高中 數學 科考試卷 ____年____班 座號：_____ 姓名：__________

一、**單選題**：每題 3 分、共 15 分

(　　)1. $\log_{32}27\times\log_{81}16$ 為？

(A) $\log_{32\times81}27\times16$ (B) $\log_6 1$ (C) $\dfrac{1}{6}$ (D) $\dfrac{3}{5}$

答案：(D)

解析：$\log_{32}27\times\log_{81}16=(\log_{2^5}3^3)\times(\log_{3^4}2^4)$

$$=(\frac{3}{5}\log_2 3)\times(\log_3 2)=\frac{3}{5}$$

∴選(D)

(　　)2. 設 $\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$，則 $\log_{42}\dfrac{56}{9}=$

(A) $\dfrac{ab+2a-3}{ab+a+1}$ (B) $\dfrac{ab-2a+3}{ab+a+1}$ (C) $\dfrac{ab+2a-3}{ab-a+1}$

(D) $\dfrac{ab-2a+3}{ab-a+1}$ (E)以上皆非

答案：(B)

解析：原式$=\dfrac{\log_2\frac{56}{9}}{\log_2 42}=\dfrac{\log_2(2^3\times7)-\log_2 3^2}{\log_2(2\times3\times7)}=\dfrac{3+\log_2 7-2\log_2 3}{1+\log_2 3+\log_2 7}=\dfrac{3+\log_2 3\times\log_3 7-2a}{1+a+\log_2 3\times\log_3 7}=$
$\dfrac{ab-2a+3}{ab+a+1}$

(　　)3. 設正實數 b 滿足 $(\log 100)(\log b)+\log 100+\log b=7$。試選出正確的選項。

(A) $1\le b\le\sqrt{10}$ (B) $\sqrt{10}\le b\le 10$ (C) $10\le b\le 10\sqrt{10}$ (D) $10\sqrt{10}\le b\le 100$ (E) $100\le b$ $\le 100\sqrt{10}$

答案：(D)

解析：$(\log 100)(\log b)+\log 100+\log b=7$

$\Rightarrow 2\log b+2+\log b=7\Rightarrow 3\log b=5\Rightarrow \log b=\dfrac{5}{3}$，故 $b=10^{\frac{5}{3}}$，

於是 $10^{\frac{3}{2}}\le b\le 10^2$，即 $10\sqrt{10}\le b\le 100$，

故選(D)。

(　　)4. $\log_2 0.25=$

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) $-\dfrac{1}{2}$ (D) -2 (E) 2

答案：(D)

解析：$\log_2\dfrac{1}{4}=\log_2 2^{-2}=-2$

(　　)5. 若正實數 x，y 滿足 $\log_{10}x=2.8$，$\log_{10}y=5.6$，則 $\log_{10}(x^2+y)$ 最接近下列哪一個選項的值？

(A)2.8 (B)5.6 (C)5.9 (D)8.4 (E)11.2

答案：(C)

解析：$\log_{10}x=2.8$，$\log_{10}y=5.6\Rightarrow x=10^{2.8}$，$y=10^{5.6}$，

故 $x^2+y=10^{5.6}+10^{5.6}=2\times10^{5.6}$，於是

$\log_{10}(x^2+y)=\log_{10}(2\times10^{5.6})=\log_{10}2+\log_{10}10^{5.6}\approx0.3010+5.6\approx5.9$，

選(C)。

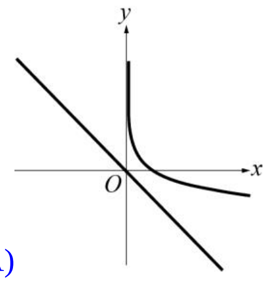
二、**多重選擇題**：每題 3 分、共 15 分

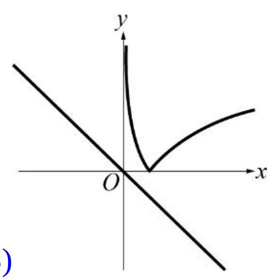
(　　)1. 下列哪一個圖形與直線 $x+y=0$ 恰交於一點？

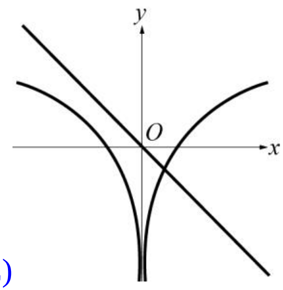
(A)$y=-\log_5 x$　(B)$y=|\log_2 x|$　(C)$y=\log_2|x|$　(D)$y=\log_2(x+1)$　(E)$y=\log_5(-x)$

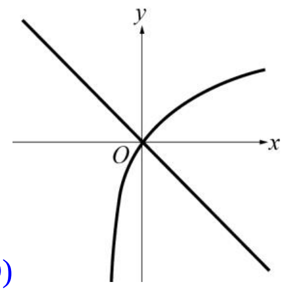
答案：(C)(D)

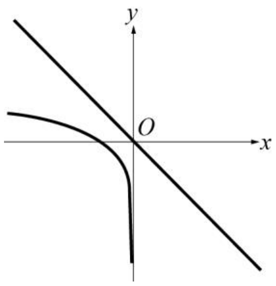
解析：作圖

(A)


；(B)


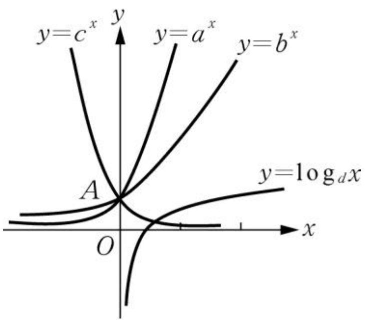
；(C)


；(D)


；(E)


故選(C)(D)

(　　)2. 如附圖，已知 $y=a^x$ 與 $y=c^x$ 的圖形對稱於 y 軸，且兩函數與 $y=b^x$ 交於一點 A。已知 $y=a^x$ 圖形與 $y=\log_d x$ 圖形對稱於直線 $y=x$，請問下列選項哪些正確？



(A)$b>a>c$　(B)點 A 的坐標為 $(0,1)$　(C)$ac=1$　(D)$a=d$　(E)方程式 $\log_d x=a^x$ 有實數解

答案：(B)(C)(D)

解析：(A) 錯　$\because a>b>c$

(B) 對

(C) 對　$\because y=a^x$ 與 $y=c^x$ 對稱於 y 軸　$\therefore c=\dfrac{1}{a}$　$\Rightarrow ac=1$

(D) 對　$\because y=\log_d x$ 和 $y=a^x$ 對稱於直線 $y=x$　$\therefore a=d$

(E) 錯　$\because y=\log_d x$ 和 $y=a^x$ 沒有交點　$\therefore$ 無實數解

故選(B)(C)(D)

(　　)3. 假設點 (a,b) 為函數 $y=3^x$ 圖形上之一點，請選出下列正確的選項？

(A)$a<b$　(B)$(-a,b)$ 為函數 $y=(\dfrac{1}{3})^{-x}$ 圖形上之一點　(C)$(a-5,9b)$ 為函數 $y=3^{x+7}$ 圖形上之一點　(D)$(\dfrac{1}{b},a)$ 為函數 $y=\log_3 x^{-1}$ 圖形上之一點　(E)$(b+2,a)$ 為函數 $y=\log_3 x-2$ 圖形上之一點

答案：(A)(C)(D)

解析：(A)○：由題意知，$b=3^a$，由於 $y=x$ 之圖形必在 $y=3^x$ 下方，可知 $a<3^a=b$。

(B)×：若 $(-a,b)$ 為函數 $y=(\dfrac{1}{3})^{-x}$ 圖形上之一點，則 $b=(\dfrac{1}{3})^a=3^{-a}$，此與 $b=3^a$ 不合。

(C) ○：因 $b=3^a$，故 $9b=9\cdot 3^a=3^{a+2}=3^{(a-5)+7}$，故 $(a-5, 9b)$ 在函數 $y=3^{x+7}$ 圖形上。

(D) ○：因 $b=3^a$，故 $a=\log_3 b=\log_3 (\frac{1}{b})^{-1}$，故 $(\frac{1}{b}, a)$ 在函數 $y=\log_3 x^{-1}$ 圖形上。

(E) ×：因 $b=3^a$，故 $b+2=3^a+2\neq 3^{a+2}$，於是 $a+2\neq\log_3(b+2)$，

即 $a\neq\log_3(b+2)-2$，所以 $(b+2, a)$ 不在函數 $y=\log_3 x-2$ 圖形上。

故選(A)(C)(D)。

(　　)4. 已知 $\log 2\approx 2\ 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，則 5^{30} 展開後為 x 位數，最高位數字為 y，個位數為 z，選出正確的選項。

(A)$x=20$　(B)$x=21$　(C)$y=3$　(D)xyz 是 105 的倍數　(E)$x+y+z=35$

答案：(B)(D)(E)

解析：$5^{30}=10^{\log 5^{30}}=10^{30(1-\log 2)}\approx 10^{30\times 0.699}=10^{20.97}=10^{20}\times 10^{0.97}$

$\because \log 9=2\times 0.4771<0.97<\log 10$

$\therefore 9<10^{0.97}<10$　得 $x=21$，$y=9$

$\because 5^{30}$ 乘開後之個位數為 $5\Rightarrow z=5$

$\therefore xyz=21\times 9\times 5=105\times 9$，$x+y+z=35$

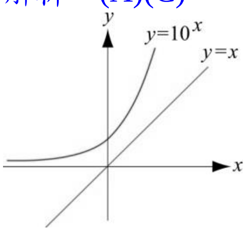
故選(B)(D)(E)

(　　)5. 觀察相關的函數圖形，判斷下列選項何者為真？

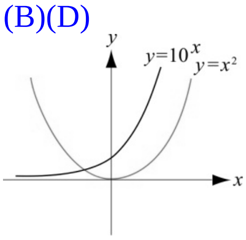
(A)$10^x=x$ 有實數解　(B)$10^x=x^2$ 有實數解　(C)x 為實數時，$10^x>x$ 恆成立　(D)$x>0$ 時，$10^x>x^2$ 恆成立　(E)$10^x=-x$ 有實數解

答案：(B)(C)(D)(E)

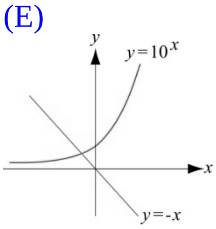
解析：(A)(C)



(B)(D)



(E)



由上面的圖形得到正確的答案是(B)(C)(D)(E)。

三、非選題：每題 8 分、共 40 分

1. 聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特 (W/m^2) 來衡量，一般人能感覺出聲音的最小強度為 $I_0=10^{-12}$ (W/m^2)，當測得的聲音強度為 I (W/m^2) 時，所產生的噪音分貝數 d 為 $d(I)=10\times\log\frac{I}{I_0}=10\times\log\frac{I}{10^{-12}}$

(1) 若一隻蚊子振動翅膀測得的聲音強度為 10^{-12} (W/m^2)，求其產生的噪音分貝數為何？

(2) 求 10 隻蚊子（強度為 10 倍）產生的噪音分貝數為何？

(3) 汽車製造廠測試發現，某新車以每小時 60 公里速度行駛時，測得的聲音強度為 10^{-4} (W/m^2)，

試問此聲音強度產生的噪音為多少分貝何？

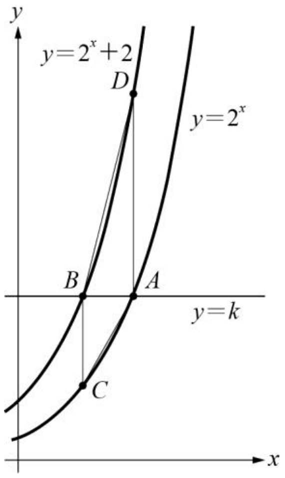
答案：(1) 0；(2) 10；(3) 80

解析：(1) $d\,(I)=10\times\log\dfrac{10^{-12}}{10^{-12}}=10\log 1=0$

(2) $d\,(I)=10\times\log\dfrac{10\times10^{-12}}{10^{-12}}=10\times\log 10=10$

(3) $d\,(I)=10\times\log\dfrac{10^{-4}}{10^{-12}}=10\times\log 10^{8}=80$

2. 在坐標平面上，水平線 $y=k$ 與 $y=2^{x}$，$y=2^{x+2}$ 的圖形分別交於 A、B 兩點，過 A 點的鉛直線交 $y=2^{x+2}$ 的圖形於 D 點，過 B 點的鉛直線交 $y=2^{x}$ 的圖形於 C 點。如附圖所示。若四邊形 $ADBC$ 的面積為 60，則 k 值為何？



答案：16

解析：設 $A\,(x_A, k)$

$B\,(x_B, k)$

$C\,(x_B,\ 2^{x_B})$

$D\,(x_A,\ 2^{x_A+2})$

又 $2^{x_A}=k$ －①

$2^{x_B+2}=k$－② $\Rightarrow 2^{x_B}=\dfrac{k}{4}$

$\dfrac{①}{②}$ $2^{x_A-x_B-2}=1$ $\therefore x_A-x_B=2$

$\therefore 2^{x_A-x_D}=4$

四邊形 $ADBC$ 面積＝$\Delta ABD+\Delta ABC$

$=\dfrac{1}{2}\,\overline{AB}\times\overline{AD}+\dfrac{1}{2}\,\overline{AB}\times\overline{BC}$

$=\dfrac{1}{2}(x_A-x_B)\cdot(\overline{AD}+\overline{BC})$

$=\dfrac{1}{2}(x_A-x_B)\cdot(2^{x_A+2}-2^{x_B})$

$=\dfrac{1}{2}\times2\times(4\cdot k-\dfrac{k}{4})=60$

$\therefore k=16$

3. $2^{x}=9$，$3^{y}=16$，求 xy 之值。

答案：8

解析：$2^{x}=9\Rightarrow x=\log_2 9$，$3^{y}=16\Rightarrow y=\log_3 16$，

故 $xy=(\log_2 9)(\log_3 16)=(2\log_2 3)(4\log_3 2)=8$

4. 放射物的質量變為原來的一半所需的時間，稱為該物質的半衰期。鐳 (Radium) 是一種放射性物質，最穩定的同位素為鐳-226，半衰期為 1600 年。假設剛開始鐳的質量為 10 公克，試求：
(1) 6400 年後的質量為幾公克？
(2) 衰變到剩下 8 公克時，需要幾年？(四捨五入至整數位) (已知 $\log 2 \approx 0.3010$，$\log 3 \approx 0.4771$)

答案：(1) $\frac{5}{8}$ 公克；(2) 516 年

解析：(1) 所求為 $10\times(\frac{1}{2})^{\frac{6400}{1600}}=10\times(\frac{1}{2})^{4}=\frac{5}{8}$ (公克)

(2) 衰變到剩下 8 公克，需要 n 年

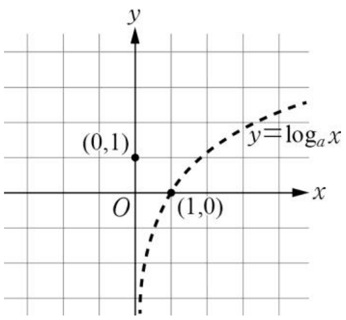
$$10\times(\frac{1}{2})^{\frac{n}{1600}}=8 \Rightarrow (\frac{1}{2})^{\frac{n}{1600}}=\frac{8}{10}$$

取 log，$\frac{n}{1600}\log\frac{1}{2}=\log\frac{8}{10}$

$n=1600\cdot\frac{3\log 2-1}{-\log 2}=1600\cdot\frac{-0.097}{-0.3010}\fallingdotseq 515.6$

$\therefore$ 需要 516 年

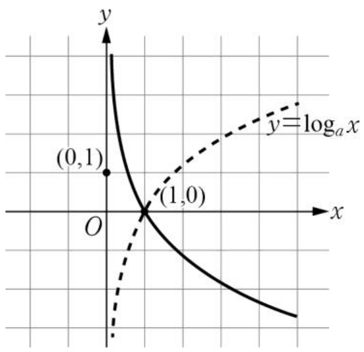
5. $a>0$，函數 $y=\log_a x$ 之圖形如附圖，請在答案卷上畫出圖形，作圖時請注意對稱關係及漸近線。



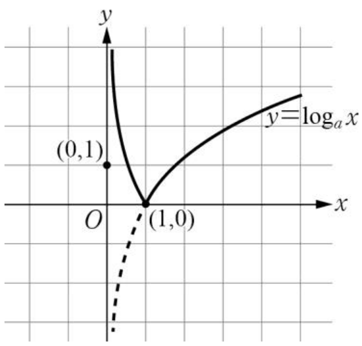
(1) 虛線圖形為 $y=\log_a x$，請畫出 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的函數圖形。
(2) 虛線圖形為 $y=\log_a x$，請畫出 $y=|\log_a x|$ 的函數圖形。
(3) 虛線圖形為 $y=\log_a x$，請畫出 $y=a^x+1$ 的函數圖形。
(4) 虛線圖形為 $y=\log_a x$，請畫出 $y=\log_{\frac{1}{a}}(-x)$ 的函數圖形。

答案：略

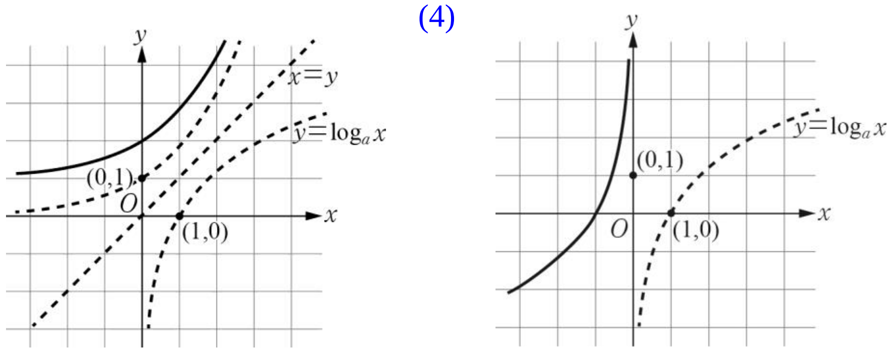
解析：(1)



(2)



(3) (4)



四、填充題：每題 3 分、共 30 分

1. 將 $y=f(x)=\log_2 x$ 的圖形向右移 12 單位，再向上平移 2 單位，所得新函數 $y=g(x)=\log_2(ax+b)$，已知 $y=f(x)$與 $y=g(x)$ 圖形有交點，試求交點坐標為________。

答案：$(16,4)$

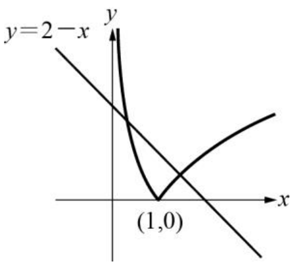
解析：$f(x)=\log_2 x \to y=\log_2(x-12) \to y=\log_2(x-12)+2$，得 $g(x)=\log_2 4(x-12)$

解$\begin{cases} y=\log_2 x \\ y=\log_2 4(x-12) \end{cases} \Rightarrow x=4(x-12)$，得 $x=16 \Rightarrow$ 交點 $(16,4)$

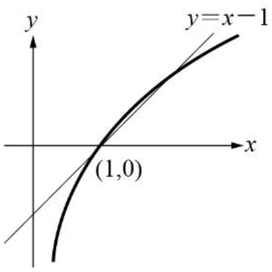
2. 方程式 $|\log_{2x}|+x-2=0$ 有 a 個實根，方程式 $x-1=\log_2 x$ 有 b 個實根，則數對 $(a,b)=$ ________。

答案：$(2,2)$

解析：2 個交點 $\Rightarrow a=2$



2 個交點 $\Rightarrow b=2$



$(a,b)=(2,2)$

3. 滿足不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)>-2$ 的實數 x 之範圍為________。

答案：$2<x<3$

解析：$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)>\log_{\frac{1}{2}}4$

$$\begin{cases} x-2>0 \\ x+1>0 \\ (x-2)(x+1)<4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>-1 \\ -2<x<3 \end{cases} \Rightarrow 2<x<3$$

4. 不等式 $\log_3(x-1)>\log_9(7-x)$ 的解為________。

答案：$3<x<7$

解析：① 真數>0

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ 7-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<7 \end{cases}$$

$\Rightarrow 1<x<7$，

② $\log_3(x-1)>\log_9(7-x)$

$\Rightarrow \log_9(x-1)^2>\log_9(7-x)$

$\Rightarrow (x-1)^2>7-x \Rightarrow x^2-x-6>0$

$\Rightarrow (x-3)(x+2)>0 \Rightarrow x>3$ 或 $x<-2$

∴ 由①②得 $3<x<7$

5. 試求下列各式的值：

(1) $\log_4\frac{28}{15}-2\log_4\frac{3}{14}+3\log_4\frac{6}{7}-\log_4\frac{2}{5}=$______。

(2) $(\log_3 2+\log_9 8)(\log_2 9+\log_4 3)=$______。

(3) $\log_3 7\cdot\log_7 90-\frac{\log_7 100}{\log_{49}81}=$______。

答案：(1)3；(2)$\frac{25}{4}$；(3)2

解析：(1) 原式 $=\log_4\frac{28}{15}-\log_4\frac{9}{196}+\log_4\frac{216}{343}-\log_4\frac{2}{5}$

$=\log_4(\frac{28}{15}\times\frac{196}{9}\times\frac{216}{343}\times\frac{5}{2})$

$=\log_4 64=3$

(2) 原式 $=(\log_3 2+\frac{3}{2}\log_3 2)(2\log_2 3+\frac{1}{2}\log_2 3)=(\frac{5}{2}\log_3 2)(\frac{5}{2}\log_2 3)$

$=\frac{25}{4}(\log_3 2)(\log_2 3)=\frac{25}{4}\log_3 3=\frac{25}{4}$

(3) 原式 $=\log_3 90-\frac{\log_7 100}{\log_7 9}=\log_3 90-\log_9 100=\log_3 90-\log_3 10=\log_3\frac{90}{10}=\log_3 9=2$

6. 設實數 x 滿足 $0<x<1$，且 $\log_x 4-\log_2 x=1$，則 $x=$______。(化成最簡分數)

答案：$\frac{1}{4}$

解析：$\log_x 4-\log_2 x=1$，令 $t=\log_2 x$，得 $\frac{2}{t}-t=1$

∴ $t^2+t-2=0$，$(t+2)(t-1)=0$，得 $t=-2$ 或 1

故 $\log_2 x=-2$ 或 1，$x=\frac{1}{4}$ 或 2

但 $0<x<1$，故 $x=\frac{1}{4}$

7. 試解下列各方程式：

(1) $9^x=3\sqrt{3}$ 的解為______。

(2) $3^{x+1}+3^{2-x}=28$ 的解為______。

(3) $\frac{2^{x^2-1}}{2^{x+1}}=16$ 的解為______。

答案：(1) $x=\frac{3}{4}$；(2) $x=-1$ 或 2；(3) $x=-2$ 或 3

解析：(1) $9^x=3\sqrt{3}\Rightarrow 3^{2x}=3^{\frac{3}{2}}$，故 $2x=\frac{3}{2}$，得 $x=\frac{3}{4}$

(2) $3^{x+1}+3^{2-x}=28$ 化為 $3\cdot 3^{2x}-28\cdot 3^x+9=0$，

$(3\cdot 3^x-1)(3^x-9)=0$，

故 $3^x=\frac{1}{3}$ 或 $3^x=9$，得 $x=-1$ 或 2

(3) $\frac{2^{x^2-1}}{2^{x+1}}=16\Rightarrow 2^{(x^2-1)-(x+1)}=2^4$，

故 $x^2-x-2=4$，即 $x^2-x-6=0$，$(x+2)(x-3)=0$，得 $x=-2$ 或 3

8. 若 α、β 為方程式 $x^{\log_5 x}=\frac{5}{x^2}$ 之兩根，則 $\alpha\beta=$________。

答案：$\frac{1}{25}$

解析：由 $x^{\log_5 x}=\frac{5}{x^2}$ 得 $\log_5 x^{\log_5 x}=\log_5\frac{5}{x^2}$ $\Rightarrow(\log_5 x)^2+2\log_5 x-1=0$，

即 α、β 為 $(\log_5 x)^2+2\log_5 x-1=0$ 的兩根，

故 $\log_5\alpha$、$\log_5\beta$ 是 $t^2+2t-1=0$ 的兩根，

於是 $\log_5\alpha+\log_5\beta=-2\Rightarrow\log_5\alpha\beta=-2$，所以 $\alpha\beta=5^{-2}=\frac{1}{25}$

9. 若實數 a、b 滿足 $2^a=\frac{1}{3}$，$\log_b 2=\frac{1}{2}$，則 $b^a=$________。

答案：$\frac{1}{9}$

解析：$\because 2^a=\frac{1}{3}$ $\therefore a=\log_2\frac{1}{3}=-\log_2 3$ 又 $\log_b 2=\frac{1}{2}$ $\therefore b=4$

$\Rightarrow b^a=4^{-\log_2 3}=2^{2(\log_2\frac{1}{3})}=2^{\log_2(\frac{1}{3})^2}=2^{\log_2\frac{1}{9}}=\frac{1}{9}$

10. 若對數 $\log_{(x-1)}(3-x)$ 有意義，求 x 的範圍為________。

答案：$1<x<3$，但 $x\neq2$

解析：$\begin{cases}x-1>0\\x-1\neq1\\3-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>1\\x\neq2\\3>x\end{cases}$

$\therefore 1<x<3$，但 $x\neq2$