8 平面向量

教學流程圖

平面向量

↓

向量的表示法 →
1. 向量的定義
2. 幾何表示法
3. 坐標表示法

↓

向量的加法與減法 →
1. 向量的加法（合成）
   ①三角形法　②平行四邊形法
2. 向量的減法（分解）

↓

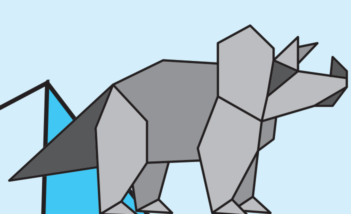
向量的係數積 →
1. 向量的係數積
2. 向量的平行

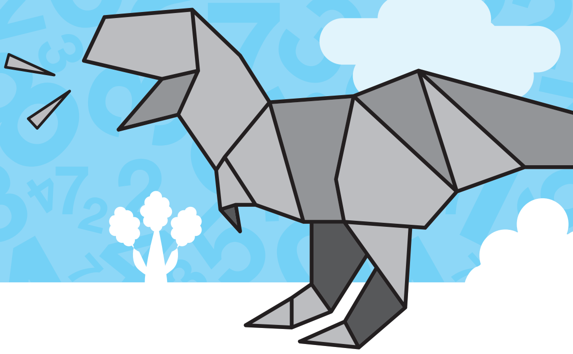
↓

向量的線性組合 →
1. 線性組合的意義
2. 三點共線的性質

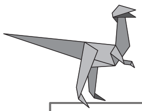
↓

分點公式 →
1. 分點公式（幾何表示法）
2. 分點坐標公式





8 平面向量



主題一 向量的表示法

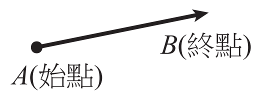
配合課本 P.130～P.134

1. 向量的定義：

具有大小、方向的物理量稱為向量，例如：位移、力、速度…等。

2. 向量的幾何表示法：

$\overrightarrow{AB}$（讀作 AB 向量或向量 AB ）：表示以 A 為始點，B 為終點，方向是由 A 指向 B 的向量。如右圖所示。



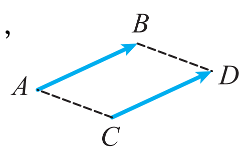
(1) 向量的長度（大小）：$\overrightarrow{AB}$ 的長度以 $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 表示，大小即是 $\overline{AB}$ 。

(2) 始點和終點為同一點的向量稱為零向量，記作 $\overrightarrow{0}$ ，其長度為 0 。

(3) 單位向量：長度為1的向量稱為單位向量。任何一個非零向量 $\overrightarrow{AB}$ 均可表示成同方向的單位向量 $\overrightarrow{u}$ 與其長度 $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 的乘積。即若 $\overrightarrow{AB}$ 與單位向量 $\overrightarrow{u}$ 同方向，

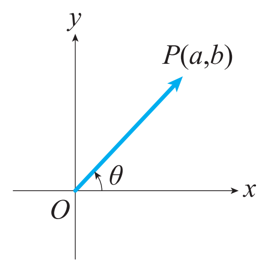
則 $\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\overrightarrow{u}$ 。

(4) 向量相等：若 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 兩向量長度（大小）相等，方向相同，則此二向量相等，記為 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ，如右圖。



3. 向量的坐標表示法：

(1) 在坐標平面上，以原點為始點的向量稱為位置向量，如右圖所示。



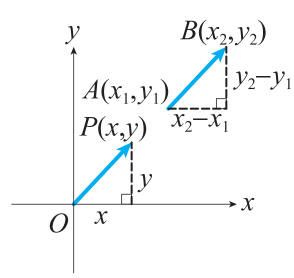
(2) 設 $\overrightarrow{OP}$ 為位置向量，且終點 $P(a,b)$ ，則 $\overrightarrow{OP}=(a,b)$ ，

其中 a 稱為 $\overrightarrow{OP}$ 的 x 分量，b 稱為 $\overrightarrow{OP}$ 的 y 分量。

(3) 在坐標平面上，若 $A(x_1,y_1)$ ， $B(x_2,y_2)$ ，如右圖，

取 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}$ ，因為 $x=x_2-x_1$ ， $y=y_2-y_1$ ，

所以 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$ 。



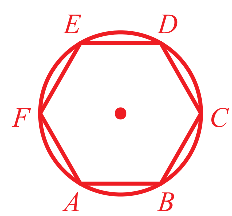
(4) 設 $\overrightarrow{OP}=(a,b)$ 且 $\overrightarrow{OP}$ 與 x 軸正向所夾的有向角為 θ，則稱 θ 為方向角（$0\le\theta<2\pi$），且 $a=\left|\overrightarrow{OP}\right|\cos\theta$，$b=\left|\overrightarrow{OP}\right|\sin\theta$，其中 $\left|\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{a^2+b^2}$。

題型 1　向量的表示法

範例 1　【配合課本例 1】

(1) 一個正六邊形的六個邊，可決定______個不同的向量。
(2) 一個正六邊形的六個頂點，可決定______個不同的向量。

解　如右圖。



(1) 六個邊可決定 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DC}$ 等 6 個不同的向量。
(2) 令正六邊形的邊長長度為 1 單位，分類（歸納法）

①長度為 1 單位的：$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DC}$，共 6 個。

②長度為 $\sqrt{3}$ 單位的：$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{EC}$，共 6 個。

③長度為 2 單位的：$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{CF}$，$\overrightarrow{FC}$，共 6 個。

所以共有 18 個不同向量。

範例 2　【配合課本例 2】

(1) 坐標平面上有三點，$P(5,2)$，$Q(-3,-4)$，$R(6,-1)$，則 $\overrightarrow{PQ}=$______，又 $\left|\overrightarrow{RQ}\right|=$______。

(2) 有一平行四邊形的三個頂點為 $(3,2)$，$(-1,5)$，$(3,7)$，則此平行四邊形的另一頂點為______。

解

(1) $\overrightarrow{PQ}=(-3-5,-4-2)=(-8,-6)$，$\overrightarrow{RQ}=(-3-6,-4+1)=(-9,-3)$，

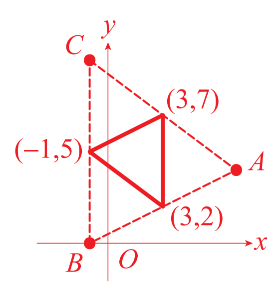
所以 $\left|\overrightarrow{RQ}\right|=\sqrt{(-9)^2+(-3)^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$。

(2) 如右圖，另一頂點有三解，

$A(3+3-(-1),7+2-5)=(7,4)$，

$B(3-1-3,2+5-7)=(-1,0)$，

$C(3-1-3,7+5-2)=(-1,10)$。

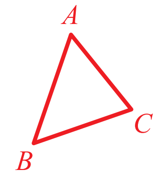


類題 1

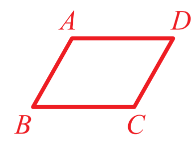
(1) 一個三角形的三個頂點可決定______個不同的向量。

(2) 一個平行四邊形的四個邊可決定______個不同的向量。

解 (1) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CA}$，共 6 個不同的向量。



(2) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CB}$，共 4 個不同的向量。



類題 2

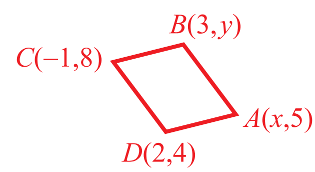
坐標平面上，$A(x,5)$，$B(3,y)$，$C(-1,8)$，$D(2,4)$。

(1) 若 $\overrightarrow{AB}=(3,-2)$，則 $x=$______，$y=$______。

(2) 若 $ABCD$ 為平行四邊形，則 $x=$______，$y=$______。

解 (1) $\overrightarrow{AB}=(3-x,y-5)=(3,-2)$，所以 $x=0$，$y=3$。

(2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow(3-x,y-5)=(-3,4)$，所以 $x=6$，$y=9$。

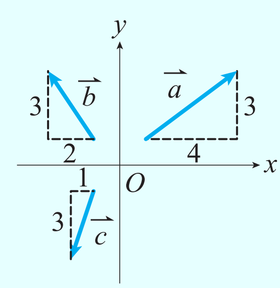


題型 2 向量的方向角應用

範例 3 【課本內容延伸題】

(1) 如右圖，利用坐標形式表示 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 三個向量。

(2) 設 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=4$，且 $\overrightarrow{AB}$ 的方向角為$120°$，若 $A(3,3\sqrt{3})$，則 B 點坐標為______。



解

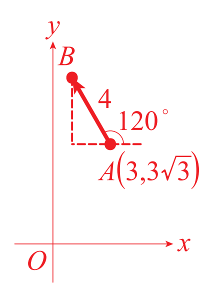
(1) $\overrightarrow{a}=(4,3)$，$\overrightarrow{b}=(-2,3)$，$\overrightarrow{c}=(-1,-3)$。

(2) 設 $B(x,y)$，則

$x=3+4\times\cos 120°=3-2=1$，

$y=3\sqrt{3}+4\times\sin 120°=3\sqrt{3}+2\sqrt{3}=5\sqrt{3}$，

所以 $B(1,5\sqrt{3})$。



範例 4　**【課本內容延伸題】**

設 $A(2,1)$，$B(x,-1)$，$C(5,x)$，$D(x+1,x-4)$，若 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$，則

(1) $x=$______。

(2) 若 $\overrightarrow{AB}$ 的方向角為 θ，則 $\cos\theta=$______，$\sin\theta=$______。

解

(1) $\overrightarrow{AB}=(x-2,-2)$，$\overrightarrow{CD}=(x-4,-4)$，

因為 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right| \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+4}=\sqrt{(x-4)^2+16} \Rightarrow x^2-4x+8=x^2-8x+32$，

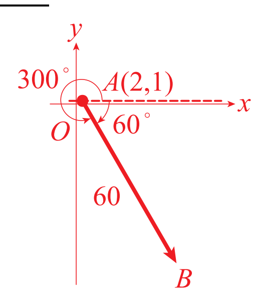
所以 $4x=24$，$x=6$。

(2) 承(1)，$\overrightarrow{AB}=(4,-2)$，所以 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$，

故 $\cos\theta=\dfrac{4}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta=\dfrac{-2}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{-2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{-1}{\sqrt{5}}$。

類題 1　冬天是捕烏魚的好時機。設一艘漁船由港口 $A(2,1)$ 出發，往東 $60°$ 南的方向航行至距離 60 海浬（設坐標平面上 1 單位長 = 1 海浬）的 B 點捕魚，則 B 點坐標為______。

解　設 $B(x,y)$，則



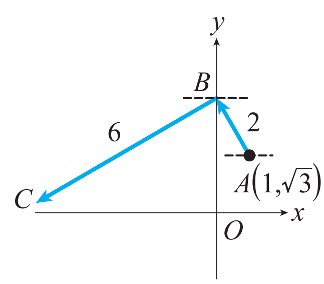
$x=2+60\times\cos300°=2+60\times\dfrac{1}{2}=32$，

$y=1+60\times\sin300°=1+60\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-30\sqrt{3}$，

所以 $B\left(32,1-30\sqrt{3}\right)$。

類題 2　如右圖，$\overrightarrow{AB}$ 的方向角 $120°$，$\overrightarrow{BC}$ 的方向角 $210°$，

又 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2$，$\left|\overrightarrow{BC}\right|=6$，則 C 點坐標為______。



解　設 $C(x,y)$，則

$x=1+2\times\cos120°+6\times\cos210°=1-1-3\sqrt{3}=-3\sqrt{3}$，

$y=\sqrt{3}+2\times\sin120°+6\times\sin210°=\sqrt{3}+\sqrt{3}+6\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-3+2\sqrt{3}$，

故 $C\left(-3\sqrt{3},-3+2\sqrt{3}\right)$。

主題二 向量的加法與減法

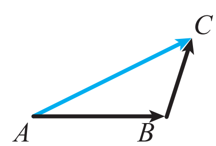
配合課本 P.134～P.138

1. 向量的和：（加法）

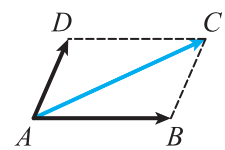
(1) 三角形法則：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，如圖（一）。

(2) 平行四邊形法則：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，如圖（二）。

(3) 設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，則 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$。



圖（一）



圖（二）

2. 向量加法的性質：

(1) 具有交換律：$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$。

(2) 具有結合律：$\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right)$。

(3) 具有加法單位元素：$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{a}$，其中 $\overrightarrow{0}$ 讀作零向量，即 $\overrightarrow{0}=(0,0)$。

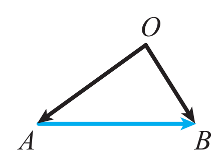
(4) 具有加法反元素：$\overrightarrow{a}+\left(-\overrightarrow{a}\right)=\overrightarrow{0}$，$-\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{a}$ 的大小相等，方向相反，

稱 $-\overrightarrow{a}$ 為 $\overrightarrow{a}$ 的反向量。

3. 向量的差：（減法）

(1) $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$。

(2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，$O$ 為任意一點。



(3) 設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，

則 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)$。

題型 3　向量的加法與減法

範例 5　【配合課本例 3、4】

已知 $\overrightarrow{AB}=(2,13)$，$\overrightarrow{AD}=(15,8)$，$\overrightarrow{DC}=(-6,1)$，則

(1) $\overrightarrow{CA}=$______。　　(2) $\overrightarrow{CB}=$______。

解

(1) 因為 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=(15,8)+(-6,1)=(9,9)$，

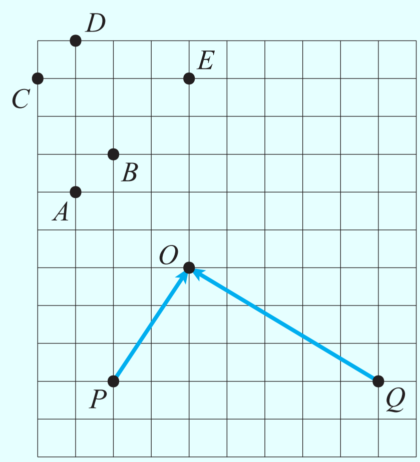
所以 $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}=(-9,-9)$。

(2) $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=(2,13)-(9,9)=(-7,4)$。

範例 6　【配合課本例 3、4】

如右圖的方格圖（每個小方格均為正方形）中，下列哪一個選項中的向量與另兩個向量 $\overrightarrow{PO}$，$\overrightarrow{QO}$ 的和（即三個向量的和）等於零向量？（單選）

(1) $\overrightarrow{AO}$　(2) $\overrightarrow{BO}$　(3) $\overrightarrow{CO}$　(4) $\overrightarrow{DO}$　(5) $\overrightarrow{EO}$



解

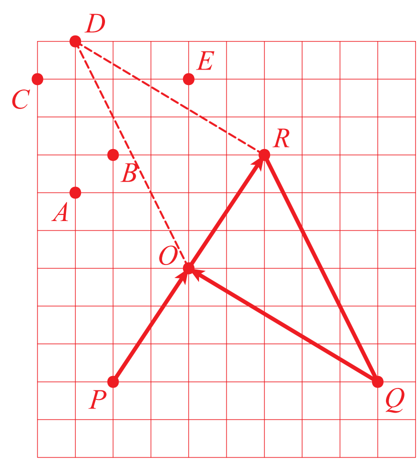
取 $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{PO}$，利用平行四邊形法則知 $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OD}$，作圖如右，

$\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{QO}=\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{QO}=\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{QR}$，

又 $\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{QR}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$

即 $\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{0}$，故選(4)。



類題 1

坐標平面上有四個點 $A(-1,4)$，$B(3,-1)$，$C(5,8)$，$D(-2,-4)$，則

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=$ ______。　　(2) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=$ ______。

解 (1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(4,-5)+(-7,-12)=(-3,-17)$。

(2) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=(6,4)-(-5,-3)=(11,7)$。

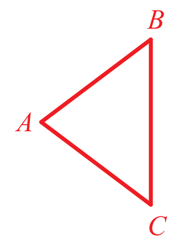
類題 2

設 $\overrightarrow{AB}=(4,3)$，$\overrightarrow{BC}=(0,-6)$，則 $\triangle ABC$ 的周長為______。

解 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4^2+3^2}=5$，$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{0^2+(-6)^2}=6$，

又 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(4,-3)$，

所以 $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$，故 $\triangle ABC$ 周長 $=5+6+5=16$。



主題三　向量的係數積

配合課本 P.138～P.144

1. 向量的係數積：

(1) 設 $\vec{a}$ 是平面上非零向量，r 是實數，則 $r\vec{a}$ 稱為 $\vec{a}$ 的係數積。

①若 $r>0$，則 $r\vec{a}$ 方向與 $\vec{a}$ 相同，且長度為 $\left|\vec{a}\right|$ 的 r 倍。

②若 $r=0$，則 $r\vec{a}=\vec{0}$。

③若 $r<0$，則 $r\vec{a}$ 方向與 $\vec{a}$ 相反，且長度為 $\left|\vec{a}\right|$ 的 $|r|$ 倍。

(2) 若 $\vec{a}=\vec{0}$，則對任意實數 r，$r\vec{a}=\vec{0}$。

2. 向量係數積的性質：

設 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 為平面上兩向量，m，n 為實數，則

(1) $m\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=m\vec{a}+m\vec{b}$。

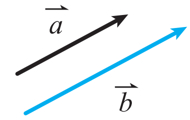
(2) $(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$。

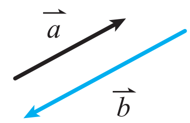
(3) $r\left(s\vec{a}\right)=rs\vec{a}$。

(4) 若 $\vec{a}=(a_1,a_2)$，則 $m\vec{a}=(ma_1,ma_2)$。

3. 向量的平行：

設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 為非零向量，當 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的方向相同或相反時，稱兩向量平行，記作 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$，如右圖所示。





(1) 若 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{a}=r\overrightarrow{b}$，$r$ 為實數。

(2) 設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，若 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{a}=r\overrightarrow{b}$，

且若分量 $\neq 0$，則亦可表為 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$。

題型 4　向量的係數積

範例 7　【配合課本例 5】

設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 為兩兩不平行的非零向量，且化簡 $2\overrightarrow{a}-3\left(\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{c}\right)+2\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right)$

$=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}+z\overrightarrow{c}$，則 $x=$______，$y=$______，$z=$______。

解

左式 $=2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}-6\overrightarrow{c}+2\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{c}$

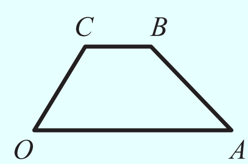
$=4\overrightarrow{a}-5\overrightarrow{b}-4\overrightarrow{c}$，

所以 $x=4$，$y=-5$，$z=-4$。

範例 8　【配合課本例 6】

如右圖，梯形 $OABC$ 中，$\overline{OA}\,//\,\overline{BC}$，且 $\overline{OA}=3\overline{CB}$，若 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{c}$，

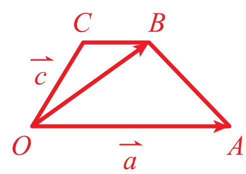
且 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{c}$，則下列哪些選項是正確的？（多選）



(1) $m<0$　(2) $m=-\dfrac{1}{3}$　(3) $n>0$　(4) $n=1$　(5) $m+n=-\dfrac{1}{3}$

解

因 $\overrightarrow{CB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{a}$，由向量的分解得知



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}\right)-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{c}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{a}-\overrightarrow{a}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}$，

所以 $m=-\dfrac{2}{3}$，$n=1\Rightarrow m+n=\dfrac{1}{3}$，

故選(1)(3)(4)。

類題 1

設 $\overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{b}$ 為兩不平行的非零向量，且 $\frac{2}{3}\left(2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}\right)+2\left(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{b}\right)=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ ，

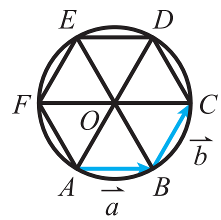
則 $\overrightarrow{x}=$______（用 $\overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{b}$ 表示）。

解 原式：$\frac{4}{3}\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{x}-2\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\Rightarrow 2\overrightarrow{x}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ ，

所以 $\overrightarrow{x}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{a}-\frac{1}{2}\overrightarrow{b}$ 。

類題 2

如右圖，正六邊形 $ABCDEF$ 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}$ ，則下列選項哪些是正確的？



(1) $\overrightarrow{CF}=-2\overrightarrow{a}$　(2) $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{b}$　(3) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$

(4) $\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$　(5) $\overrightarrow{DF}=-\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$

解 (1) ○：$\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{BA}=-2\overrightarrow{a}$ 。

(2) ╳：$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{b}$ 。

(3) ○：$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BO}$ ，且 $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BC}$ ，即 $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$ ，所以 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$ 。

(4) ○：$\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{FO}\Rightarrow\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}$ ，所以 $\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 。

(5) ○：$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 。

故選(1)(3)(4)(5)。

題型 5 向量係數積的應用

範例 9 【課本內容延伸題】

設 $\overrightarrow{a}=(1,2)$ ，$\overrightarrow{b}=(4,3)$ ，若存在一實數 t ，使得 $\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|$ 為最小，則此最小值為______，又此時 $t=$______。

解

$\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}=(1,2)+(4t,3t)=(4t+1,3t+2)$ ，

所以 $\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{(4t+1)^2+(3t+2)^2}=\sqrt{25t^2+20t+5}$

$=\sqrt{25\left(t^2+\frac{4}{5}t\right)+5}=\sqrt{25\left(t+\frac{2}{5}\right)^2+1}$ ，

故當 $t=-\frac{2}{5}$ 時，$\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|$ 有最小值 1 。

範例 10【配合課本例 8】

設 $\overrightarrow{a}=(-2,3)$，$\overrightarrow{b}=(1,-2)$，$\overrightarrow{c}=(-3,7)$，若 $\left(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right)$ 平行 $\overrightarrow{c}$，則 $t=$______。

解

$\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}=(-2,3)+(t,-2t)=(t-2,3-2t)$，

因為 $\left(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right)//\overrightarrow{c}$，所以 $\dfrac{t-2}{-3}=\dfrac{3-2t}{7}\Rightarrow 7t-14=-9+6t$，故 $t=5$。

類題 1　設 $\overrightarrow{a}=(1,1)$，$\overrightarrow{b}=(3,7)$，若存在一實數 t，使得 $\left|t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|$ 為最小，則此最小值為______，又此時 $t=$______。

解　$t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(t,t)+(3,7)=(t+3,t+7)$

$\Rightarrow\left|t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{(t+3)^2+(t+7)^2}=\sqrt{2t^2+20t+58}$

$=\sqrt{2(t^2+10t)+58}=\sqrt{2(t+5)^2+8}$，

所以當 $t=-5$ 時，有最小值 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$。

類題 2　設 $A(2,-1)$，$B(-3,5)$，$C(x,3)$，$D(2x+1,-x)$，若 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$，則 $x=$______。

解　$\overrightarrow{AB}=(-5,6)$，$\overrightarrow{CD}=(x+1,-x-3)$，

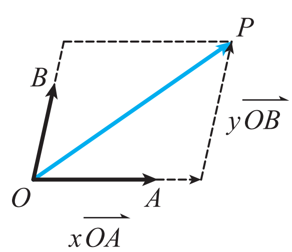
因為 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$，所以 $\dfrac{-5}{x+1}=\dfrac{6}{-x-3}\Rightarrow 5x+15=6x+6$，故 $x=9$。

主題四　向量的線性組合

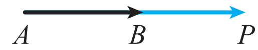
配合課本 P.145～P.148

1. 線性組合的意義：

設 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 是平面上兩不平行的非零向量，則平面上的任何一個向量 $\overrightarrow{OP}$，必能唯一表示成 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中 x，y 為實數。這種表示方法稱為將 $\overrightarrow{OP}$ 表成 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 的線性組合。如右圖所示。



2. 三點共線的性質：



(1) 設 A，B，P 三點共線，則 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$，$t$ 為實數。

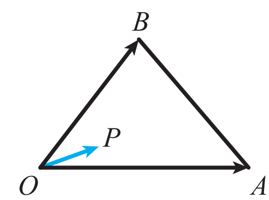
(2) 承(1)，設 O 為任意點，

因為 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，

所以若 A，B，P 三點共線，則存在唯一一組實數 α，β 使得 $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ 且 $\alpha+\beta=1$。

3. 線性組合的應用：



設 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 為平面上兩不平行非零向量，已知存在實數 α，β 使得 $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$。

(1) 若 $\alpha>0$，$\beta>0$ 且 $\alpha+\beta<1$，則 P 點落在 $\triangle OAB$ 的內部（不含邊界）。

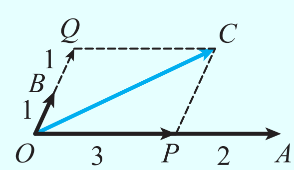
(2) 若 $\alpha>0$，$\beta>0$ 且 $\alpha+\beta>1$，則 P 點落在 $\triangle OAB$ 的外部（不含邊界）。

(3) 若 $\alpha<0$ 或 $\beta<0$，則 P 點落在 $\triangle OAB$ 的外部，且不在射線 OA，OB 所夾使 $\angle AOB<180^\circ$ 的區域內。

(4) 若 $t_1<t_2$，$k_1<k_2$，且 $t_1\le\alpha\le t_2$，$k_1\le\beta\le k_2$，則 P 點所圍的區域為一平行四邊形（含內部）。

題型 6 向量的線性組合

範例 11 【配合課本例 9】



如右圖，$OPCQ$ 為平行四邊形，設 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=5$，$\left|\overrightarrow{OB}\right|=1$，且 $\left|\overrightarrow{OP}\right|=3$，$\left|\overrightarrow{OQ}\right|=2$，若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，則 $x=$______，$y=$______。

解 由圖形得知

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$，

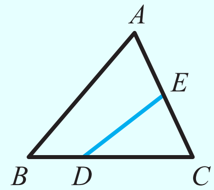
所以 $x=\frac{3}{5}$，$y=2$。

範例 12 【配合課本例 9】

如右圖，D 在 $\overline{BC}$ 上，且 $\overline{CD}=2\overline{BD}$，$E$ 為 $\overline{AC}$ 的中點，

(1) 若 $\overrightarrow{ED}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}$，則數對 $(x,y)=$______。

(2) 若 $\overrightarrow{ED}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則數對 $(\alpha,\beta)=$______。



解

(1) 因為 $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CE}$

$\Rightarrow \overrightarrow{ED}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$，

所以數對 $(x,y)=\left(-\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$。

(2) 承(1)，$\overrightarrow{ED}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$

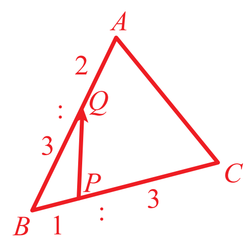
$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$，

所以數對 $(\alpha,\beta)=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{6}\right)$。

類題 1

$\triangle ABC$ 中，Q 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AQ}:\overline{QB}=2:3$，$P$ 在 $\overline{BC}$ 上，且 $\overline{BP}:\overline{PC}=1:3$。若 $\overrightarrow{PQ}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則 $x=$______，$y=$______。

解 作圖如右，



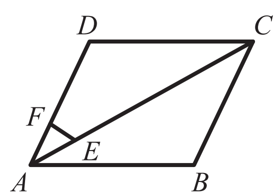
$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$

$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}=-\frac{7}{20}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，

所以 $x=-\frac{7}{20}$，$y=-\frac{1}{4}$。

類題 2

如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$。



(1) 若 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，則 $x=$______，$y=$______。

(2) 若 $\overrightarrow{EF}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AD}$，則 $\alpha=$______，$\beta=$______。

解 (1) $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{5}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$，

所以 $x=\frac{1}{5}$，$y=\frac{1}{5}$。

(2) 承(1)，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{15}\overrightarrow{AD}$，

所以 $\alpha=-\frac{1}{5}$，$\beta=\frac{2}{15}$。

題型 7 三點共線的性質

範例 13【課本內容延伸題】

坐標平面上有四個相異點 P，A，B，C，則下列哪些條件可確定 A，B，C 在同一直線上？（多選）

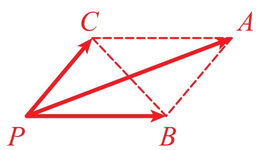
(1) $\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{BC}$ (2) $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$ (3) $\overrightarrow{PA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}$ (4) $\overrightarrow{PA}=\frac{4}{3}\overrightarrow{PB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$

(5) $\overrightarrow{PA}=4\overrightarrow{PB}-3\overrightarrow{PC}$

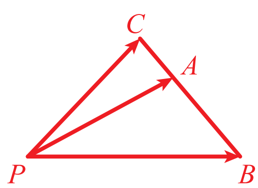
解

(1) ○：

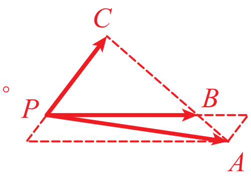
(2) ╳：



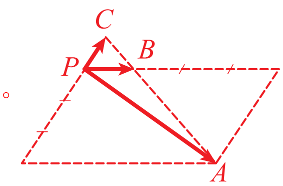
(3) ○：$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$。



(4) ○：$\frac{4}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)=1$。



(5) ○：$4+(-3)=1$。



故選(1)(3)(4)(5)。

範例 14【課本內容延伸題】

xy 平面上，A，B，C 三點不共線，若 $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，其中 $\alpha\geq 0$，$\beta\geq 0$ 且 $\alpha+\beta=1$，則所有 P 點的圖形為何？（單選）

(1)三角形的邊界 (2)三角形的內部區域（不含邊界）

(3)平行四邊形的內部區域（含邊界） (4)一直線 (5)一線段

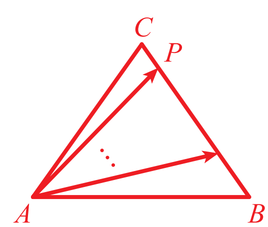
解

因為 $\alpha\geq 0$，$\beta\geq 0$

且 $\alpha+\beta=1$，

所以 P 點的圖形即為 $\overline{BC}$，

故選(5)。



類題 1

設 A，B，C 三點共線，P 是線外一點，且 $4\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+x\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{CA}$，則 $x=$______。

解　$4\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+x\overrightarrow{PC}=2\left(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}\right)$

$\Rightarrow 5\overrightarrow{PB}=-2\overrightarrow{PA}+(-x-2)\overrightarrow{PC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{PB}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{PA}-\frac{x+2}{5}\overrightarrow{PC}$，

因為 A，B，C 三點共線，所以 $-\frac{2}{5}-\frac{x+2}{5}=1$

$\Rightarrow \frac{x+2}{5}=-\frac{7}{5}$，故 $x=-9$。

類題 2

下列哪一個關係式可表示 A 點落在 $\overline{BC}$ 上？（單選）

(1) $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CB}$　(2) $5\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}$　(3) $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$　(4) $3\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PC}$

(5) $\overrightarrow{PB}=4\overrightarrow{PC}-3\overrightarrow{PA}$

解　(1) ╳：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$，$B$ 在 $\overline{AC}$ 上。

(2) ○：$\overrightarrow{PA}=\frac{2}{5}\overrightarrow{PB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{PC}$，$A$ 在 $\overline{BC}$ 上。

(3) ╳：A 在 $\overline{BC}$ 之外。

(4) ╳：$\overrightarrow{PB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}$，$B$ 在 $\overline{AC}$ 上。

(5) ╳：$\overrightarrow{PB}=4\overrightarrow{PC}-3\overrightarrow{PA}\Rightarrow 3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=4\overrightarrow{PC}\Rightarrow \overrightarrow{PC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{PB}$，$C$ 在 $\overline{AB}$ 上。

故選(2)。

題型 8 三點共線的應用

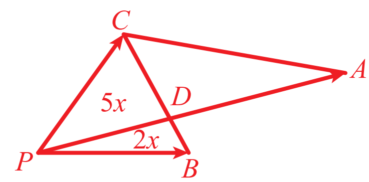
範例 15 【課本內容延伸題】

設 $3\overrightarrow{PA}=5\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}$，且 $\overline{PA}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D 點，則

(1) $\overline{BD}:\overline{DC}=$______。 (2) $\dfrac{\triangle PBD\text{ 面積}}{\triangle ACD\text{ 面積}}=$______。

解

(1) 由題意知，$\overrightarrow{PA}=\frac{5}{3}\overrightarrow{PB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}$，作簡圖如右，



因為 P，D，A 三點共線，所以 $\overrightarrow{PD}=t\overrightarrow{PA}=\frac{5t}{3}\overrightarrow{PB}+\frac{2t}{3}\overrightarrow{PC}$，

又 B，D，C 三點共線，所以 $\frac{5t}{3}+\frac{2t}{3}=1\Rightarrow t=\frac{3}{7}$，

即 $\overrightarrow{PD}=\frac{5}{7}\overrightarrow{PB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{PC}$（$-\overrightarrow{DP}=\frac{5}{7}\left(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DP}\right)+\frac{2}{7}\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DP}\right)\Rightarrow 5\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$），

故 $\overline{BD}:\overline{DC}=2:5$。

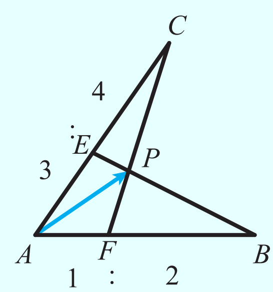
(2) 承(1)，令 $\triangle PBD$ 面積 $=2x$，則 $\triangle PCD$ 面積 $=5x$，

又 $\overrightarrow{PD}=\frac{3}{7}\overrightarrow{PA}$，所以 $\overline{PD}:\overline{DA}=3:4$，即 $\triangle ACD$ 面積 $=\frac{4}{3}\times 5x=\frac{20x}{3}$，

故 $\dfrac{\triangle PBD\text{ 面積}}{\triangle ACD\text{ 面積}}=\dfrac{2x}{\frac{20x}{3}}=\dfrac{3}{10}$。

範例 16 【課本內容延伸題】

$\triangle ABC$ 中，$\overline{AE}:\overline{EC}=3:4$，$\overline{AF}:\overline{FB}=1:2$，且 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CF}$ 交於 P 點，如右圖所示。若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則 $x=$______，$y=$______。



解

$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AP}=x\left(3\overrightarrow{AF}\right)+y\overrightarrow{AC}$，

因為 P，F，C 三點共線，所以 $3x+y=1$……①

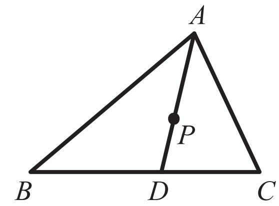
又 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\left(\frac{7}{3}\overrightarrow{AE}\right)$，

因為 P，B，E 三點共線，所以 $x+\frac{7}{3}y=1$……②

解①②得 $y=\frac{1}{3}$，$x=\frac{2}{9}$。

類題 1

如右圖所示，P 是 $\triangle ABC$ 內部一點，延長 $\overline{AP}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D 點。設 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{10}\overrightarrow{AC}$，則下列選項哪些是正確的？（多選）



(1) $\overline{AP}:\overline{PD}=7:10$ (2) $\triangle ABP$ 面積 ：$\triangle BPD$ 面積$=7:3$

(3) $\overline{BD}:\overline{DC}=4:3$ (4) $\triangle ABD$ 面積 ：$\triangle ACD$ 面積$=4:3$

(5) $\triangle ABP$ 面積是 $\triangle ABC$ 面積的 $\frac{3}{4}$ 倍

解 因為 A，P，D 三點共線，所以 $\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AP}=\frac{3t}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{4t}{10}\overrightarrow{AC}$，

又 D，B，C 三點共線，所以 $\frac{3t}{10}+\frac{4t}{10}=1$，即 $t=\frac{10}{7}$，

故 $\overrightarrow{AD}=\frac{10}{7}\overrightarrow{AP}$，即 $\overrightarrow{AP}=\frac{7}{10}\overrightarrow{AD}$。

(1) ╳：$\overline{AP}:\overline{PD}=7:3$。

(2) ○：承(1)，$\triangle ABP$ 面積 ：$\triangle BPD$ 面積$=7:3$。

(3) ○：因為 $\overrightarrow{AD}=\frac{10}{7}\overrightarrow{AP}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow -\overrightarrow{DA}=\frac{3}{7}\left(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}\right)+\frac{4}{7}\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}\right)$

$\Rightarrow \frac{3}{7}\overrightarrow{DB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}\Rightarrow 3\overrightarrow{DB}+4\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$，

所以 $\overline{BD}:\overline{DC}=4:3$。

(4) ○：承(3)，$\triangle ABD$ 面積 ：$\triangle ACD$ 面積$=4:3$。

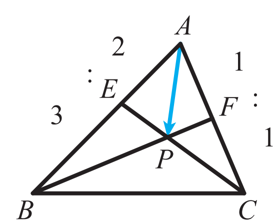
(5) ╳：$\triangle ABP$ 面積$=\frac{7}{10}\triangle ABD$ 面積$=\frac{7}{10}\times\frac{4}{7}\triangle ABC$ 面積$=\frac{2}{5}\triangle ABC$ 面積。

故選(2)(3)(4)。

類題 2

如右圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AE}:\overline{EB}=2:3$，$\overline{AF}:\overline{FC}=1:1$，

設 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則 $x=$______，$y=$______。



解 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=x\times\frac{5}{2}\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AC}$，

因為 P，E，C 三點共線，所以 $\frac{5}{2}x+y=1$……①

又 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\times 2\overrightarrow{AF}$，且 P，B，F 三點共線，所以 $x+2y=1$……②

解①②得 $x=\frac{1}{4}$，$y=\frac{3}{8}$。

題型 9 線性組合的應用

範例 17【課本內容延伸題】

設$\triangle ABC$為平面上的一個三角形，P是平面上一點且$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，$t$為實數。試問下列哪一個選項為$t$的最大範圍，使得$P$落在$\triangle ABC$的內部？（單選）

(1)$0<t<\frac{1}{4}$　(2)$0<t<\frac{1}{3}$　(3)$0<t<\frac{1}{2}$　(4)$0<t<\frac{2}{3}$　(5)$0<t<\frac{3}{4}$

解　因為P落在$\triangle ABC$內部，

所以$t>0$且$\frac{1}{3}+t<1$，

即$0<t<\frac{2}{3}$，故選(4)。

範例 18【配合課本例 11】

$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=1$，$\angle CAB=60^\circ$。若$\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，$-1\le\alpha\le 2$，$0\le\beta\le 3$，試回答下列問題：

(1) $\triangle ABC$的面積為______。

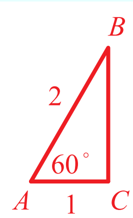
(2) 所有P點所形成的區域圖形為______

（填①三角形　②平行四邊形　③長方形，以代號作答）。

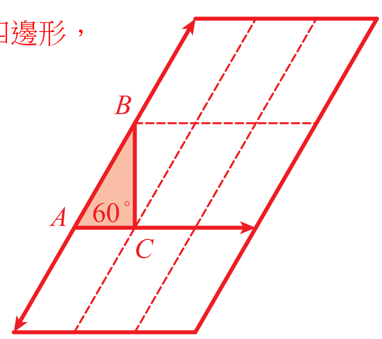
(3) P點所在的區域面積為______。

解

(1) $\triangle ABC$面積$=\frac{1}{2}\times 2\times 1\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$。



(2) 作圖如右，P點所形成的區域圖形為平行四邊形，故選②。

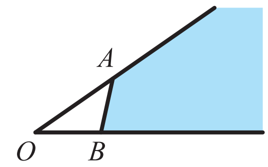


(3) 如右圖，

所求面積$=\triangle ABC$面積$\times 18=9\sqrt{3}$。

類題 1

如右圖所示，兩射線 OA 與 OB 交於 O 點，試問下列選項中哪些向量的終點，會落在鋪底區域內？（多選）



(1) $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$　(2) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$　(3) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

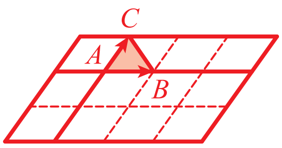
(4) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$　(5) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$

解 終點落在鋪底區域，所以 $\alpha>0$，$\beta>0$ 且 $\alpha+\beta>1$，故選(1)(2)。

類題 2

已知△ABC 的面積為 4，若 $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，$-1\le\alpha\le3$，$-2\le\beta\le1$，則 P 點所表示的區域面積為______。

解



所求 $=4\times24=96$。

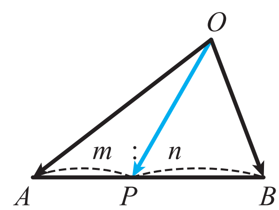
主題五　向量的分點公式

配合課本 P.149～P.155

1. 分點公式（幾何表示法）：

如右圖，設 P 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，

O 是任意點，則 $\overrightarrow{OP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$。



〈說明〉

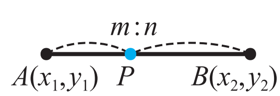
因為 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\Rightarrow\overrightarrow{OP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$。

2. 分點公式（坐標表示法）：

承1，設 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

$\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，則 $P\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$。



3. 重心坐標公式：

設 G 為△ABC 的重心，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，則重心坐標為

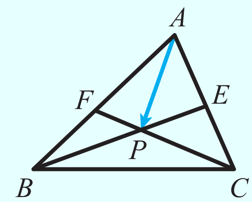
$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$。

註：請參考題型 10.類題 1。

題型 10 分點公式（幾何表示法）

範例 19【配合課本例 12、13】

如右圖，$\triangle ABC$ 中，E 是 $\overline{AC}$ 上的點，F 是 $\overline{AB}$ 上的點，$\overline{BE}$ 交 $\overline{CF}$ 於 P 點，若 $\overline{BP}:\overline{PE}=5:3$，$\overline{CP}:\overline{PF}=2:1$，則 $\overline{AF}:\overline{FB}=$______；$\overline{AE}:\overline{EC}=$______。



解

由分點公式得 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{8}\overrightarrow{AE}$……①

且 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$……②

令 $\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AB}$ 分別代入①②，

得 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{5t}{8}\overrightarrow{AC}$，且 $\overrightarrow{AP}=\frac{2k}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

所以 $\frac{2k}{3}=\frac{3}{8}\Rightarrow k=\frac{9}{16}$，即 $\overrightarrow{AF}=\frac{9}{16}\overrightarrow{AB}$，故 $\overline{AF}:\overline{FB}=9:7$；

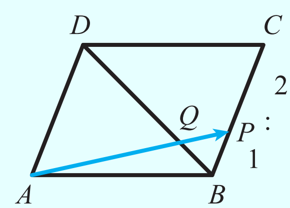
$\frac{5t}{8}=\frac{1}{3}\Rightarrow t=\frac{8}{15}$，即 $\overrightarrow{AE}=\frac{8}{15}\overrightarrow{AC}$，故 $\overline{AE}:\overline{EC}=8:7$。

範例 20【配合課本例 12、13】

設四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，P 在 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{BP}:\overline{PC}=1:2$，如右圖所示。

(1) 若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，則 $x=$______，$y=$______。

(2) 若 $\overline{AP}$ 交對角線 $\overline{BD}$ 於 Q 點，且 $\overrightarrow{AQ}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AD}$，則 $r=$______，$s=$______。



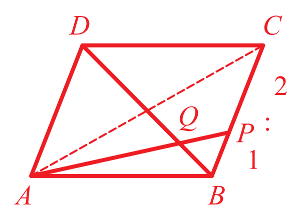
解

(1) 因為 $\overline{BP}:\overline{PC}=1:2$，

所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，

故 $x=1$，$y=\frac{1}{3}$。



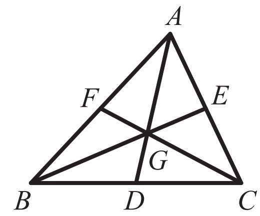
(2) 因為 $\triangle AQD\sim\triangle PQB$，

所以 $\overline{QD}:\overline{QB}=\overline{AD}:\overline{PB}=3:1$，

故 $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\Rightarrow r=\frac{3}{4}$，$s=\frac{1}{4}$。

類題 1

設 G 是 $\triangle ABC$ 的重心（三邊中線的交點），如右圖所示。則下列選項哪些是正確的？（多選）



(1) $\overline{BD}:\overline{CD}=1:1$　　(2) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

(3) $\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$　　(4) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

(5)設 O 是任意一點，則 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

解 (1) ○：因為 $\overline{AD}$ 是 $\overline{BC}$ 邊上的中線，所以 $\overline{BD}:\overline{DC}=1:1$。

(2) ○：承(1)，由分點公式知 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$。

(3) ○：因為 A，G，D 共線，所以 $\overrightarrow{AG}=t\overrightarrow{AD}$（$t\in\mathbb{R}$）

$\Rightarrow \overrightarrow{AG}=t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=t\left(\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=t\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}t\overrightarrow{AC}$，

又 F，G，C 共線，所以 $t+\frac{1}{2}t=1\Rightarrow\frac{3}{2}t=1$，$t=\frac{2}{3}$，

所以 $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overline{AG}:\overline{AD}=2:3\Rightarrow\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$。

(4) ○：承(2)(3)，$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$。

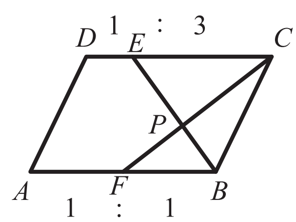
(5) ○：承(4)，$\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)$，

所以 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$。

故選(1)(2)(3)(4)(5)。

類題 2

設四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，點 E 在 $\overline{CD}$ 上，且 $\overline{DE}:\overline{EC}=1:3$，$F$ 是 $\overline{AB}$ 邊上的中點，$\overline{BE}$ 交 $\overline{CF}$ 於 P 點。則



(1) $\overline{PE}:\overline{PB}=$______。

(2) 若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，則 $x=$______，$y=$______。

解 (1) 因為 $\triangle EPC\sim\triangle BPF$，

所以 $\overline{PE}:\overline{PB}=\overline{EC}:\overline{BF}=\frac{3}{4}\overline{CD}:\frac{1}{2}\overline{AB}$（因為 $\overline{AB}=\overline{CD}$）$=3:2$。

(2) 承(1)，$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AE}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}\right)$

$=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{7}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$，

所以 $x=\frac{7}{10}$，$y=\frac{2}{5}$。

題型 11 分點公式（坐標表示法）

範例 21【配合課本例 14、15】

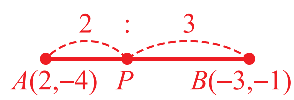
坐標平面上，$A(2,-4)$，$B(-3,-1)$，試求下列條件的 P 點坐標：

(1) 若 P 在線段 AB 上且 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$，則 P 點坐標為______。

(2) 若 P 在直線 AB 上且 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$，則 P 點坐標為______。

解

(1) $P\left(\dfrac{3\times2+2\times(-3)}{2+3},\dfrac{3\times(-4)+2\times(-1)}{2+3}\right)=\left(0,-\dfrac{14}{5}\right)$。

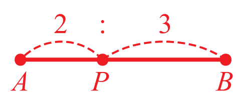


(2) 因為 P 在直線 AB 上，

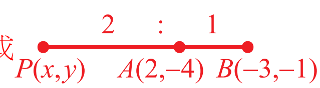
所以 P 有兩解，

即 $P\left(0,-\dfrac{14}{5}\right)$，或由 $(2,-4)=\left(\dfrac{x-6}{2+1},\dfrac{y-2}{2+1}\right)$，

解得 $x=12$，$y=-10$，即 $P(12,-10)$。



或



範例 22【配合課本例 14、15】

$\triangle ABC$ 中，$A(-2,4)$，$B(6,-2)$，$C(1,0)$，

(1) 若 $\angle A$ 的內角平分線交線段 BC 於 P 點，則 P 點坐標為______。

(2) 若 $\angle A$ 的外角平分線交直線 BC 於 Q 點，則 Q 點坐標為______。

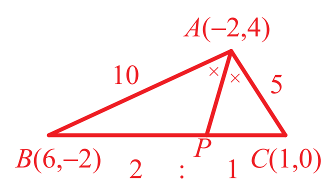
解

(1) 因為 $\overline{AB}=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$，$\overline{AC}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$，

又直線 AP 為 $\angle A$ 的內角平分線，

所以 $\overline{BP}:\overline{CP}=\overline{AB}:\overline{AC}=10:5=2:1$，

故 $P\left(\dfrac{1\times6+2\times1}{3},\dfrac{1\times(-2)+2\times0}{3}\right)=\left(\dfrac{8}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$。



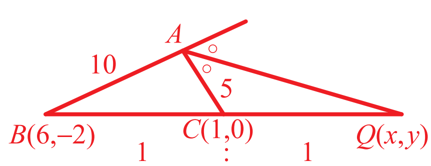
(2) 承(1)，設 $Q(x,y)$，

因為直線 AQ 是 $\angle A$ 的外角平分線，

所以 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BQ}:\overline{QC}$

$\Rightarrow\overline{BQ}:\overline{CQ}=2:1$，即 $\overline{BC}:\overline{CQ}=1:1$，

所以 $C(1,0)=\left(\dfrac{x+6}{2},\dfrac{y-2}{2}\right)$，故 $x=-4$，$y=2$，即 $Q(-4,2)$。

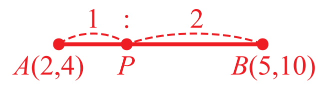


類題 1

設 $A(2,4)$，$B(5,10)$，P 是直線 AB 上一點，且 $2\overline{PA}=\overline{PB}$，則 P 點坐標為______。

解 (1) 若 P 在線段 AB 上，

則 $\overline{AP}:\overline{PB}=1:2$，



所以 $P\left(\dfrac{2\times2+1\times5}{1+2},\dfrac{2\times4+1\times10}{1+2}\right)=(3,6)$。

(2) 若 P 在線段 AB 之外，

則 $\overline{PA}:\overline{AB}=1:1$，設 $P(x,y)$，

所以 $A(2,4)=\left(\dfrac{x+5}{2},\dfrac{y+10}{2}\right)$，得 $x=-1$，$y=-2$，

即 $P(-1,-2)$。

由(1)(2)得 $P(3,6)$ 或 $P(-1,-2)$。

類題 2

設 G 為 $\triangle ABC$ 的重心，在題型10的類題中，我們得到任一點 O，滿足 $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$。若 O 為原點，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，則

(1) 重心 G 點的坐標為______。

(2) 設 $A(8,-3)$，$B(9,-1)$，$C(-2,10)$，則 $\triangle ABC$ 的重心坐標為______。

解 (1) 設 $G(x,y)$，則 $G(x,y)=\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$。

(2) $G\left(\dfrac{8+9-2}{3},\dfrac{-3-1+10}{3}\right)=(5,2)$。

A++ 挑戰題

1. 設 I 是 $\triangle ABC$ 的內心，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的對邊長分別為 a，b，c。

(1)試證明 $\triangle IBC$ 面積 ：$\triangle ICA$ 面積 ：$\triangle IAB$ 面積 $=a:b:c$。

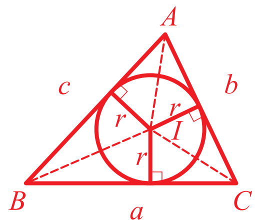
(2)試證明 $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$。

(3)設 $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$，且 $\triangle ABC$ 的周長為 18，則 $\triangle ABC$ 的面積為何？

解 (1) 因為 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，
所以 I 為 $\triangle ABC$ 的內切圓圓心，
作圖如右，
設內切圓半徑為 r，
則 $\triangle IBC$ 面積 ：$\triangle ICA$ 面積 ：$\triangle IAB$ 面積

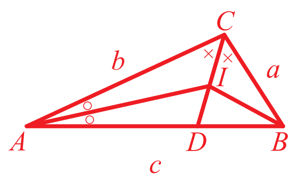
$=\frac{1}{2}ar:\frac{1}{2}br:\frac{1}{2}cr$

$=a:b:c$。



(2) 因為 I 是 $\triangle ABC$ 的內心，所以 $\overline{CD}$ 為 $\angle C$ 的內角平分線

且 $\overline{AD}:\overline{BD}=b:a$，故由分點公式知 $\overrightarrow{CD}=\frac{a}{a+b}\overrightarrow{CA}+\frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB}$。



同理 $\overline{AI}$ 為 $\triangle ACD$ 中 $\angle A$ 的內角平分線，

所以 $\overline{CI}:\overline{ID}=\overline{AC}:\overline{AD}=b:\left(\frac{b}{a+b}\times c\right)=(a+b):c$，

故 $\overrightarrow{CI}=\frac{a+b}{a+b+c}\overrightarrow{CD}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{CA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{CB}$。

將各向量改以 I 為始點，所以 $-\overrightarrow{IC}=\frac{a}{a+b+c}\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IC}\right)+\frac{b}{a+b+c}\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right)$

$\Rightarrow\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{IA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{IB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$，所以 $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$。

(3) 承(2)，令三邊長 $a=2k$，$b=3k$，$c=4k$ 且 $2k+3k+4k=18$，所以 $k=2$，

即 $\triangle ABC$ 的三邊長 4，6，8，而半周長 $s=\frac{1}{2}\times18=9$，

由海龍公式，$\triangle ABC$ 面積 $=\sqrt{9(9-4)(9-6)(9-8)}=3\sqrt{15}$。

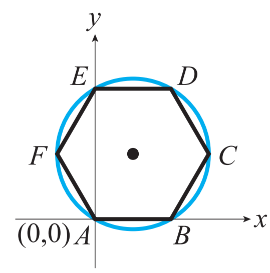
單元 8 精選試題

一 基礎題

1. 平行四邊形 $ABCD$ 中，已知 $A(-1,2)$，$B(2,3)$，$C(4,2)$，則 D 點坐標為______。 題型 1

答 $(1,1)$

2. 如右圖，正六邊形 $ABCDEF$ 的邊長為 3，則下列選項哪些是正確的？（多選）

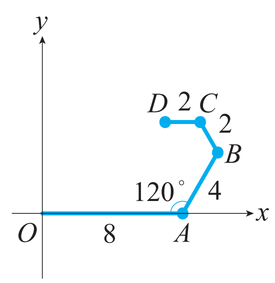


(1) $\overrightarrow{AB}=(3,0)$　(2) $\overrightarrow{BC}=\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$　(3) $\overrightarrow{BD}=\left(0,\sqrt{3}\right)$

(4) F 點坐標為 $\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$　(5) $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{EF}$

答 (1)(2)(4) 題型 2

3. 如右圖所示，設 $\overline{OA}=8$，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=2$，$\angle OAB=120°$ $=\angle ABC=\angle BCD$，則 $\overrightarrow{OD}=$______。



答 $\left(7,3\sqrt{3}\right)$

題型 2

4. 已知 $\overrightarrow{AB}=(3,-2)$，$\overrightarrow{AD}=(-5,2)$，$\overrightarrow{DC}=(-3,6)$，若 $\overrightarrow{CB}=(x,y)$，則 $x=$______，$y=$______。

答 11，-10 題型 3

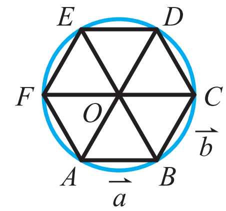
5. $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}=(2,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-x,2x)$，$x>0$，若 $\triangle ABC$ 的周長為 $6\sqrt{5}$，則 $x=$______。

答 $\frac{12}{5}$ 題型 3

6. 設 A，B，C 三點不共線，若 $(2x+y-7)\overrightarrow{AB}+(3x-y-3)\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$，則 $x=$______，$y=$______。 題型 4

答 2，3

7. 如右圖，正六邊形 $ABCDEF$ 中，若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}$，且 $2\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$，則 $x=$______，$y=$______。



答 -5，8

題型 4

8. 設 $\overrightarrow{a}=(3,1)$，$\overrightarrow{b}=(1,2)$，$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$，$t$ 為實數。

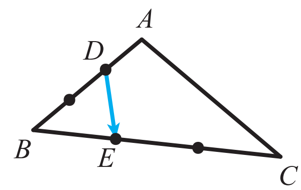
(1)若 $\left|\overrightarrow{v}\right|=\sqrt{15}$，則 $t=$______。

(2)若 $\left|\overrightarrow{v}\right|$ 有最小值，則 $t=$______，又 $\left|\overrightarrow{v}\right|$ 的最小值為______。

題型 5

答 (1) $-1\pm\sqrt{2}$ (2) -1，$\sqrt{5}$

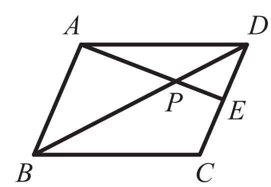
9. 如右圖，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，若 $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則 $x=$______，$y=$______。



答 $\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{3}$

題型 6

10. 設 $ABCD$ 為一平行四邊形，E 是 $\overline{CD}$ 中點，$\overline{AE}$ 交 $\overline{BD}$ 於 P 點，若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，則 $x=$______，$y=$______。



答 $\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}$

題型 6

11. 設 C 點在直線 AB 上，而 P 是直線 AB 外一點，若 $\overrightarrow{PB}=(3t+4)\overrightarrow{PA}+(t+9)\overrightarrow{PC}$，則實數 $t=$______。

題型 7

答 -3

12. 設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 為兩不平行的非零向量，且 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{OB}=3\overrightarrow{a}+4\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{OC}=-3\overrightarrow{a}+7\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{OD}=5\overrightarrow{a}+(4-3k)\overrightarrow{b}$，

(1)若 A，B，C 三點共線，則 $k=$______。

(2)若 $\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{CD}$，則 $k=$______。

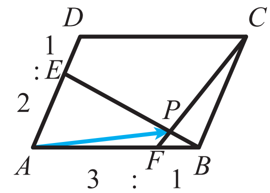
題型 7

答 (1) 5 (2) 19

13. 設 $\overrightarrow{OA}=(6,x)$，$\overrightarrow{OB}=(4,3)$，$\overrightarrow{OC}=(x,9)$，若 A，B，C 三點共線，則 $x=$______。 題型 7

答 0 或 7

14. 平行四邊形 $ABCD$ 中，E 在 $\overline{AD}$ 上，$\overline{AE}=2\overline{ED}$，$F$ 在 $\overline{AB}$ 上，$\overline{AF}=3\overline{FB}$，若 $\overline{CF}$ 與 $\overline{BE}$ 交於 P 點，且 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則 $x=$______，$y=$______。



答 $\frac{9}{14}$，$\frac{1}{7}$ 題型 8

15. 設 A，B，C 三點不共線，已知 $\overrightarrow{AP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$，則 $\dfrac{\triangle BCP\text{ 面積}}{\triangle ABC\text{ 面積}}=$______。 題型 8

答 $\frac{2}{5}$

16. 設 $\vec{a}=(3,-4)$，$\vec{b}=(24,7)$，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$，若 $\vec{c}$ 平分 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角，則 $t=$______。

答 $\frac{1}{5}$ 題型 8

17. 設 O，A，B 三點不共線，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，對於動點 P 的圖形，下列選項哪些是正確的？（多選）

(1)若 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$，則 P 點的圖形為一點

(2)若 $x=\frac{1}{2}$，$0\le y\le\frac{1}{2}$，則 P 點的圖形為一直線

(3)若 $x=\frac{1}{2}$，y 為實數，則 P 點的圖形為一射線

(4)若 $0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$，則 P 點的圖形為一平行四邊形

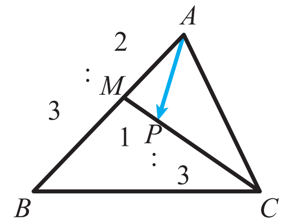
(5)若 $x+y=1$，則 P 點的圖形為一直線 題型 9

答 (1)(4)(5)

18. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$，$\angle CAB=45^\circ$，設 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，其中 $-1\le x\le 2$，$1\le y\le 3$，則 P 點所形成的圖形區域面積為______。 題型 9

答 $36\sqrt{2}$

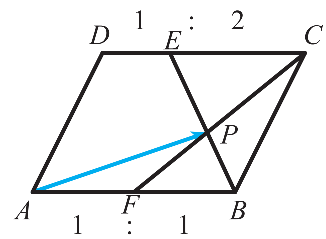
19. 如右圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{CM}$ 交 $\overline{AB}$ 於 M 點，且 $\overline{AM}:\overline{MB}=2:3$，$\overline{AP}$ 交 $\overline{CM}$ 於 P 點且 $\overline{MP}:\overline{PC}=1:3$，若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則 $x=$______，$y=$______。



答 $\frac{3}{10}$，$\frac{1}{4}$

題型 10

20. 如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{DE}:\overline{EC}=1:2$，$F$ 是 $\overline{AB}$ 的中點，$\overline{BE}$ 和 $\overline{CF}$ 交於 P 點，若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，則 $x=$______，$y=$______。



答 $\frac{5}{7}$，$\frac{3}{7}$

題型 10

21. 設 $A(-3,-1)$，$B(1,3)$，若 A，B，P 三點共線，P 點在線段 AB 之外，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$，則 P 點坐標為______。

答 $(9,11)$

題型 11

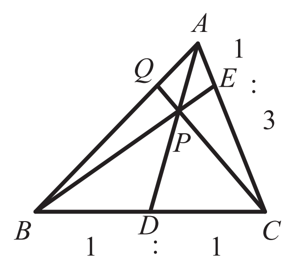
二 進階題

22. $\triangle ABC$ 中，D 為 $\overline{BC}$ 中點，E 在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AE}:\overline{EC}=1:3$，$\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 交於 P 點，直線 CP 與 $\overline{AB}$ 交於 Q 點，試求：

(1) $\overline{AP}:\overline{PD}=$______。

(2)若 $\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}$，則 $x=$______，$y=$______。

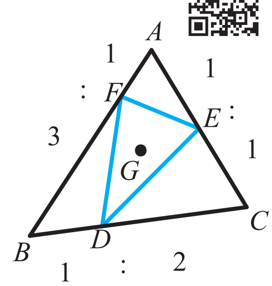
(3) $\overline{AQ}:\overline{QB}=$______。



題型 10

答 (1) $2:3$　(2) $\frac{3}{5}$，$\frac{1}{5}$　(3) $1:3$

23. 在 $\triangle ABC$ 的三邊 $\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$ 上分別取 D，E，F 三點，如右圖所示。若 $\overline{BD}:\overline{DC}=1:2$，$\overline{CE}:\overline{EA}=1:1$，$\overline{AF}:\overline{FB}=1:3$，又 G 為 $\triangle DEF$ 的重心，且 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則 $x=$______，$y=$______。



答 $\frac{11}{36}$，$\frac{5}{18}$

題型 10

三 大考試題

24. 小明在天文網站上看到以下的資訊「可利用北斗七星斗杓的天璇與天樞這兩顆星來尋找北極星：由天璇起始向天樞的方向延伸便可找到北極星，其中天樞與北極星的距離為天樞與天璇距離的5倍。」今小明將所見的星空想像成一個坐標平面，其中天璇的坐標為$(9,8)$及天樞的坐標為$(7,11)$。依上述資訊可以推得北極星的坐標為______。　【答對率 56%】101 學測

答 $(-3,26)$

25. 坐標平面中$A(a,3)$，$B(16,b)$，$C(19,12)$三點共線。已知C不在A，B之間，且$\overline{AC}:\overline{BC}=3:1$，則$a+b=$______。　【答對率 64%】102 學測

答 19

26. 一物體由坐標平面中的點$(-3,6)$出發，沿著向量$\overrightarrow{v}$所指的方向持續前進，可以進入第一象限。請選出正確的選項。

(1) $\overrightarrow{v}=(1,-2)$　(2) $\overrightarrow{v}=(1,-1)$　(3) $\overrightarrow{v}=(0.001,0)$　(4) $\overrightarrow{v}=(0.001,1)$

(5) $\overrightarrow{v}=(-0.001,1)$　【答對率 71%】103 學測

答 (2)(3)(4)

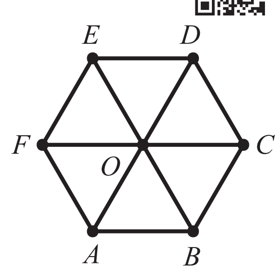
27. 在坐標平面上，$\triangle ABC$內有一點P滿足$\overrightarrow{AP}=\left(\frac{4}{3},\frac{5}{6}\right)$及$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$。若$A$，$P$連線交$\overline{BC}$於$M$，則$\overrightarrow{AM}=$______。（化成最簡分數）　【答對率 26%】106 學測

答 $\left(\frac{40}{21},\frac{25}{21}\right)$

28. 設D為$\triangle ABC$中$\overline{BC}$邊上的一點，已知$\angle ABC=75^\circ$、$\angle ACB=45^\circ$、$\angle ADB=60^\circ$。若$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，則$s=$______，$t=$______。（化成最簡分數）　【答對率 17%】107 學測

答 $\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$

29. 如圖所示，O為正六邊形之中心。試問下列哪個向量的終點P落在$\triangle ODE$內部（不含邊界）？



(1) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$　(2) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$　(3) $\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$

(4) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$　(5) $\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$

109 學測

答 (2)