9 平面向量的運算

教學流程圖

平面向量的運算

↓

向量的內積 →
1. 向量的夾角
2. 向量內積的表示法
3. 內積的基本性質
4. 向量垂直的判定

↓

向量的正射影 →
1. 向量正射影公式

↓

柯西不等式 →
1. 向量形式
2. 實數形式

↓

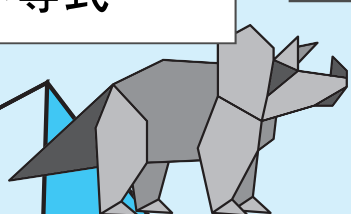
面積與二階行列式 →
1. 二階行列式
2. 面積公式

↓

兩直線的夾角 →
1. 直線的法向量
2. 兩直線的夾角

↓

三角不等式 →
1. 實數形式
2. 向量形式



9 平面向量的運算

主題一 向量的內積

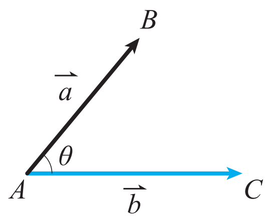
配合課本 P.160～P.169

1. 向量的夾角：

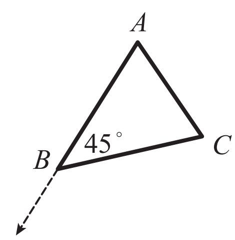
設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 是兩個非零向量，當此二向量的始點重合時，則此二向量所夾的角度稱為向量的夾角。

如圖（一）中的 $\angle BAC$（θ），其中 $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$。

例如：圖（二）中，$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 的夾角為 135°。



圖（一）



圖（二）

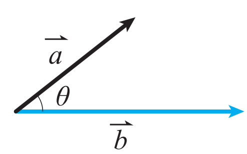
(1) 當 $\theta = 0^\circ$ 時，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的方向相同。

(2) 當 $\theta = 180^\circ$ 時，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的方向相反。

2. 向量內積的表示法：

(1) 設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 是兩個非零向量，θ 是 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角，則定義向量的內積

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta$（$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ 讀作 a dot b）。



(2) 設 $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$，$\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$，則 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$。

(3) 若 $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ 或 $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$，則 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$。

(4) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ 是一純量（實數）。

(5) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ 在物理上可視為作功。

3. 內積的性質：

(1) 具有交換律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ 。

(2) 具有分配律：$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ 。

(3) $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$ ；$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2$ 。

4. 兩向量垂直的定義：

設 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 為非零向量，若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 $90°$ 時，我們稱 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 垂直，記作 $\vec{a}\perp\vec{b}$ ，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 。

題型 1 向量的內積

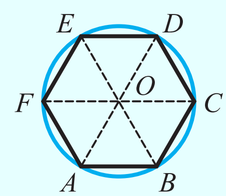
範例 1　【配合課本例 1】

如右圖，$ABCDEF$ 是邊長為 2 的正六邊形，試求下列各內積的值：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=$______ 。　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$______ 。

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$______ 。　(4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$______ 。

(5) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=$______ 。　(6) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}=$______ 。



解

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times2\times\cos0°=4$ 。

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times2\times\cos60°=2$ 。

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2\sqrt{3}\times\cos30°=6$ 。

(4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\times4\times\cos60°=4$ 。

(5) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=2\times2\sqrt{3}\times\cos90°=0$ 。

(6) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}=2\times4\times\cos180°=-8$ 。

範例 2【配合課本例 2】

$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=7$，$\overline{CA}=6$，則

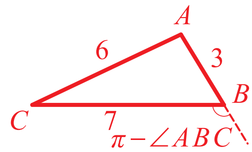
(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$______。　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$______。

解

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times6\times\cos A=3\times6\times\dfrac{3^2+6^2-7^2}{2\times3\times6}=\dfrac{-4}{2}=-2$。

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=3\times7\times\cos(\pi-\angle ABC)=-3\times7\times\cos B$

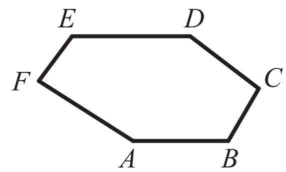
$=-3\times7\times\dfrac{3^2+7^2-6^2}{2\times3\times7}=-\dfrac{22}{2}=-11$。



類題 1

右圖六邊形 $ABCDEF$ 中，$\overrightarrow{AB}$ 與下列哪一個向量的內積最大？（單選）

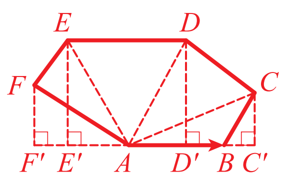
(1) $\overrightarrow{AB}$　(2) $\overrightarrow{AC}$　(3) $\overrightarrow{AD}$　(4) $\overrightarrow{AE}$　(5) $\overrightarrow{AF}$



解 由內積的定義得知

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的內積最大，

故選(2)。

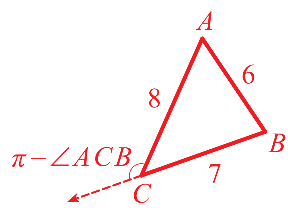


類題 2

$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=7$，$\overline{CA}=8$，則 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=$______。

解 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=7\times8\times\cos(\pi-\angle ACB)=-7\times8\times\cos C$

$=-7\times8\times\dfrac{7^2+8^2-6^2}{2\times7\times8}=-\dfrac{77}{2}$。



題型 2　內積的坐標表示法

範例 3【配合課本例 3】

設 $\vec{a}=(3,2)$，$\vec{b}=(-1,5)$，$\vec{c}=(1,-4)$，則

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=$______。　(2) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=$______。

解

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3+10=7$。

(2) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=(3,2)\cdot(0,1)=2$。

範例 4 【配合課本例 3】

設 $\overrightarrow{a}=(0,1)$，$\overrightarrow{b}=(1,\sqrt{3})$，則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為______。

解 設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ，

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{1\times 2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\theta=30°$。

類題 1 設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 是坐標平面上兩向量，若 $2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}=(11,2)$，$\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}=(-5,-6)$，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$______。

解 $2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}=(11,2)\cdots\cdots$ ①

$\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}=(-5,-6)\cdots\cdots$ ②

①×2+②×3 得 $7\overrightarrow{a}=(22,4)+(-15,-18)=(7,-14)$，

所以 $\overrightarrow{a}=(1,-2)$，代入②，得 $2\overrightarrow{b}=(6,4)$，即 $\overrightarrow{b}=(3,2)$，

故 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=3-4=-1$。

類題 2 設 $\overrightarrow{a}=(3,4)$，$\overrightarrow{b}=(1,x)$，若 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 $135°$，則 $x=$______。

解 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta$

$\Rightarrow 3+4x=5\times\sqrt{x^2+1}\times\cos 135°$

$\Rightarrow 3+4x=5\times\sqrt{x^2+1}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\Rightarrow 9+24x+16x^2=\dfrac{25}{2}\times\left(x^2+1\right)$

$\Rightarrow 18+48x+32x^2=25x^2+25$

$\Rightarrow 7x^2+48x-7=0$

$\Rightarrow (7x-1)(x+7)=0$，

所以 $x=\dfrac{1}{7}$（不合）或 -7（因為夾角 $135°$，內積為負）。

題型 3 內積的性質（一）

範例 5【配合課本例 4】

設 $\left|\vec{a}\right|=5$，$\left|\vec{b}\right|=4$，$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 60°，試求

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=$______。　(2) $\vec{a}\cdot\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)=$______。　(3) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=$______。

解

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 60^\circ=5\times4\times\frac{1}{2}=10$。

(2) $\vec{a}\cdot\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)=3\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)-2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=3\times25-20=55$。

(3) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=25+20+16=61$，

所以 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{61}$。

範例 6【配合課本例 4】

設 $\left|\vec{a}\right|=1$，$\left|\vec{b}\right|=3$，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{7}$，則

(1) $\left|3\vec{a}+2\vec{b}\right|=$______。　(2) $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為______。

解

(1) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=7\Rightarrow\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=7$，

所以 $2\vec{a}\cdot\vec{b}=1+9-7=3$，即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{2}$，

所以 $\left|3\vec{a}+2\vec{b}\right|^2=9\left|\vec{a}\right|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2=9+18+36=63$，

故 $\left|3\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$。

(2) 設 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夾角為 θ，承(1)，因為 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{2}$，

所以 $\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=\frac{3}{2}\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{\frac{3}{2}}{1\times3}=\frac{1}{2}$，故 $\theta=60^\circ$。

類題 1

設 $\left|\overrightarrow{a}\right|=4$，$\left|\overrightarrow{b}\right|=3$，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 $120°$，則

(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$______。 (2) $\overrightarrow{a}\cdot\left(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)=$______。 (3) $\left|\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right|=$______。

解 (1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos120°=4\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-6$。

(2) $\overrightarrow{a}\cdot\left(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)=2\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}\right)-\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=2\times16+6=38$。

(3) $\left|\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right|^2=\left|\overrightarrow{a}\right|^2-4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+4\left|\overrightarrow{b}\right|^2=16+24+36=76$，

所以 $\left|\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$。

類題 2

設 $\left|\overrightarrow{a}\right|=3$，$\left|\overrightarrow{b}\right|=4$，且 $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{37}$，則

(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$______。 (2) $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為______。

解 (1) $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|^2=37\Rightarrow\left|\overrightarrow{a}\right|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\left|\overrightarrow{b}\right|^2=37$，

所以 $2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=37-25=12$，故 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=6$。

(2) 設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ，承(1)，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta$，所以 $\cos\theta=\frac{6}{3\times4}=\frac{1}{2}$，故 $\theta=60°$。

題型 4 內積的性質（二）

範例 7 【配合課本例 5】

設 $\left|\overrightarrow{a}\right|=3$，$\left|\overrightarrow{b}\right|=2$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-2$，若 $\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\perp\left(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right)$，則 $t=$______。

解

因為 $\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\perp\left(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right)\Rightarrow\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right)=0$，

所以 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}+(t+1)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+t\left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}\right)=0\Rightarrow9-2t-2+4t=0$，

故 $2t=-7$，$t=-\frac{7}{2}$。

範例 8【課本內容延伸題】

設$\left|\overrightarrow{a}\right|=4$，$\left|\overrightarrow{b}\right|=3$，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為$60°$，則$\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|$的最小值為______，此時$t=$______。

解

$\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|^2=\left(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right)=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}+2t\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)+t^2\left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}\right)$（$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=4\times3\times\cos60°=6$）

$=9t^2+12t+16=9\left(t^2+\dfrac{4}{3}t\right)+16$

$=9\left(t+\dfrac{2}{3}\right)^2-4+16=9\left(t+\dfrac{2}{3}\right)^2+12$，

所以當$t=-\dfrac{2}{3}$時，$\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|$有最小值$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$。

類題 1　設$\left|\overrightarrow{a}\right|=4$，$\left|\overrightarrow{b}\right|=2$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-1$，若$\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\perp\left(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right)$，則$t=$______。

解　因為$\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\perp\left(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right)$，

所以$\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right)=0$

$\Rightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}+(t+1)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+t\left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}\right)=0$，

故$16-t-1+4t=0$，$3t=-15$，得$t=-5$。

類題 2

設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 為兩非零向量，已知$\left(\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}\right)\perp\left(7\overrightarrow{a}-5\overrightarrow{b}\right)$，$\left(\overrightarrow{a}-4\overrightarrow{b}\right)\perp\left(7\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right)$，則下列選項哪些是正確的？（多選）

(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}>0$　(2) $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為銳角　(3) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{b}\right|^2$

(4) $\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=\left|\overrightarrow{a}\right|$　(5) $\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)$與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 $60°$

解 因為$\left(\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}\right)\perp\left(7\overrightarrow{a}-5\overrightarrow{b}\right)$，

所以$\left(\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(7\overrightarrow{a}-5\overrightarrow{b}\right)=0\Rightarrow 7\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}+16\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-15\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}=0$，

即$7\left|\overrightarrow{a}\right|^2+16\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-15\left|\overrightarrow{b}\right|^2=0$……①

同理$\left(\overrightarrow{a}-4\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(7\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right)=0\Rightarrow 7\left|\overrightarrow{a}\right|^2-30\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+8\left|\overrightarrow{b}\right|^2=0$……②

由①－②得 $46\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=23\left|\overrightarrow{b}\right|^2$，所以 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{b}\right|^2$。

(1) ○：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{b}\right|^2>0$。

(2) ○：因為 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta>0$，所以 θ 為銳角。

(3) ○：承(1)。

(4) ○：$\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|^2=\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)=\left|\overrightarrow{a}\right|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\left|\overrightarrow{b}\right|^2=\left|\overrightarrow{a}\right|^2$，

所以$\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=\left|\overrightarrow{a}\right|$。

(5) ╳：因為 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{b}\right|^2$ 代入①

$\Rightarrow 7\left|\overrightarrow{a}\right|^2=7\left|\overrightarrow{b}\right|^2$，所以$\left|\overrightarrow{a}\right|=\left|\overrightarrow{b}\right|$，即$\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=\left|\overrightarrow{a}\right|=\left|\overrightarrow{b}\right|$，

設 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 α，

所以$\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{b}=\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\alpha\Rightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-\left|\overrightarrow{b}\right|^2=\left|\overrightarrow{b}\right|^2\cos\alpha$，

所以 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$，即 $\alpha=120°$。

故選(1)(2)(3)(4)。

主題二　向量的正射影

配合課本 P.170～P.173

1. 單位向量：

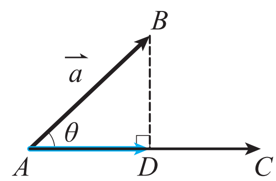
(1) 長度為1的向量稱為單位向量。

(2) 如右圖，假設 $\overrightarrow{u}$ 為與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的單位向量，

則 $\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\overrightarrow{u}$，即 $\overrightarrow{u}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$。

2. 向量的正射影：

設 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{b}$，設 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影為 $\overrightarrow{AD}$，
則如右圖所示。



因為 A，D，C 三點共線，

所以 $\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{b}$，

又 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$，

因為 $\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AC}$，所以 $\left(t\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\right)\cdot\overrightarrow{b}=0\Rightarrow t\left|\overrightarrow{b}\right|^2-\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$，

故 $t=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{b}\right|^2}$，即 $\overrightarrow{AD}=\left(\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{b}\right|^2}\right)\overrightarrow{b}$。

3. 向量的正射影長：

承2，$\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影長度為 $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\left(\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{b}\right|^2}\right)\overrightarrow{b}\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right|}{\left|\overrightarrow{b}\right|}$。

9

題型 5 向量的正射影

範例 9【配合課本例 7】

設平面上四點 $A(a,1)$，$B(2,a+1)$，$C(3,1)$，$D(-1,2)$，若 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 上的正射影為 $(2,b)$，則 $a=$______，$b=$______。

解

$\overrightarrow{AB}=(2-a,a)$，$\overrightarrow{CD}=(-4,1)$，

$\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 上的正射影為 $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{CD}\right|^2}\right)\overrightarrow{CD}=\dfrac{4a-8+a}{17}(-4,1)=\dfrac{5a-8}{17}(-4,1)$，

由題意知 $\dfrac{-20a+32}{17}=2$，所以 $a=-\dfrac{1}{10}$，$\dfrac{5a-8}{17}=b$，所以 $b=-\dfrac{1}{2}$。

範例 10【配合課本例 7】

設 $\overrightarrow{a}=(1,-2)$，有一單位向量 $\overrightarrow{u}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影為 $\left(-\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5}\right)$，則 $\overrightarrow{u}=$______。

解

設 $\overrightarrow{u}=(x,y)$，則 $\left|\overrightarrow{u}\right|=1\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1$，$x^2+y^2=1\cdots\cdots$①

又 $\overrightarrow{u}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影為 $\left(\dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{a}}{\left|\overrightarrow{a}\right|^2}\right)\overrightarrow{a}=\dfrac{x-2y}{5}(1,-2)=\left(-\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5}\right)$，

所以 $x-2y=-1\cdots\cdots$②

解①②，$(2y-1)^2+y^2=1\Rightarrow5y^2-4y=0$，所以 $y=0$ 或 $\dfrac{4}{5}$，代入②，

故 $\overrightarrow{u}=(x,y)=(-1,0)$ 或 $\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$。

類題 1

已知 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}=(2,-3)$ 上的正射影為 $(10,-15)$；$\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{c}=(8,2)$ 上的正射影為 $(-4,-1)$，則 $\overrightarrow{a}=$______。

解 設 $\overrightarrow{a}=(x,y)$，

$\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影為 $\left(\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{b}\right|^2}\right)\overrightarrow{b}=\dfrac{2x-3y}{13}(2,-3)=(10,-15)$，

所以 $2x-3y=65\cdots\cdots$①

又 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{c}$ 上的正射影為 $\left(\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}}{\left|\overrightarrow{c}\right|^2}\right)\overrightarrow{c}=\dfrac{8x+2y}{68}(8,2)=(-4,-1)$，

所以 $8x+2y=-34\cdots\cdots$②

解①②得 $x=1$，$y=-21$，即 $\overrightarrow{a}=(1,-21)$。

類題 2

設 $\overrightarrow{a}=(2,3)$，某一單位向量 $\overrightarrow{u}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影為 $\left(\dfrac{4}{13},\dfrac{6}{13}\right)$，則 $\overrightarrow{u}=$______。

解 設 $\overrightarrow{u}=(x,y)$，則 $\left|\overrightarrow{u}\right|=1\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1$，$x^2+y^2=1\cdots\cdots$①

又 $\overrightarrow{u}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影為 $\left(\dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{a}}{\left|\overrightarrow{a}\right|^2}\right)\overrightarrow{a}=\dfrac{2x+3y}{13}(2,3)=\left(\dfrac{4}{13},\dfrac{6}{13}\right)$，所以 $2x+3y=2\cdots\cdots$②

解①②得 $\left(\dfrac{2-3y}{2}\right)^2+y^2=1\Rightarrow\dfrac{4-12y+9y^2}{4}+y^2=1\Rightarrow13y^2-12y=0$，所以 $y=0$ 或 $\dfrac{12}{13}$，代入②，

故 $\overrightarrow{u}=(x,y)=(1,0)$ 或 $\left(-\dfrac{5}{13},\dfrac{12}{13}\right)$。

9

題型 6 向量正射影的應用

範例 11 【配合課本例 8】

將 $\overrightarrow{a}=(6,8)$ 分解成兩向量 $\overrightarrow{u}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 的和，其中 $\overrightarrow{u}\,/\!/\,\overrightarrow{b}$ 且 $\overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{b}$，而 $\overrightarrow{b}=(2,1)$。

則 $\overrightarrow{u}=$______，$\overrightarrow{v}=$______。

解

因為 $\overrightarrow{u}\,/\!/\,\overrightarrow{b}$，

所以令 $\overrightarrow{u}=(2t,t)$，$\overrightarrow{v}=(x,y)$，

又 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\Rightarrow(6,8)=(2t+x,t+y)$，即 $2t+x=6\cdots\cdots$①　　$t+y=8\cdots\cdots$②

又 $\overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{b}$，所以 $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{b}=0\Rightarrow 2x+y=0\cdots\cdots$③

由③得 $y=-2x$ 代入②，與①解聯立，

$\begin{cases}2t+x=6\\ t-2x=8\end{cases}\Rightarrow t=4$，$x=-2$，所以 $y=4$，

故 $\overrightarrow{u}=(8,4)$，$\overrightarrow{v}=(-2,4)$。

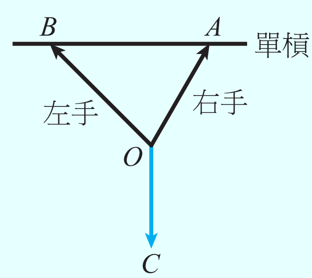
範例 12 【配合課本例 9】

阿悟玩單槓運動，當他雙手握住單槓，身體自然垂吊靜止不動在單槓上時，手臂的拉力與身體的重力示意圖如右圖所示。

若 $\angle AOB=75°$，$\angle AOC=150°$，$\angle OAB=60°$，設右手的拉力 60 公斤重，則

(1)左手的拉力為______公斤重。

(2)阿悟的體重為______公斤。



解

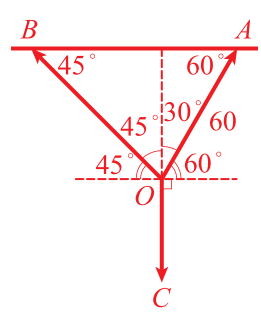
(1) 如右圖，因為身體靜止，所以右手水平拉力＝左手水平拉力，

設左手拉力 $=F$，即 $60\times\cos 60°=F\times\cos 45°$，故 $F=30\sqrt{2}$（公斤重）。

(2) 體重 $W=$ 右手垂直拉力＋左手垂直拉力

$=60\times\sin 60°+30\sqrt{2}\times\sin 45°$

$=30\sqrt{3}+30=30\left(\sqrt{3}+1\right)$（公斤）。



類題 1

設 $\overrightarrow{a}=(-3,4)$，$\overrightarrow{b}=(1,3)$，若 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$，且 $\overrightarrow{u}\,//\,\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{b}$，則

$\overrightarrow{u}=$______，$\overrightarrow{v}=$______。

解 因為 $\overrightarrow{u}\,//\,\overrightarrow{b}$，所以令 $\overrightarrow{u}=(t,3t)$，

令 $\overrightarrow{v}=(x,y)$，因為 $\overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{b}$，所以 $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{b}=0$，即 $x+3y=0\cdots\cdots$①

因為 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\Rightarrow(-3,4)=(t-x,3t-y)$，

所以 $t-x=-3\cdots\cdots$②　　$3t-y=4\cdots\cdots$③

由①得 $x=-3y$，代入② $\Rightarrow\begin{cases}t+3y=-3\cdots\cdots④\\3t-y=4\cdots\cdots③\end{cases}$

④ + ③ × 3 $\Rightarrow 10t=9$，$t=\dfrac{9}{10}$，$y=-\dfrac{13}{10}$，所以 $x=\dfrac{39}{10}$，即 $\overrightarrow{u}=\left(\dfrac{9}{10},\dfrac{27}{10}\right)$，$\overrightarrow{v}=\left(\dfrac{39}{10},-\dfrac{13}{10}\right)$。

類題 2

設 $A(a,1)$，$B(2,b)$，$C(3,4)$，O 是原點，若 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 上的正射影與 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 上的正射影相同，則 a，b 的關係式為______。

解 由題意得知 $\overrightarrow{OA}=(a,1)$，$\overrightarrow{OB}=(2,b)$，$\overrightarrow{OC}=(3,4)$，

所以 $\left(\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{\left|\overrightarrow{OC}\right|^2}\right)\overrightarrow{OC}=\left(\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{\left|\overrightarrow{OC}\right|^2}\right)\overrightarrow{OC}\Rightarrow\dfrac{3a+4}{25}=\dfrac{6+4b}{25}$，故 $3a-4b=2$。

主題三 柯西不等式

配合課本 P.174～P.179

1. 向量形式（幾何表示法）：

設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 是兩非零向量，由內積定義 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta$，$0^\circ\le\theta\le180^\circ$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right|=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\left|\cos\theta\right|\le\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|$，

即 $\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\ge\left|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right|$，此不等式稱為柯西不等式，

等號成立時 $\left|\cos\theta\right|=1\Rightarrow\theta=0^\circ$ 或 180°，即 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$。

2. 實數形式（坐標表示法）：

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，承1，柯西不等式可寫成 $\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2\ge\left|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right|^2$，

即 $\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(b_1^2+b_2^2\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2\right)^2$，等號成立時 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$，即 $a_1b_2=a_2b_1$，

又若 $a_1a_2b_1b_2\ne0$ 時，可得：$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$。

題型 7 柯西不等式

範例 13【配合課本例 10】

設 x ， y 為正實數，且 $x+2y=8$ ，試求 $\frac{9}{x}+\frac{2}{y}$ 的最小值為______，此時 $x=$______，

$y=$______。

解

由柯西不等式， $\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{2y}\right)^2\right]\left[\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}}\right)^2\right]\geq(3+2)^2$ ，

所以 $8\times\left(\frac{9}{x}+\frac{2}{y}\right)\geq 25\Rightarrow\frac{9}{x}+\frac{2}{y}\geq\frac{25}{8}$ ，

即最小值為 $\frac{25}{8}$ ，當有最小值時 $\frac{\sqrt{x}}{\frac{3}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{2y}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}}}\Rightarrow\frac{x}{3}=\frac{y}{1}$ ，

令 $x=3t$ ， $y=t$ 代回 $x+2y=8$ ，所以 $3t+2t=8\Rightarrow t=\frac{8}{5}$ ，故 $x=\frac{24}{5}$ ， $y=\frac{8}{5}$ 。

範例 14【配合課本例 11】

設 x ， y 為實數，已知 $x^2+y^2=13$ ，試求

(1) $2x+3y$ 的最大值為______，此時 $x=$______， $y=$______。

(2) $2x+3y$ 的最小值為______，此時 $x=$______， $y=$______。

解

(1) $\left(x^2+y^2\right)\left(2^2+3^2\right)\geq\left(2x+3y\right)^2$ ，所以 $\left(2x+3y\right)^2\leq 169\Rightarrow -13\leq 2x+3y\leq 13$ ，

即 $2x+3y$ 的最大值 13 ，此時 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$ ，

令 $x=2t$ ， $y=3t$ 代入 $2x+3y=13$ ，所以 $4t+9t=13\Rightarrow t=1$ ，即 $x=2$ ， $y=3$ 。

(2) 承(1)， $2x+3y$ 的最小值 -13 ，令 $x=2t$ ， $y=3t$ 代入 $2x+3y=-13$ 得 $t=-1$ ，即 $x=-2$ ， $y=-3$ 。

類題 1　設 x，y 均為正數，若 $x+y=10$，則 $\frac{9}{x}+\frac{4}{y}$ 的最小值為______，此時 $x=$______，$y=$______。

解　由柯西不等式，$\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2\right]\left[\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right)^2\right]\geq(3+2)^2$，

所以 $10\times\left(\frac{9}{x}+\frac{4}{y}\right)\geq 25\Rightarrow\frac{9}{x}+\frac{4}{y}\geq\frac{5}{2}$，

即可取得最小值為 $\frac{5}{2}$，此時 $\frac{\sqrt{x}}{\frac{3}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{y}}{\frac{2}{\sqrt{y}}}\Rightarrow\frac{x}{3}=\frac{y}{2}$，

令 $x=3t$，$y=2t$ 代回 $x+y=10$，$3t+2t=10$，所以 $t=2$，故 $x=6$，$y=4$。

類題 2　設 $(x+1)^2+(y-2)^2=13$，試求 $3x-2y$ 的最大值為______，最小值為______。

解　由柯西不等式，$\left[(x+1)^2+(y-2)^2\right]\left[3^2+(-2)^2\right]\geq(3x+3-2y+4)^2$

$\Rightarrow(3x-2y+7)^2\leq 169$

$\Rightarrow -13\leq 3x-2y+7\leq 13$

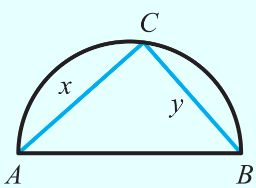
$\Rightarrow -20\leq 3x-2y\leq 6$，

所以 $3x-2y$ 的最大值 6，最小值 -20。

題型 8　柯西不等式的應用

範例 15【配合課本例 12】

在一個半圓形的泳池中，某人嘗試自由式和仰式的練習，練習的時候從 A 點出發，用自由式游到 C 點，再用仰式游到 B 點。用自由式游泳時，每秒可游 2 公尺，用仰式游泳時，每秒可游 1 公尺。已知泳池的直徑 $\overline{AB}=20\sqrt{5}$ 公尺，$\overline{AC}=x$ 公尺，$\overline{BC}=y$ 公尺，則



(1) $x^2+y^2=$______。

(2)從 A 出發到 C 點後，再到 B 點，游泳的時間最長為______秒。

解

(1) 因為泳池為半圓形，所以 $\angle ACB=90°$，故 $x^2+y^2=\left(20\sqrt{5}\right)^2\Rightarrow x^2+y^2=2000$（$x\geq 0$，$y\geq 0$）。

(2) 游泳的時間為 $\frac{x}{2}+y$（秒），

所以由柯西不等式 $\left(x^2+y^2\right)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2\right)\geq\left(\frac{x}{2}+y\right)^2$

$\Rightarrow 2000\times\frac{5}{4}\geq\left(\frac{x}{2}+y\right)^2\Rightarrow\left(\frac{x}{2}+y\right)^2\leq 2500$，即 $\frac{x}{2}+y\leq 50$，

故時間最長為 50 秒。

範例 16【配合課本例 12】

承上題，當游泳一趟（由 $A \to C \to B$）所花的時間最長時，此人用自由式和仰式各游了多少公尺？

解

承上題，當 $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=50$ 時，$\frac{x}{\frac{1}{4}}=\frac{y}{\frac{1}{3}} \Rightarrow 4x=3y \Rightarrow \frac{x}{3}=\frac{y}{4}$，

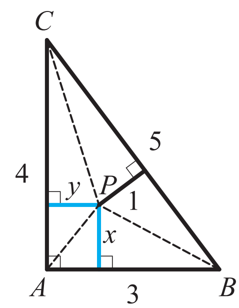
令 $x=3t$，$y=4t$ 代回 $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=50$，$\frac{3t}{4}+\frac{4t}{3}=\frac{25t}{12}=50$，所以 $t=24$，

即 $x=72$……自由式 72 公尺，

$y=96$……仰式 96 公尺。

類題 1

一個邊長為 $3-4-5$ 的直角三角形 ABC 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=5$，P 是三角形內部一點，如右圖所示。若 P 到 $\overline{AB}$ 的距離為 x，P 到 $\overline{AC}$ 的距離為 y，P 到 $\overline{BC}$ 的距離為 1，則



(1) $3x+4y=$______。

(2) $(x-1)^2+(y-2)^2$ 的最小值為______。

解 (1) 因為 $\triangle ABC$ 面積 $=\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$，

所以 $\frac{1}{2}(3x+4y+1\times 5)=6 \Rightarrow 3x+4y=7$。

(2) 由柯西不等式，$\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right](3^2+4^2)\geq(3x-3+4y-8)^2$，

所以 $(x-1)^2+(y-2)^2\geq\frac{16}{25}$，即最小值為 $\frac{16}{25}$。

類題 2

承上題，當 $(x-1)^2+(y-2)^2$ 有最小值時，此時 $x=$______，$y=$______。

解 承上題，當 $(x-1)^2+(y-2)^2$ 有最小值時，$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}$，

令 $x-1=3t$，即 $x=3t+1$，

$y-2=4t$，即 $y=4t+2$，

所以 $3x+4y=7 \Rightarrow 9t+3+16t+8=7$，

故 $25t=-4$，$t=-\frac{4}{25}$，即 $x=\frac{13}{25}$，$y=\frac{34}{25}$。

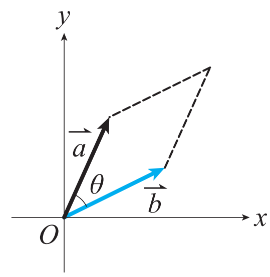
主題四　面積與二階行列式

配合課本 P.179～P.181

1. 二階行列式的定義：

符號$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$稱為二階行列式，且$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$。

2. 面積與二階行列式：



(1) 如右圖所示，坐標平面上兩非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，

設$\vec{a} = (a_1, a_2)$，$\vec{b} = (b_1, b_2)$且夾角為θ，

則$\vec{a}$與$\vec{b}$所決定的平行四邊形面積為

$$\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sqrt{1-\cos^2\theta} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sqrt{1-\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right) - \left(a_1b_1 + a_2b_2\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(a_1b_2 - a_2b_1\right)^2} = \left|a_1b_2 - a_2b_1\right| = \left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$$

（即兩向量$\vec{a}$，$\vec{b}$所決定的二階行列式的絕對值）。

(2) 承(1)，$\vec{a} = (a_1, a_2)$，$\vec{b} = (b_1, b_2)$所決定的三角形面積為$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$。

題型 9　面積與二階行列式

範例 17【配合課本例 13】

坐標平面上有三點$A(2,-2)$，$B(4,5)$，$C(1,3)$，則

(1) $\triangle ABC$的面積為______。

(2) $\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{AC}$所決定的平行四邊形面積為______。

解

(1) $\overrightarrow{AB} = (2,7)$，$\overrightarrow{AC} = (-1,5)$，所以$\triangle ABC$面積$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|10+7\right| = \frac{17}{2}$。

(2) 承(1)，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$所決定的平行四邊形面積為17。

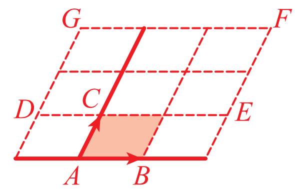
範例 18【配合課本例 14】

設 $A(3,-2)$，$B(-1,3)$，$C(1,2)$，若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，且 $-1\le x\le 2$，$1\le y\le 3$，則 P 點所形成的圖形區域面積為______。

解 作圖如右，$\overrightarrow{AB}=(-4,5)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,4)$，

所以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 所決定的平行四邊形面積為 $\left|\begin{vmatrix}-4 & 5\\ -2 & 4\end{vmatrix}\right|=|-16+10|=6$，

故所求 = 平行四邊形 $DEFG$ 面積 $=6\times 6=36$。



類題 1 設 $\triangle ABC$ 的三頂點坐標 $A(3,1)$，$B(2,3)$，$C(x,-1)$，若 $\triangle ABC$ 的面積為 7，則 $x=$______。

解 $\overrightarrow{AB}=(-1,2)$，$\overrightarrow{AC}=(x-3,-2)$，

所以 $\triangle ABC$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-1 & 2\\ x-3 & -2\end{vmatrix}\right|=7$

$\Rightarrow |2-2(x-3)|=14\Rightarrow |8-2x|=14$，

故 $8-2x=14$ 或 $8-2x=-14$，即 $x=-3$ 或 11。

類題 2 設 $A(1,a)$，$B(-3,4)$，$C(2,3)$ 三點共線，則 $a=$______。

解 因為 A，B，C 三點共線，所以 $\triangle ABC$ 面積 $=0$，又 $\overrightarrow{AB}=(-4,4-a)$，$\overrightarrow{AC}=(1,3-a)$，

所以 $\begin{vmatrix}-4 & 4-a\\ 1 & 3-a\end{vmatrix}=0\Rightarrow -12+4a-4+a=0$，故 $a=\dfrac{16}{5}$。

主題五 兩直線的夾角

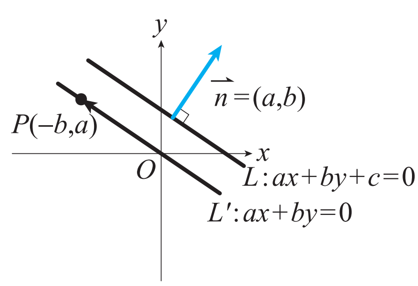
配合課本 P.182～P.184

1. 兩直線的夾角：

求直線的夾角，我們在第二冊時曾介紹利用斜率的方法來求，現在我們介紹利用向量的方法來求。

(1) 直線的法向量：

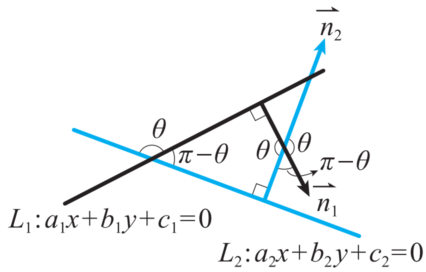
如右圖，與直線 L 垂直的向量稱為法向量，用符號 $\overrightarrow{n}$ 表示。作直線 $L'\,//\,L$ 且通過原點，則 L' 的方程式為 $ax+by=0$，在 L' 上任取異於 O 的一點，例如取 $P(-b,a)$，則 $\overrightarrow{OP}=(-b,a)$



（$\overrightarrow{OP}\,//\,L$，可稱為直線的方向向量），因為 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{OP}$，

所以 $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{OP}=0$，即可令 $\overrightarrow{n}=(a,b)$。（註：方向向量和法向量表示法均不唯一）

(2) 兩直線的夾角：設 L_1，L_2 的法向量分別為 $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$，且 $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$ 的夾角為 θ，則 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$，



其中 θ 亦為 L_1，L_2 的夾角之一，而 L_1，L_2 的另一夾角為 $\pi-\theta$，滿足 $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$。

故若 L_1，L_2 的夾角為 θ，且 L_1，L_2 的法向量分別為 $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$，

則 $\cos\theta=\pm\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$。

題型 10　直線的法向量

範例 19　【課本內容延伸題】

平面上一直線 L：$2x+3y=5$，則

(1) 下列哪些向量與直線 L 垂直？（多選）

①$(2,3)$　②$(-2,-3)$　③$(-3,2)$　④$(4,6)$　⑤$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$

(2) 下列哪些向量與直線 L 平行？（多選）

①$(2,3)$　②$(3,2)$　③$(-3,2)$　④$(3,-2)$　⑤$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$

解

(1) 因為直線的法向量 $\vec{n}=(2,3)$。

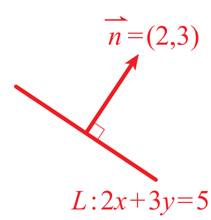
①○：$(2,3)\perp L$。

②○：$(-2,-3)\perp L$。

③✕：因為 $(-3,2)$ 不平行 $(2,3)$，所以 $(-3,2)$ 與 L 不垂直。

④○：$(4,6)\perp L$。

⑤○：因為 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)//(2,3)$，所以 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)\perp L$。



故選①②④⑤。

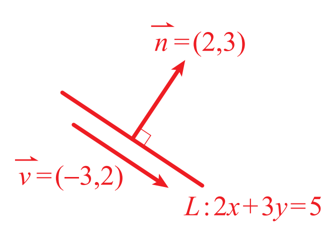
(2) ①✕：$(2,3)\perp L$。

②✕：因為 $(3,2)\cdot(2,3)\neq 0$，所以 $(3,2)$ 不平行 L。

③○：因為 $(-3,2)\cdot(2,3)=0$，所以 $(-3,2)\perp(2,3)$，即 $(-3,2)//L$。

④○：$(3,-2)//(-3,2)//L$。

⑤✕：因為 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)\cdot(2,3)\neq 0$，所以 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$ 不平行 L。



故選③④。

範例 20【課本內容延伸題】

通過點$(-3,1)$而且法向量為$(3,4)$的直線方程式為______。

解 所求為$3x+4y=-5$。

類題 1 設直線L：$3x-y=5$，則

(1)直線L的斜率為______。

(2)直線L的法向量可為______。

(3)直線L的方向向量可為______。

解 (1) $m=3$。

(2) $\overrightarrow{n}=(3,-1)$。

(3) $\overrightarrow{v}=(1,3)$。

類題 2 設直線L通過點$(2,-4)$且法向量為$(2,3)$，則L的方程式為______，又直線M垂直L且通過點$(-1,2)$，則M的方程式為______。

解 (1) L方程式：$2x+3y=-8$。

(2) 因為M與L垂直，所以M的法向量平行L，故M的法向量垂直L的法向量。

令M的法向量為$(3,-2)$，故方程式為$3x-2y=-7$。

題型 11 兩直線的夾角及應用

範例 21【配合課本例 15】

設直線L_1：$x-2y+5=0$，L_2：$x+3y+7=0$，則L_1與L_2的夾角為______。

解

L_1的法向量$\overrightarrow{n_1}=(1,-2)$，

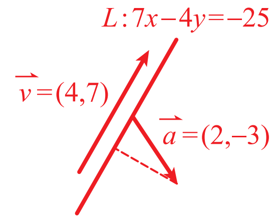
L_2的法向量$\overrightarrow{n_2}=(1,3)$，設$L_1$，$L_2$的夾角為$\theta$，

則$\cos\theta=\pm\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\pm\dfrac{1-6}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\pm\dfrac{-5}{5\sqrt{2}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，所以$\theta=45^\circ$或$135^\circ$。

範例 22【課本內容延伸題】

設 $\overrightarrow{a}=(2,-3)$，直線 $L：7x-4y=-25$，則 $\overrightarrow{a}$ 在直線 L 的正射影為______。

解 因為取 L 的法向量為 $(7,-4)$，



所以取 L 之方向向量 $\overrightarrow{v}=(4,7)$，所求即為 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{v}$ 的正射影，

故所求 $=\left(\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{v}\right|^2}\right)\overrightarrow{v}=\dfrac{8-21}{65}(4,7)=-\dfrac{1}{5}(4,7)=\left(-\dfrac{4}{5},-\dfrac{7}{5}\right)$。

類題 1 若直線 $mx-y=0$ 與 $3x+4y-1=0$ 的一夾角為 $45°$，則 $m=$______。

解 設 $L_1：mx-y=0$，法向量 $\overrightarrow{n_1}=(m,-1)$，

$L_2：3x+4y=1$，法向量 $\overrightarrow{n_2}=(3,4)$，

所以 $\cos 45°=\left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\right| \Rightarrow \left|\dfrac{3m-4}{\sqrt{m^2+1}\times 5}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

兩邊平方，$\dfrac{9m^2-24m+16}{25\left(m^2+1\right)}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow 25m^2+25=18m^2-48m+32$

$\Rightarrow 7m^2+48m-7=0$

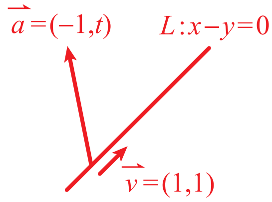
$\Rightarrow (7m-1)(m+7)=0$，

所以 $m=\dfrac{1}{7}$ 或 -7。

類題 2 設 $\overrightarrow{a}=(-1,t)$ 在直線 $x-y=0$ 的正射影為 $(2,2)$，則 $t=$______。

解 因為直線 $L：x-y=0$ 的法向量為 $(1,-1)$，

所以取 L 之方向向量為 $\overrightarrow{v}=(1,1)$，



故 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{v}$ 的正射影為 $\left(\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{v}\right|^2}\right)\overrightarrow{v}=\dfrac{t-1}{2}(1,1)=(2,2)$，

所以 $\dfrac{t-1}{2}=2$，故 $t=5$。

9

主題六 三角不等式

配合課本 P.184～P.185

1. 三角不等式（實數形式）：

(1) 設 a，b 為實數，則 $|a|+|b|\ge|a+b|$，等號成立時，a，b 同號或至少有一個為 0，即 $ab\ge 0$。

(2) 設 a，b 為實數，則 $\big||a|-|b|\big|\le|a-b|$，等號成立時，$a$，$b$ 同號或至少有一個為 0，即 $ab\ge 0$。

2. 三角不等式（向量形式）：

設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 為平面上任意向量，則 $\left|\overrightarrow{a}\right|+\left|\overrightarrow{b}\right|\ge\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|$，等號成立時，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 同方向或 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 其中有一為零向量。

題型 12 三角不等式及其應用

範例 23【課本內容延伸題】

有關下列不等式的敘述，哪些選項是正確的？（多選）

(1) 設 a，b 為實數，則 $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

(2) 設 a，b 為正數，則 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\ge 2$

(3) 設 a_1，a_2，b_1，b_2 為實數，則 $\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(b_1^2+b_2^2\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2\right)^2$

(4) 設 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 為兩非零向量，則 $\left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right|\ge\left|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right|$

(5) $|x|+|2-x|$ 的最小值 2，其中 x 為實數

解

(1) ╳：a，b 必須為非負實數。

(2) ○：$\dfrac{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}}{2}\ge\sqrt{\dfrac{b}{a}\times\dfrac{a}{b}}\Rightarrow\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\ge 2$。

(3) ○：由柯西不等式可知。

(4) ○：柯西不等式的向量表示法。

(5) ○：由三角不等式 $|x|+|2-x|\ge|x+(2-x)|=2$，所以最小值 2。

故選(2)(3)(4)(5)。

範例 24【課本內容延伸題】

下列各方程式中，請選出有實數解的選項。(多選)

(1) $|x|+|x-5|=1$　(2) $|x|+|x-5|=6$　(3) $|x|-|x-5|=1$

(4) $|x|-|x-5|=6$　(5) $|x|-|x-5|=-1$

【答對率 54%】105 學測

解　由三角不等式得知

$|x|+|x-5|=|x|+|5-x|\ge|x+(5-x)|=5$，

且 $||x|-|x-5||\le|x-(x-5)|=5\Rightarrow-5\le|x|-|x-5|\le5$，

所以方程式(2)(3)(5)有解。

類題 1　設 x 為實數，則 $|x+1|+|x-2|$ 的最小值為______，此時 x 的範圍為______。

解　由三角不等式 $|x+1|+|x-2|=|x+1|+|2-x|\ge|(x+1)+(2-x)|=3$，

所以最小值為 3，此時 $(x+1)(2-x)\ge0\Rightarrow(x+1)(x-2)\le0\Rightarrow-1\le x\le2$。

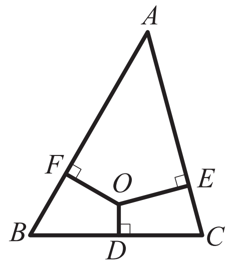
類題 2　設 x 為實數，方程式 $|x-1|+|x+7|=k$ 有解，則 k 的範圍為______。

解　因為 $|x-1|+|x+7|=|1-x|+|x+7|\ge|(1-x)+(x+7)|=8$，

所以當 $k\ge8$ 時，方程式有解。

A^{++} 挑戰題

1. 如右圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle A=45°$，$\angle B=60°$，且 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的對邊長分別為 a，b，c。又 O 是 $\triangle ABC$ 內部一點，$\overline{OD}\perp\overline{BC}$，$\overline{OE}\perp\overline{AC}$ 且 $\overline{OF}\perp\overline{AB}$，試回答下列問題：



(1) $a:b:c=$______。

(2) 若 $\overline{OD}=1$，$\overline{OE}=\overline{OF}=2$，則 $\triangle OBC$ 面積 ：$\triangle OCA$ 面積 ：$\triangle OAB$ 面積 $=$______。

(3) 若 $\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，其中 x，y 為實數，則 $x^2+y^2=$______。

解 (1) 因為 $\angle A=45°$，$\angle B=60°\Rightarrow\angle C=75°$，

所以由正弦定理，$a:b:c=\sin 45°:\sin 60°:\sin 75°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}:\dfrac{\sqrt{3}}{2}:\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$=2\sqrt{2}:2\sqrt{3}:\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$。（或 $2:\sqrt{6}:\left(\sqrt{3}+1\right)$）

(2) 承(1)，設 $\overline{BC}=a=2\sqrt{2}k$，$\overline{AC}=b=2\sqrt{3}k$，$\overline{AB}=c=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)k$，

$\triangle OBC$ 面積 ：$\triangle OCA$ 面積 ：$\triangle OAB$ 面積

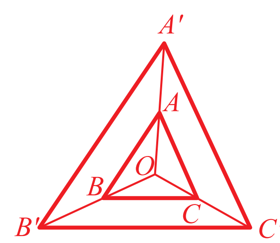
$=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}k\times 1:\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}k\times 2:\dfrac{1}{2}\times\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)k\times 2$

$=\sqrt{2}:2\sqrt{3}:\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$

$=1:\sqrt{6}:\left(\sqrt{3}+1\right)$。

(3) ① 說明：設 O 是 $\triangle ABC$ 內部一點，若 $l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，

則 $\triangle OBC$ 面積 ：$\triangle OCA$ 面積 ：$\triangle OAB$ 面積 $=l:m:n$。



令 $l\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$m\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$，$n\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC'}$，

則 $\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{0}$，所以 O 點為 $\triangle A'B'C'$ 的重心

$\Rightarrow\triangle OB'C'$ 面積 $=\triangle OC'A'$ 面積 $=\triangle OA'B'$ 面積

$\Rightarrow mn\times\triangle OBC$ 面積 $=nl\times\triangle OCA$ 面積 $=lm\times\triangle OAB$ 面積，

所以 $\triangle OBC$ 面積 ：$\triangle OCA$ 面積 ：$\triangle OAB$ 面積 $=l:m:n$。

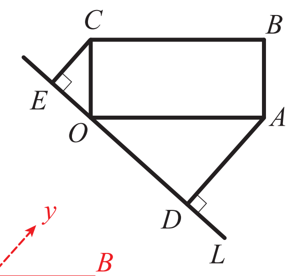
② 因為 $\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$

且 $\triangle OBC$ 面積 ：$\triangle OCA$ 面積 ：$\triangle OAB$ 面積 $=1:\sqrt{6}:\left(\sqrt{3}+1\right)$，

所以 $1:x:y=1:\sqrt{6}:\left(\sqrt{3}+1\right)$，即 $x=\sqrt{6}$，$y=\sqrt{3}+1$，

故 $x^2+y^2=6+4+2\sqrt{3}=10+2\sqrt{3}$。

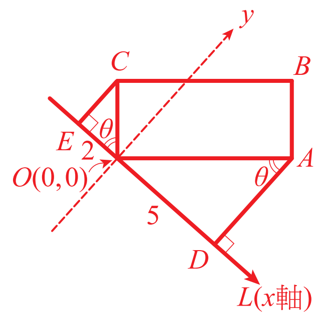
2. 如右圖，設 $OABC$ 為一矩形，L 是過 O 點的一直線，且 $\overline{AD}\perp L$，$\overline{CE}\perp L$，若 $\overline{OD}=5$，$\overline{OE}=2$，則 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=$______。



解 （法一）

將 L 視為 x 軸，O 視為原點，設 $\angle COE=\angle OAD=\theta$，

坐標化⇒令 $O(0,0)$，$D(5,0)$，$E(-2,0)$，



$\triangle AOD$ 中，$\cot\theta=\dfrac{\overline{AD}}{5}$，所以 $\overline{AD}=5\cot\theta$，

故 $A(5,5\cot\theta)$。

又 $\triangle COE$ 中，$\tan\theta=\dfrac{\overline{CE}}{2}$，所以 $\overline{CE}=2\tan\theta$，

故 $C(-2,2\tan\theta)$。

所求 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)\cdot\overrightarrow{OD}=(3,5\cot\theta+2\tan\theta)\cdot(5,0)=15$。

（法二）

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$$

$$=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OD}\right|\cos\angle AOD+\left|\overrightarrow{OC}\right|\left|\overrightarrow{OD}\right|\cos\angle COD=\left|\overrightarrow{OD}\right|\left|\overrightarrow{OD}\right|+\left(-\left|\overrightarrow{OE}\right|\right)\left|\overrightarrow{OD}\right|$$

$$=5\times5+(-2)\times5=15$$ 。

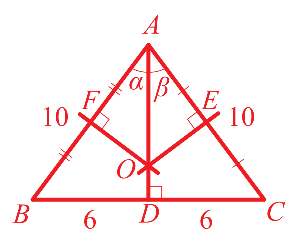
3. 設 O 點是 $\triangle ABC$ 的外心，$\overline{AB}=\overline{AC}=10$，$\overline{BC}=12$，則

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$______。

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=$______，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=$______。

(3) 若 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對 $(x,y)=$______。

解



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\times\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}{2\times\left|\overrightarrow{AB}\right|\times\left|\overrightarrow{AC}\right|}$

$=\dfrac{10^2+10^2-12^2}{2}=28$。

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AO}\right|\cos\alpha=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AF}\right|=10\times5=50$。

同理，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AO}\right|\cos\beta=\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AE}\right|=10\times5=50$。

(3) 因為 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，

所以 $50=100x+28y\cdots\cdots$①

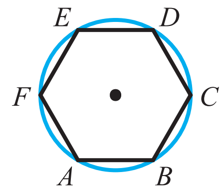
同理，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$，

所以 $50=28x+100y\cdots\cdots$②

①−②得 $72x-72y=0$，所以 $x=y$，代入①得 $x=y=\dfrac{25}{64}$，故數對 $(x,y)=\left(\dfrac{25}{64},\dfrac{25}{64}\right)$。

單元 9 精選試題

一 基礎題



1. 正六邊形 $ABCDEF$ 中，$\overrightarrow{AB}$ 與下列哪一個向量的內積最大？（單選）

(1) $\overrightarrow{AB}$　(2) $\overrightarrow{AC}$　(3) $\overrightarrow{AD}$　(4) $\overrightarrow{AE}$　(5) $\overrightarrow{AF}$

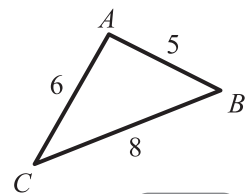
答 (2)

題型 1

2. 承1，設 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=1$，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=$______。

題型 1

答 $-\frac{1}{6}$



3. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=8$，則

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$______。

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$______。

題型 1

答 (1) $-\frac{3}{2}$　(2) $-\frac{53}{2}$

4. 設 $\vec{a}=(2,-3)$，$\vec{b}=(3,5)$，$\vec{c}=(-1,-2)$，則

(1) $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=$______。

(2) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=$______。

題型 2

答 (1) $(9,18)$　(2) $(-26,39)$

5. 設 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夾角為 $60°$，且 $\left|\vec{a}\right|=3$，$\left|\vec{b}\right|=6$，則 $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=$______。

題型 3

答 $3\sqrt{13}$

6. 設 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 是兩非零向量，若 $\left|\overrightarrow{u}\right|=2\left|\overrightarrow{v}\right|=\left|2\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}\right|=2$，且 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的夾角為 θ，則下列選項哪些是正確的？

(1) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-\dfrac{7}{2}$　(2) $\cos\theta=-\dfrac{7}{8}$　(3) θ 為鈍角　(4) $\left|\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}\right|=\sqrt{2}$

(5) $\left|2\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right|=2\sqrt{6}$　題型 3

答 (2)(3)(5)

7. 設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 垂直，且 $\left|\overrightarrow{a}\right|=4$，$\left|\overrightarrow{b}\right|=1$，又 $\overrightarrow{a}+(t-6)\overrightarrow{b}$ 與 $-\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ 垂直，則 $t=$______。

答 8 或 -2　題型 4

8. 設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}=(3,4)$ 垂直，且 $\left|\overrightarrow{a}\right|=10$，則 $\overrightarrow{a}=$______。　題型 4

答 $(8,-6)$ 或 $(-8,6)$

9. 坐標平面上，$A(2,-4)$，$B(3,2)$，O 是原點。設 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB}$ 且 $\overrightarrow{BC}/\!/\overrightarrow{OA}$，則 C 點坐標為______。

答 $(16,-24)$　題型 4

10. 設 $\overrightarrow{OA}=(-1,a)$，$\overrightarrow{OB}=(5,5)$，若 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OB}$ 上的正射影為 $(2,2)$，則 $a=$______。　題型 5

答 5

11. 已知 $\left|\overrightarrow{a}\right|=3$，$\left|\overrightarrow{b}\right|=1$ 且 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$，設 $\overrightarrow{x}=\sqrt{3}\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{y}=-\overrightarrow{a}+\sqrt{2}\overrightarrow{b}$，則

(1) $\left|\overrightarrow{x}\right|=$______，$\left|\overrightarrow{y}\right|=$______。

(2) $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}=$______。

(3) $\overrightarrow{x}$ 在 $\overrightarrow{y}$ 上的正射影長為______。　題型 5

答 (1) 6，$\sqrt{11}$　(2) $-9\sqrt{3}+3\sqrt{2}$　(3) $\dfrac{9\sqrt{33}-3\sqrt{22}}{11}$

12. 設 $\overrightarrow{a}=(3,5)$，$\overrightarrow{b}=(2,-1)$，若 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$，其中 $\overrightarrow{u}/\!/\overrightarrow{b}$ 且 $\overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{u}=$______，$\overrightarrow{v}=$______。　題型 6

答 $\left(\dfrac{2}{5},-\dfrac{1}{5}\right)$，$\left(\dfrac{13}{5},\dfrac{26}{5}\right)$

9

13. 設 x，y 為實數，且 $x-3y=-4$，則

(1) x^2+9y^2 的最小值為______。

(2)承(1)，當有最小值時，數對 $(x,y)=$______。 題型 7

答 (1) 8　(2) $\left(-2,\dfrac{2}{3}\right)$

14. 設 x，y 為實數，且滿足 $x^2+y^2-4x+2y-20=0$，若 $4x-3y$ 的最大值為 M，最小值為 m，則數對 $(M,m)=$______。 題型 7

答 $(36,-14)$

15. 設點 P 在方程式 $x^2+y^2-2x+2y+1=0$ 的圖形上，則 P 點到直線 $3x+4y=9$ 的最大距離為______，此時 P 點的坐標為______。 題型 8

答 3，$\left(\dfrac{2}{5},-\dfrac{9}{5}\right)$

16. 設 $A(1,-2)$，$B(-2,3)$，$C(-4,-5)$，$D(2,-2)$，則 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 所決定的平行四邊形面積為______。 題型 9

答 39

17. 坐標平面上，直線 L 的方程式為 $3x+4y=12$，則下列選項哪些是正確的？（多選）

(1) L 的斜率為 $\dfrac{3}{4}$　(2) L 的法向量可為 $(3,4)$　(3) L 的法向量可為 $(-6,-8)$

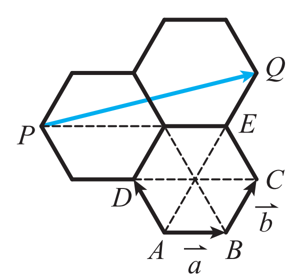
(4) L 的方向向量可為 $(-4,3)$

(5)若 L 與另一直線 M：$2x-y=3$ 的銳夾角為 θ，則 $\cos\theta=\dfrac{2}{5}$ 題型 10 題型 11

答 (2)(3)(4)

二 進階題

18. 如右圖，三個相鄰的正六邊形邊長都是 3，設 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，則



(1)用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 來表示 $\overrightarrow{PQ}$，則 $\overrightarrow{PQ}=$______。

(2) $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AD}=$______。

答 (1) $3\vec{a}+\vec{b}$　(2) -9

題型 1

19. 平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=6$，則

(1) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$______。　(2) $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=$______。

題型 1　題型 3

答 (1) 20　(2) 12

20. 關於向量內積的性質，回答下列問題：

(1) 設 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，$O$，$A$，$B$，$C$ 是坐標平面上相異四點，則 O 點是 $\triangle ABC$ 的______心（填重，外，內，垂）。

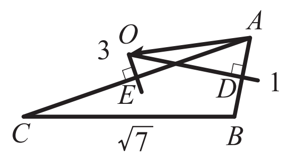
(2) 設 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$，且 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-2$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=-6$，則 $\left|\overrightarrow{a}\right|=$______。

(3) 設 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$，且 $\left|\overrightarrow{a}\right|=2$，$\left|\overrightarrow{b}\right|=3$，$\left|\overrightarrow{c}\right|=4$，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$______。

題型 3

答 (1)重　(2) $2\sqrt{2}$　(3) $\frac{3}{2}$

21. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=\sqrt{7}$，$\overline{AC}=3$，設 O 點是 $\triangle ABC$ 的外心（三邊中垂線的交點），如右圖（右圖為示意圖）所示，則



(1) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=$______。

(2) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=$______。

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$______。

(4) 若 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則 $x=$______，$y=$______。

題型 1

答 (1) $\frac{1}{2}$　(2) $\frac{9}{2}$　(3) $\frac{3}{2}$　(4) $-\frac{1}{3}$，$\frac{5}{9}$

22. 設 θ 為廣義角，但 $\theta\neq k\pi$（$k\in\mathbb{Z}$），則 $\frac{4}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}$ 的最小值為______。

題型 7

答 9

23. 設 a 是實數，$\triangle ABC$ 的三頂點 $A(a+1,1)$，$B(a+3,2a+1)$，$C(-5,3a+3)$，若 $\triangle ABC$ 的面積為 12，則 $a=$______。

題型 9

答 -10 或 1 或 -2 或 -7

24. 設直線 L 過點 $\left(2,2\sqrt{3}\right)$，且與直線 M：$x+\sqrt{3}y=3$ 的夾角為 60°，則 L 的方程式為______。

答 $x=2$ 或 $x-\sqrt{3}y=-4$

題型 11

三 大考試題

25. $\triangle ABC$ 內接於圓心為 O 之單位圓。若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，則 $\angle BAC$ 之度數為何？（單選）

(1) $30°$　(2) $45°$　(3) $60°$　(4) $75°$　(5) $90°$

【答對率 27%】107 學測

答 (4)

26. 已知坐標平面上 $\triangle ABC$，其中 $\overrightarrow{AB}=(-4,3)$，且 $\overrightarrow{AC}=\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$。試選出正確的選項。（多選）

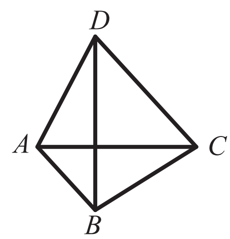
(1) $\overline{BC}=5$　(2) $\triangle ABC$ 是直角三角形　(3) $\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{11}{5}$　(4) $\sin B>\sin C$

(5) $\cos A>\cos B$

【答對率 41%】107 學測

答 (2)(3)

27. 如圖（此為示意圖），A，B，C，D 為平面上的四個點。已知 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BD}$ 兩向量等長且互相垂直，則 $\tan\angle BAD=$______。



答 -3

【答對率 17%】108 學測

28. 設點 $A(-2,2)$、$B(4,8)$ 為坐標平面上兩點，且點 C 在二次函數 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形上變動。當 C 點的 x 坐標為______時，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 有最小值______。

【答對率 37%】101 學測

答 -1，-3

29. 令 $\overrightarrow{A}$、$\overrightarrow{B}$ 為坐標平面上兩向量。已知 $\overrightarrow{A}$ 的長度為1，$\overrightarrow{B}$ 的長度為2且 $\overrightarrow{A}$ 與 $\overrightarrow{B}$ 之間的夾角為 $60°$。令 $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$，$\overrightarrow{v}=x\overrightarrow{A}+y\overrightarrow{B}$，其中 x、y 為實數且符合 $6\le x+y\le 8$ 以及 $-2\le x-y\le 0$，則內積 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ 的最大值為______。

【答對率 11%】102 學測

答 31

30. 設 $\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$ 為兩個長度皆為1的向量。若 $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{u}$ 的夾角為 $75°$，則 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的內積為______。

【答對率 31%】103 學測

答 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

31. 坐標平面上 O 為原點，設 $\overrightarrow{u}=(1,2)$，$\overrightarrow{v}=(3,4)$。令 Ω 為滿足 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{u}+y\overrightarrow{v}$ 的所有點 P 所形成的區域，其中 $\dfrac{1}{2}\le x\le 1$，$-3\le y\le\dfrac{1}{2}$，則 Ω 的面積為______平方單位。（化成最簡分數）

答 $\dfrac{7}{2}$

【答對率 22%】105 學測

32. 在坐標平面上，有一通過原點 O 的直線 L，以及一半徑為2、圓心為原點 O 的圓 Γ。P, Q 為 Γ 上相異2點，且 $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ 分別與 L 所夾的銳角皆為 $30°$，試選出內積 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 之值可能發生的選項。

(1) $2\sqrt{3}$　(2) $-2\sqrt{3}$　(3) 0　(4) -2　(5) -4。

109 學測

答 (4)(5)

9