end{cases}$ 為兩平行直線（比較係數可知）。

主題四 二階行列式的性質

配合課本 P.199～P.204

1. 行列式的運算性質：

二階行列式 $\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}$，其中橫的稱為列，直的稱為行。

(1) 行列式中有某一列或某一行全部為 0，其值為 0。例如 $\begin{vmatrix}0 & 0\\a & b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & x\\0 & y\end{vmatrix}=0$。

(2) 行列式中的行與列全部互換，其值不變。例如 $\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & c\\b & d\end{vmatrix}$。

(3) 行列式中的任兩行或任兩列對調，其值變號。例如 $\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b & a\\d & c\end{vmatrix}$；

$\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}c & d\\a & b\end{vmatrix}$。

(4) 行列式中的任兩行或任兩列成比例，其值為 0。例如 $\begin{vmatrix}a & b\\ka & kb\end{vmatrix}=0$；

$\begin{vmatrix}x & kx\\y & ky\end{vmatrix}=0$。

(5) 行列式中的任一行或任一列可提出同一個數。例如 $\begin{vmatrix}a & b\\kc & kd\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}$；

$\begin{vmatrix}tx & \mu\\ty & v\end{vmatrix}=t\begin{vmatrix}x & \mu\\y & v\end{vmatrix}$。

(6) 行列式中的任一行（或任一列）乘上 k 倍，加到另一行（或另一列），其值不變。例如：$\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}\times k=\begin{vmatrix}a & ka+b\\c & kc+d\end{vmatrix}$；$\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}\times k=\begin{vmatrix}a & b\\ak+c & bk+d\end{vmatrix}$。

(7) 行列式拆解（分解成兩個行列式的和或差）。例如

$\begin{vmatrix}a+e & b\\c+f & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}e & b\\f & d\end{vmatrix}$；$\begin{vmatrix}a+e & b+f\\c & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}e & f\\c & d\end{vmatrix}$。

2. 向量線性組合與聯立方程式的解：

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2)$，則向量的線性組合 $\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$ 與聯立方程式 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 解的討論意義相同。

(1) 若 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 不平行，即 $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$，$a_2$，$b_2\neq0$（$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq0$），則 (x,y) 恰有一組解（即 $\overrightarrow{c}$ 可唯一表成 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的線性組合）。

(2) 若 $\overrightarrow{a}$ 平行 $\overrightarrow{b}$，且 $\overrightarrow{c}$ 不與 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 平行，即 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$，$a_2$，$b_2$，$c_2\neq0$（$\Delta=0$，$\Delta_x$，$\Delta_y$ 至少有一個不為 0），則 (x,y) 無解。

(3) 若 $\overrightarrow{a}$ 平行 $\overrightarrow{b}$，且 $\overrightarrow{c}$ 與 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 平行，即 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$，$a_2$，$b_2$，$c_2\neq0$（$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$），則 (x,y) 有無限多組解。

例如：$\overrightarrow{a}=(1,2)$，$\overrightarrow{b}=(3,4)$，$\overrightarrow{c}=(15,18)$，且 $\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$，

$$則\ x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}15 & 3\\18 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{vmatrix}}=\frac{6}{-2}=-3\ ，\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 15\\2 & 18\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{vmatrix}}=\frac{-12}{-2}=6\ 。$$

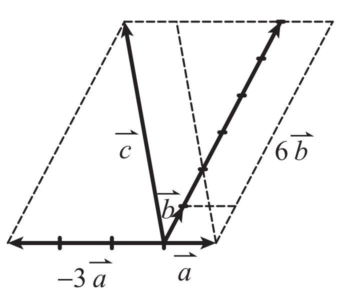
3. 向量線性組合與平行四邊形面積：

承 2.的例子，$\overrightarrow{a}=(1,2)$，$\overrightarrow{b}=(3,4)$，$\overrightarrow{c}=(15,18)$，

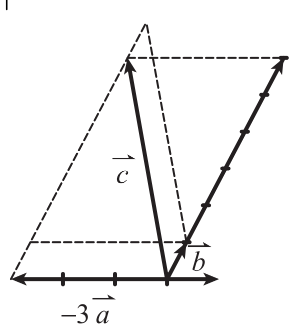
且 $\overrightarrow{c}=-3\overrightarrow{a}+6\overrightarrow{b}$。

(1) $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 所決定的平行四邊形面積等於 $\overrightarrow{a}$ 與 $6\overrightarrow{b}$ 所決定的平行四邊形面積，示意圖如圖（一），即 $\left|\begin{vmatrix}1 & 15\\2 & 18\end{vmatrix}\right|=12$；$\left|\begin{vmatrix}1 & 18\\2 & 24\end{vmatrix}\right|=12$。

(2) $\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 所決定的平行四邊形面積等於 $\overrightarrow{b}$ 與 $-3\overrightarrow{a}$ 所決定的平行四邊形面積，示意圖如圖（二），即 $\left|\begin{vmatrix}3 & 15\\4 & 18\end{vmatrix}\right|=6$，$\left|\begin{vmatrix}3 & -3\\4 & -6\end{vmatrix}\right|=6$。



圖（一）



圖（二）

題型 6 行列式的運算性質

範例 11【配合課本例 7】

(1)試求 $\begin{vmatrix} 2020 & 109 \\ 2022 & 111 \end{vmatrix} =$______。 (2)設 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -10$，求 $\begin{vmatrix} 3a-2b & 4b \\ 3c-2d & 4d \end{vmatrix} =$______。

解

(1) $\begin{vmatrix} 2020 & 109 \\ 2022 & 111 \end{vmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} = \begin{vmatrix} 2020 & 109 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} 2020 & 109 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\times(2020-109) = 2\times1911 = 3822$。

(2) 所求 $= 4\times\begin{vmatrix} 3a-2b & b \\ 3c-2d & d \end{vmatrix} \overset{\times 2}{=} 4\times\begin{vmatrix} 3a & b \\ 3c & d \end{vmatrix} = 12\times\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 12\times(-10) = -120$。

範例 12【配合課本例 8】

設 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -15$，則下列選項哪些是正確的？（多選）

(1) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 15$ (2) $\begin{vmatrix} -a & b \\ c & -d \end{vmatrix} = 15$ (3) $\begin{vmatrix} 5a & b \\ c & 5d \end{vmatrix} = -75$

(4) $\begin{vmatrix} a & b+\frac{1}{5}a \\ c & d+\frac{1}{5}c \end{vmatrix} = -15$ (5) $\begin{vmatrix} a & a+\frac{1}{5}b \\ c & c+\frac{1}{5}d \end{vmatrix} = -3$

解

(1) ╳：$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = -15$。

(2) ╳：$\begin{vmatrix} -a & b \\ c & -d \end{vmatrix} = ad-bc = -15$。

(3) ╳：$\begin{vmatrix} 5a & b \\ c & 5d \end{vmatrix} = 25ad-bc$，無法確定。

(4) ○：$\begin{vmatrix} a & b+\frac{1}{5}a \\ c & d+\frac{1}{5}c \end{vmatrix} \overset{\times\left(-\frac{1}{5}\right)}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -15$。

(5) ○：$\begin{vmatrix} a & a+\frac{1}{5}b \\ c & c+\frac{1}{5}d \end{vmatrix} \overset{\times(-1)}{=} \begin{vmatrix} a & \frac{1}{5}b \\ c & \frac{1}{5}d \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\times\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\times(-15) = -3$。

故選(4)(5)。

類題 1

設 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=7$，求 $\begin{vmatrix} 5a-4b & 4a+3b \\ 5c-4d & 4c+3d \end{vmatrix}=$ ______。

解

原式 $=\begin{vmatrix} 5a-4b & 4a+3b \\ 5c-4d & 4c+3d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-7b & 4a+3b \\ c-7d & 4c+3d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-7b & 31b \\ c-7d & 31d \end{vmatrix}$

$=31\times\begin{vmatrix} a-7b & b \\ c-7d & d \end{vmatrix}=31\times\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=31\times7=217$。

類題 2

關於二階行列式的性質，下列哪些選項是正確的？（多選）

(1) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}=0$　(3) $\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix}=0$

(4)若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=10$，則 $\begin{vmatrix} a+2b & 3b \\ c+2d & 3d \end{vmatrix}=50$

(5)若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=3$ 且 $\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix}=5$，則 $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ c+2e & d+2f \end{vmatrix}=26$

解 (1) ╳：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$。

(2) ○：兩列成比例，其值為 0。

(3) ○：兩列成比例，其值為 0。

(4) ╳：$\begin{vmatrix} a+2b & 3b \\ c+2d & 3d \end{vmatrix}=3\times\begin{vmatrix} a+2b & b \\ c+2d & d \end{vmatrix}=3\times\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=30$。

(5) ○：$\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ c+2e & d+2f \end{vmatrix}=2\times\begin{vmatrix} a & b \\ c+2e & d+2f \end{vmatrix}=2\times\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b \\ 2e & 2f \end{vmatrix}\right)=2\times(3+2\times5)=26$。

故選(2)(3)(5)。

題型 7 二階行列式的應用

範例 13【課本內容延伸題】

設聯立方程式 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 恰有一組解 $(2,-3)$，則聯立方程式 $\begin{cases} (2a_1-3b_1)x+b_1y+2c_1=0 \\ (2a_2-3b_2)x+b_2y+2c_2=0 \end{cases}$ 的解為______。

解 （法一）

利用克拉瑪公式，$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=2$；$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=-3$，

所以 $x'=\dfrac{\Delta_x'}{\Delta'}=\dfrac{\begin{vmatrix} -2c_1 & b_1 \\ -2c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2a_1-3b_1 & b_1 \\ 2a_2-3b_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\dfrac{(-2)\times\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{2\times\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=(-1)\times 2=-2$，

$$y'=\frac{\Delta_y'}{\Delta'}=\frac{\begin{vmatrix} 2a_1-3b_1 & -2c_1 \\ 2a_2-3b_2 & -2c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2a_1-3b_1 & b_1 \\ 2a_2-3b_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{(-4)\times\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+6\times\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{2\times\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=(-2)\times(-3)+3\times(-2)=0$$

（其中 $\Delta'=\begin{vmatrix} 2a_1-3b_1 & b_1 \\ 2a_2-3b_2 & b_2 \end{vmatrix}\overset{\times 3}{=}\begin{vmatrix} 2a_1 & b_1 \\ 2a_2 & b_2 \end{vmatrix}=2\times\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_x'=\begin{vmatrix} -2c_1 & b_1 \\ -2c_2 & b_2 \end{vmatrix}=(-2)\times\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，

$\Delta_y'=\begin{vmatrix} 2a_1-3b_1 & -2c_1 \\ 2a_2-3b_2 & -2c_2 \end{vmatrix}=(-2)\times\begin{vmatrix} 2a_1-3b_1 & c_1 \\ 2a_2-3b_2 & c_2 \end{vmatrix}=(-2)\times\left(\begin{vmatrix} 2a_1 & c_1 \\ 2a_2 & c_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -3b_1 & c_1 \\ -3b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right)$

$=(-4)\times\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+6\times\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$）

所以新聯立方程式的解為 $(-2,0)$。

（法二）

因有唯一解 $(2,-3)$，表示 $\begin{cases} 2a_1-3b_1=c_1 \\ 2a_2-3b_2=c_2 \end{cases}$，令 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2)$，

則 $\overrightarrow{c}=2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}$ 且此表法唯一。

將新聯立方程式改寫為 $\begin{cases} -xa_1+\left(\dfrac{-3x+y}{-2}\right)b_1=c_1 \\ -xa_2+\left(\dfrac{-3x+y}{-2}\right)b_2=c_2 \end{cases}$，這表示 $(-x)\overrightarrow{a}+\left(\dfrac{-3x+y}{-2}\right)\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$。

因 $\overrightarrow{c}$ 的表法唯一，故 $-x=2\Rightarrow x=-2$，$\dfrac{-3x+y}{-2}=-3\Rightarrow 6+y=6$，所以 $y=0$，

即新聯立方程式的解為 $(-2,0)$。

範例 14【課本內容延伸題】

設 $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$ 是平面上不平行的兩非零向量，若 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=-5$，則下列哪些選項是正確的？（多選）

(1) $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}=5$ (2) $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所決定的平行四邊形面積為 5

(3) $\sqrt{\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2-\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2}=5$ (4) $\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所決定的平行四邊形面積為 5

(5) $2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 所決定的平行四邊形面積為 15

解

(1) ╳：行與列全部互換，其值不變，所以 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}=-5$。

(2) ○：$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所決定的平行四邊形面積為 $\left|\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right|=5$。

(3) ○：$\sqrt{\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2-\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2}=\sqrt{\left(x_1^2+y_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2\right)-\left(x_1x_2+y_1y_2\right)^2}=\sqrt{\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2}=\left|\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right|$，

表示 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 所決定的平行四邊形面積，所以所求為 5。

(4) ○：$\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所圍的平行四邊形面積等於 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所圍的平行四邊形面積。

(5) ╳：$2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\left(2x_1+x_2,2y_1+y_2\right)$，$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\left(x_1+x_2,y_1+y_2\right)$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 所圍的平行四邊形面積為

$$\left|\begin{vmatrix} 2x_1+x_2 & 2y_1+y_2 \\ x_1+x_2 & y_1+y_2 \end{vmatrix}\right| \times(-1)=\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_1+x_2 & y_1+y_2 \end{vmatrix}\right| \times(-1)=\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right|=5$$。

故選(2)(3)(4)。

類題 1

設聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$恰有一組解 $x=4$，$y=3$，則聯立方程式$\begin{cases} 2b_1x+a_1y=3c_1 \\ 2b_2x+a_2y=3c_2 \end{cases}$的解 $(x,y)=$______。

解 令 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2)$，

則由題意知 $x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$ 有唯一解 $x=4$，$y=3$，

即 $\overrightarrow{c}=4\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$ 的表法唯一。

又 $\begin{cases} ya_1+2xb_1=3c_1 \\ ya_2+2xb_2=3c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{y}{3}\right)a_1+\left(\dfrac{2x}{3}\right)b_1=c_1 \\ \left(\dfrac{y}{3}\right)a_2+\left(\dfrac{2x}{3}\right)b_2=c_2 \end{cases}$，表示 $\overrightarrow{c}=\left(\dfrac{y}{3}\right)\overrightarrow{a}+\left(\dfrac{2x}{3}\right)\overrightarrow{b}$。

因 $\overrightarrow{c}$ 的表法唯一，故 $\dfrac{2x}{3}=3\Rightarrow x=\dfrac{9}{2}$，$\dfrac{y}{3}=4\Rightarrow y=12$，所以 $(x,y)=\left(\dfrac{9}{2},12\right)$。

類題 2

坐標平面上 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所決定的平行四邊形面積為 $\dfrac{6}{5}$，則以 $4\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}$ 與 $2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 所決定的平行四邊形面積為______。

解 設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，

則 $\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|=\dfrac{6}{5}$，

又 $4\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}=(4a_1-3b_1,4a_2-3b_2)$，

$2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(2a_1+b_1,2a_2+b_2)$，

則 $4\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}$ 與 $2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 所決定的平行四邊形面積

$=\left|\begin{vmatrix} 4a_1-3b_1 & 4a_2-3b_2 \\ 2a_1+b_1 & 2a_2+b_2 \end{vmatrix}\right| \times 3 =\left|\begin{vmatrix} 10a_1 & 10a_2 \\ 2a_1+b_1 & 2a_2+b_2 \end{vmatrix}\right|$

$=10\times\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 2a_1+b_1 & 2a_2+b_2 \end{vmatrix}\right| \times(-2) =10\times\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$

$=10\times\dfrac{6}{5}=12$。

A^{++} 挑戰題

1. 已知 $\left|\overrightarrow{a}\right|=2$，$\left|\overrightarrow{b}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{2}$，若由 $\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ 和 $3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$ 這兩個向量所決定的平行四邊形面積為 $3\sqrt{7}$，則 t 值為何？

解 (1) 因為 $\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{2}\Rightarrow\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|^2=2\Rightarrow\left|\overrightarrow{a}\right|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\left|\overrightarrow{b}\right|^2=2$，

所以 $2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=4+1-2=3$，即 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\dfrac{3}{2}$，

故由 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 所決定的平行四邊形面積為 $\sqrt{\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2-\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2}=\sqrt{4\times1-\dfrac{9}{4}}=\sqrt{\dfrac{7}{4}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$。

(2) 令 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，所以 $\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ 與 $3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$ 所決定的平行四邊形面積為

$$\left|\begin{vmatrix}a_1+tb_1 & a_2+tb_2\\3a_1+2b_1 & 3a_2+2b_2\end{vmatrix}\right|\times(-3)=\left|\begin{vmatrix}a_1+tb_1 & a_2+tb_2\\(-3t+2)b_1 & (-3t+2)b_2\end{vmatrix}\right|=|-3t+2|\times\left|\begin{vmatrix}a_1+tb_1 & a_2+tb_2\\b_1 & b_2\end{vmatrix}\right|\times(-t)$$

$=|-3t+2|\times\left|\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\b_1 & b_2\end{vmatrix}\right|=|2-3t|\times(\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 所張成的平行四邊形面積)，

所以 $|2-3t|\times\dfrac{\sqrt{7}}{2}=3\sqrt{7}$，即 $|2-3t|=6$，故 $t=-\dfrac{4}{3}$ 或 $\dfrac{8}{3}$。

2. 設聯立方程式 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 和 $\begin{cases}(b_1-a_1)x+2a_1y=2c_1+b_1\\(b_2-a_2)x+2a_2y=2c_2+b_2\end{cases}$ 有相同的唯一解 $x=t$，$y=k$，則此解 $(t,k)=$______。

解 因有唯一解 $x=t$，$y=k$，令向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2)$，

則由 $\begin{cases}a_1t+b_1k=c_1\\a_2t+b_2k=c_2\end{cases}$ 知 $\overrightarrow{c}$ 可唯一表成 $t\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b}$。

再由 $\begin{cases}(b_1-a_1)t+2a_1k=2c_1+b_1\\(b_2-a_2)t+2a_2k=2c_2+b_2\end{cases}$ 知 $\begin{cases}a_1\left(\dfrac{-t+2k}{2}\right)+b_1\left(\dfrac{t-1}{2}\right)=c_1\\a_2\left(\dfrac{-t+2k}{2}\right)+b_2\left(\dfrac{t-1}{2}\right)=c_2\end{cases}$，

即 $\overrightarrow{c}=\left(\dfrac{-t+2k}{2}\right)\overrightarrow{a}+\left(\dfrac{t-1}{2}\right)\overrightarrow{b}$，由以 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 表示 $\overrightarrow{c}$ 的唯一性知 $t=\dfrac{-t+2k}{2}\Rightarrow3t=2k\cdots\cdots$①，

$k=\dfrac{t-1}{2}\Rightarrow t-2k=1\cdots\cdots$②，解①②得 $(t,k)=\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{4}\right)$。

10

單元10 精選試題

一 基礎題

1. 設聯立方程式$\begin{cases}4x+3y=10\\ax+2by=16\end{cases}$與$\begin{cases}11x-4y=3\\3bx-5ay=-31\end{cases}$有相同的解，則$a=$______，$b=$______。

答 4，3　　題型 1　題型 2

2. 試求聯立方程式$\begin{cases}3x-2y=-4xy\\x+4y=xy\end{cases}$的解$(x,y)=$______。　　題型 1　題型 2

答 $(2,-1)$或$(0,0)$

3. 聯立方程式$\begin{cases}(a-5)x-y+1=0\\8x+(a+1)y-2=0\end{cases}$若有無限多組解，則$a=$______。　　題型 3

答 1

4. 承 3.的聯立方程式，若聯立方程式無解，則$a=$______。　　題型 3

答 3

5. 甲，乙兩人解聯立方程式$\begin{cases}ax-5y=8\\5x+by=2\end{cases}$，若甲看錯$a$，得解$x=4$，$y=-6$；乙看錯$b$，得解$x=6$，$y=2$，假設甲，乙兩人在解題中除了看錯$a$與$b$之外，沒有發生其他錯誤，則

(1) 數對$(a,b)=$______。

(2) 聯立方程式正確的解為______。　　題型 4

答 (1) $(3,3)$　(2) $(1,-1)$

6. 聯立方程式$\begin{cases}x+2y=ax\\6x+2y=ay\end{cases}$有異於$(0,0)$的解，則$a=$______。　　題型 4

答 5 或 -2

7. 設直線 L_1：$ax+3y=a+3$，L_2：$x+(a-2)y=5-a$，

(1) 若 $L_1 // L_2$，則 $a=$______。

(2) 若 L_1 與 L_2 重合，則 $a=$______。　題型 5

答 (1) -1　(2) 3

8. 試求 $\begin{vmatrix} \sqrt{2}+2\sqrt{13}+\sqrt{15} & 2\sqrt{13} \\ \sqrt{2}+2\sqrt{13}-\sqrt{15} & \sqrt{2}-\sqrt{15} \end{vmatrix}=$______。　題型 6

答 -65

9. 設 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=7$，求 $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b+2a \\ c & d+2c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b \\ 3c+a & 3d+b \end{vmatrix}=$______。　題型 6

答 21

10. 設 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=4$，$\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix}=-3$，求 $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ c+2e & d+2f \end{vmatrix}=$______。　題型 6

答 -6

11. 設聯立方程式 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 恰有一組解 $x=2$，$y=5$，則聯立方程式 $\begin{cases} 4b_1x-5a_1y=-6c_1 \\ 4b_2x-5a_2y=-6c_2 \end{cases}$ 的解 (x,y) 為______。　題型 7

答 $\left(-\frac{15}{2},\frac{12}{5}\right)$

12. 設 $A(1,2)$，$B(3,-1)$，$C(k,2k+3)$，若 $\triangle ABC$ 的面積為 6，則 $k=$______。　題型 7

答 $\frac{13}{7}$ 或 $-\frac{11}{7}$

13. 坐標平面上，$\overrightarrow{u}=(a,b)$，$\overrightarrow{v}=(c,d)$ 所決定的平行四邊形面積為 14，則 $3\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}$ 與 $2\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}$ 所決定的平行四邊形面積為______。　題型 7

答 182

二 進階題

14. 設聯立方程式$\begin{cases}ax+by+c=0\\bx+cy+a=0\end{cases}$有無限多組解，其中$a$，$b$，$c$為常數且$abc\neq 0$，則

(1) $x+y=$______。　(2) $x^3+y^3-3xy=$______。

題型 3

答 (1) -1　(2) -1

15. 試就a值討論聯立方程式$\begin{cases}(a-3)x-2y=2a\\3x+(2a+1)y=-a-2\end{cases}$的解，並說明它的幾何意義。題型 3 題型 5

答 見解析

16. 關於聯立方程式$\begin{cases}2x+(a+2)y=6-a\\(a-1)x+5y=6a-1\end{cases}$的解，下列哪些選項是正確的？（多選）

(1)當$a=-4$時，聯立方程式恰有一組解　(2)當$a=3$時，聯立方程式無解

(3)當$a=\dfrac{3}{2}$時，聯立方程式恰有一組解　(4)若聯立方程式有無限多組解，則$x-y=5$

(5)有無限多個a值使得聯立方程式無解

題型 3 題型 5

答 (2)(3)(4)

17. 設$\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{c}=(x_3,y_3)$是平面上三個非零向量且分量都不為0，若$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$且$\overrightarrow{a}\,/\!/\,\overrightarrow{c}$，則下列選項哪些是正確的？（多選）

(1) $\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{vmatrix}=0$　(2) $\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\x_3 & y_3\end{vmatrix}=0$　(3) $\begin{vmatrix}x_2 & -y_2\\y_3 & x_3\end{vmatrix}=0$　(4) $\begin{vmatrix}x_1+x_2 & y_1+y_2\\x_2+x_3 & y_2+y_3\end{vmatrix}=0$

(5) $\left|\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{vmatrix}\right|=\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}}\times\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}}$

題型 6 題型 7

答 (2)(3)(5)

18. 設聯立方程式$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$恰有一組解$(5,-3)$，則聯立方程式$\begin{cases}(2a_1-3b_1)x+2b_1y=c_1\\(2a_2-3b_2)x+2b_2y=c_2\end{cases}$的解

$(x,y)=$______。

題型 7

答 $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{9}{4}\right)$

三 大考試題

19. 已知 a，b 為整數，且行列式 $\begin{vmatrix} 5 & a \\ b & 7 \end{vmatrix} = 4$，則絕對值 $|a+b|$ 為何？（單選）

(1) 16　(2) 31　(3) 32　(4) 39　(5)條件不足，無法確定　【答對率 58%】 99 學測

答 (3)

20. 坐標平面上有一個平行四邊形 $ABCD$，其中點 A 的坐標為 $(2,1)$，點 B 的坐標為 $(8,2)$，點 C 在第一象限且知其 x 坐標為 12。若平行四邊形 $ABCD$ 的面積等於 38 平方單位，則點 D 的坐標為______。　【答對率 29%】 99 學測

答 $(6,8)$

21. 設實數 $a>0$。若 x，y 的聯立方程式 $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x-2y=a \\ x-ay=122 \end{cases}$ 有解，則 $a=$______。

答 14　【答對率 41%】 99 學測

22. 若實數 a，b，c，d 使得聯立方程式 $\begin{cases} ax+8y=c \\ x-4y=3 \end{cases}$ 有解，且聯立方程式 $\begin{cases} -3x+by=d \\ x-4y=3 \end{cases}$ 無解，則下列哪些選項一定正確？（多選）

(1) $a\neq -2$　(2) $c=-6$　(3) $b=12$　(4) $d\neq -9$　(5)聯立方程式 $\begin{cases} ax+8y=c \\ -3x+by=d \end{cases}$ 無解

答 (3)(4)　【答對率 37%】 101 學測

10