高中 數學 科考試卷 ____年____班 座號：_____ 姓名：__________

一、單選題：每題 3 分、共 15 分

( )1. 設 a，b 為正實數，且 $\log_7 a=11$，$\log_7 b=13$，試問 $\log_7(a+b)$ 之值最接近下列哪個選項？

(A)12 (B)13 (C)14 (D)23 (E)24

答案：(B)

解析：由 $\log_7 a=11$，得 $a=7^{11}$

由 $\log_7 b=13$，得 $b=7^{13}$

故 $a+b=7^{11}+7^{13}=7^{13}(\frac{1}{49}+1)$

所以 $\log_7(a+b)=\log_7 7^{13}(\frac{1}{49}+1)=13+\log_7\frac{50}{49}$

因 $\log_7\frac{50}{49}$ 接近 0，故 $\log_7(a+b)$ 最接近 13

選(B)

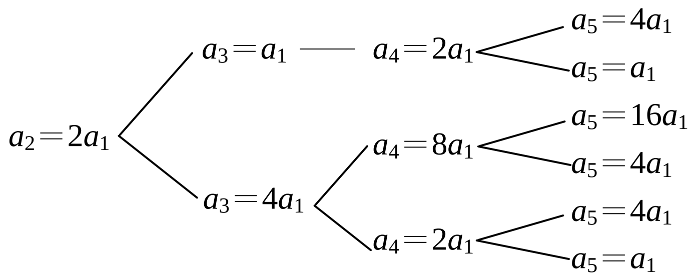
( )2. 五項實數數列 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 的每一項都大於 1，且每相鄰的兩項中，都有一數是另一數的兩倍。若 $a_1=\log_{10}36$，則 a_5 有多少種可能的值？

(A)3 (B)4 (C)5 (D)7 (E)8

答案：(A)

解析：$\because$ $\log_{10}10<\log_{10}36<\log_{10}100$ $\therefore$ $1<a_1<2$

由樹狀圖可知



$\therefore$ a_5 可能為 a_1，$4a_1$，$16a_1$ 等 3 種

故選(A)。

( )3. 設 $x^2-3xy-4y^2=0$ 且 $x>y>0$，試求 $\log(2x^2-3xy+10y^2)-\log(x^2+xy-17y^2)$ 之值為何？

(A)1 (B)$\frac{1}{10}$ (C)0 (D)10 (E)$\sqrt{10}$

答案：(A)

解析：$\because$ $x^2-3xy-4y^2=0\Rightarrow(x-4y)(x+y)=0$

$\therefore$ $x=4y$ 或 $x=-y$

又$\because$ $x>y>0$ $\therefore$ $x=4y$

$\Rightarrow$ 原式 $=\log\frac{2x^2-3xy+10y^2}{x^2+xy-17y^2}=\log\frac{2(4y)^2-3(4y)\cdot y+10y^2}{(4y)^2+(4y)\cdot y-17y^2}=\log\frac{30y^2}{3y^2}=\log 10=1$，故選(A)

( )4. x、y 為實數，$2^x=\frac{1}{5}$，$5^y=\frac{1}{8}$。則 xy 之值為

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4 (E)5

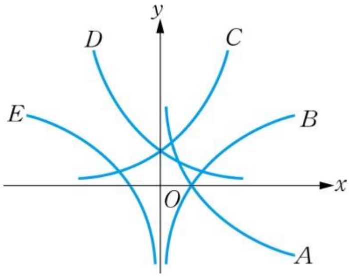
答案：(C)

解析：$\because$ $2^x=\frac{1}{5}$ $\therefore$ $x=\log_2\frac{1}{5}=-\log_2 5$

又 $5^y=\frac{1}{8}$ $\therefore$ $y=\log_5\frac{1}{8}=-\log_5 8$

$\Rightarrow xy=(-\log_2 5)(-\log_5 8)=\log_2 8=3$

(　　)5. 設 $a>1$，若 $y=f(x)=a^{-x}$ 與 $y=g(x)=\log_a x$ 的圖形皆在附圖中，則右列圖形中，何者為 $y=f(-x)$ 與 $y=-g(x)$的圖形？



(A)BA　(B)CA　(C)DA　(D)CE　(E)DE

答案：(B)

解析：$y=f(-x)=a^{-(-x)}=a^{x}$，因 $a>1$，故其圖形為 C，

$y=-g(x)=-\log_a x=-\dfrac{\log x}{\log a}=-\dfrac{1}{\log a}(\log x)$，

因 $a>1$，故 $-\dfrac{1}{\log a}<0$，所以其圖形為 A，

故選(B)。

二、多重選擇題：每題 3 分、共 15 分

(　　)1. 一種注射藥劑在病人血液中的量須維持在 600 mg 以上，否則病人就會有生命危險。現給某病人注射這種藥劑 2400 mg，如果藥在血液中以每 2 小時 20%的比例衰減，試問下列選項哪些正確？

(A)注射後 4 小時，此病人血液中的藥量約為 1536 mg　(B)注射後 4 小時，此病人血液中的藥量約為 1920 mg　(C)注射後大約經過 6 小時，病人需補打下一劑　(D)注射後大約經過 9 小時，病人需補打下一劑　(E)注射後大約經過 12 小時，病人需補打下一劑

答案：(A)(E)

解析：注射後的 n 小時，藥劑剩下 $2400\cdot(1-20\%)^{\frac{n}{2}}=2400\left(\dfrac{8}{10}\right)^{\frac{n}{2}}$

(1)(2) $n=4$：$2400\left(\dfrac{8}{10}\right)^{2}=1536$ (mg)

(3)(4)(5)$n=6$：$2400\left(\dfrac{8}{10}\right)^{3}=1228.8$

$n=9$：$2400\left(\dfrac{8}{10}\right)^{\frac{9}{2}}=938\times(0.8)^{\frac{1}{2}}\approx 938\times0.9=844$

$n=12$：$2400\left(\dfrac{8}{10}\right)^{6}=2400\times0.262=628.8$

故選(A)(E)

(　　)2. 請選出正確的選項？

(A)$\log_{-2}1=0$　(B)$\dfrac{\log 8}{\log 2}=4$　(C)$\log_4\dfrac{\sqrt{2}}{4}=-\dfrac{3}{4}$　(D)$\log_a 5=2$，則 $a=\pm\sqrt{5}$　(E)$\log_{0.2}\dfrac{5}{2}=\log_5 0.4$

答案：(C)(E)

解析：(A) 錯　$\because -2<0$

(B) 錯　$\because \dfrac{\log 8}{\log 2}=\log_2 8=3$

(C) 對　$\because \log_4\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\log_{2^2}\dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{2^2}=\log_{2^2}2^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{-\frac{3}{2}}{2}\log_2 2=\dfrac{-3}{4}$

(D) 錯　$\because a>0$　$\therefore a=\sqrt{5}$　($-\sqrt{5}$不合)

(E) 對　$\because \log_{0.2}\frac{5}{2}=\log_{\frac{1}{5}}\frac{5}{2}=\log_{5^{-1}}\frac{5}{2}=-\log_5\frac{5}{2}=\log_5(\frac{5}{2})^{-1}$

$=\log_5\frac{2}{5}=\log_5 0.4$

故選(C)(E)

(　　)3.　設 $a>1$，$x>0$，則有關函數 $y=f(x)=a^x$ 之敘述，下列何者正確？
(A)圖形由左向右上升　(B)圖形以 x 軸為漸近線　(C)圖形恆過 $(1,0)$　(D)與 $y=a^{-x}$ 對稱於 y 軸　(E) $f(x_1+x_2)=f(x_1)\times f(x_2)$

答案：(A)(B)(D)(E)

解析：(C) 圖形恆過 $(1,0)$

其餘均正確。

(　　)4.　關於 $y=a^x$ ($a>0$，$a\neq1$) 的圖形，試問下列哪些選項正確？
(A)圖形必通過點 $(1,0)$　(B)圖形必和任一條鉛直線交於一點　(C)圖形必和任一條水平線交於一點　(D) $\frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}\geq a^{\frac{x_1+x_2}{2}}$，其中 x_1,x_2 為任意實數　(E)若 $x_1>x_2$，則 $a^{x_1}>a^{x_2}$

答案：(B)(D)

解析：(A) ×：圖形必過點 $(0,1)$，x 軸為其漸近線。

(B) ○：當 x 為任意實數，則 a^x 恆有意義。

(C) ×：x 軸下方的水平線與 $y=a^x$ 的圖形沒有交點。

(D) ○：因 $a^{x_1},a^{x_2}>0$，由算幾不等式知 $\frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}\geq\sqrt{a^{x_1}a^{x_2}}=a^{\frac{x_1+x_2}{2}}$。

(E) ×：(i) 當 $a>1$ 時，$x_1>x_2\Rightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$；(ii) 當 $0<a<1$ 時，$x_1>x_2\Rightarrow a^{x_1}<a^{x_2}$。

故選(B)(D)。

(　　)5.　已知 a 為不等於 1 的正實數，有關指、對數函數圖形的敘述哪些正確？
(A) $y=a^x$，$y=\log_a x$ 的圖形皆凹口向上　(B) $y=a^x$，$y=\log_a x$ 的值域皆為所有實數　(C) $y=\log_a x$ 的圖形與直線 $y=a$ 必有交點　(D) $y=a^x$，$y=\log_a x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$　(E) $y=a^x$，$y=\log_a x$ 的圖形最多有 3 個交點

答案：(C)(D)(E)

解析：(A) 當 $a>1$，$y=\log_a x$ 凹向下

(B) $y=a^x>0$　$\therefore$ 值域為正實數

(C)(D)(E)皆對

三、非選題：每題 8 分、共 40 分

1.　設 $f(x)=2(9^x+9^{-x})-4(3^x+3^{-x})$，試求 $f(x)$ 的最小值，並求此時 x 值為何？

答案：最小值：-4，x 值 $=0$

解析：令 $3^x+3^{-x}=A$ ($\because$ 算幾不等式 $A\geq2$)

$\Rightarrow f(A)=2(A^2-2)-4A=2A^2-4A-4$

$=2(A-1)^2-6$ (頂點不在定義域內，所以選邊界)

$\therefore$ 當 $A=2$ 時，有最小值 -4

此時 $3^x+3^{-x}=2\Rightarrow 3^{2x}-2\cdot3^x+1=0\Rightarrow(3^x-1)^2=0$ 即 $3^x=1\Rightarrow x=0$

2.　比較對數 $a=\log_{\frac{1}{3}}7$，$b=\log_{\frac{1}{7}}3$，$c=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{7}$，$d=\log_{\frac{1}{7}}\frac{1}{3}$ 的大小。

答案：$c>d>b>a$

解析：$a=\log_{\frac{1}{3}}7<-\log_3 7<-\log_3 3=-1$，

$0=\log_{\frac{1}{7}}1>b=\log_{\frac{1}{7}}3=-\log_7 3>-\log_7 7=-1$，

$c=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{7}=\log_3 7>1$，

$0=\log_7 1<d=\log_{\frac{1}{7}}\frac{1}{3}=\log_7 3<\log_7 7=1$，

$\Rightarrow c>1>d>0>b>-1>a$

$\therefore c>d>b>a$

3. (1) 點 $P(\alpha,\beta)$ 不在直線 L：$y=x$ 上，請找出點 P 對直線 L 的對稱點 Q 之坐標？
(2) 實數 a 滿足 $0<a\neq1$，請證明指數函數 $f(x)=a^x$ 與對數函數 $g(x)=\log_a x$ 的圖形對稱於直線 L：$y=x$。

答案：(1) (β,α)；(2) 略

解析：(1) 設 $Q(x,y)$ $\because \overleftrightarrow{PQ}\perp L$ $\therefore m_{PQ}\times1=-1$，即 $\frac{y-\beta}{x-\alpha}=-1$

$\Rightarrow x+y=\alpha+\beta$…①

$\because$ $\overline{PQ}$ 之中點$(\frac{x+\alpha}{2},\frac{y+\beta}{2})$在 L 上

$\therefore$ $x+\alpha=y+\beta\Rightarrow x-y=-\alpha+\beta$…②

由①②可解得 $x=\beta$，$y=\alpha$

(2) 設點 $P(\alpha,\beta)$在指數函數 $f(x)=a^x$ 的圖形上 $\therefore$ $\beta=a^\alpha$

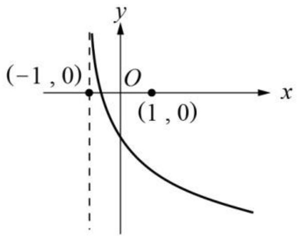
由(1)可得 P 對 L 之對稱點 Q 為(β,α)，

因 $\beta=a^\alpha\Rightarrow\alpha=\log_a\beta\Rightarrow Q$ 在對數函數 $g(x)=\log_a x$ 的圖形上，

反之，同理可證若點 Q'在對數函數 $g(x)=\log_a x$ 的圖形上，

則 Q'對 L 之對稱點 P'亦在指數函數 $f(x)=a^x$ 的圖形上

4. 函數 $y=a+\log_k(x+b)$的圖形如附圖所示，其中 $x=-1$為圖形的漸近線，試判斷(1)～(3)三題的敘述是否正確。
(　　) (1) $0<k<1$。
(　　) (2) $b=-1$。
(　　) (3) $a<0$。



答案：(1) ○；(2) ×；(3) ○

解析：$y=a+\log_k(x+b)$的圖形是由 $y=\log_k x$ 的圖形水平移動，再鉛直移動而得。

(1) ○：圖形由左而右下降 $\Rightarrow0<k<1$。

(2) ×：漸近線 $x=-1$

$\Rightarrow$原圖形向左移 1 單位 $\Rightarrow b=1$。

(3) ○：當 $x=0\Rightarrow y=a+\log_k(0+1)=a<0$。

5. 試計算下列各式的值：

(1) $81^{\frac{\log25}{\log9}}$。

(2) $\log_8(\sqrt{2+\sqrt3}-\sqrt{2-\sqrt3})$。

(3) $(\log_5\frac{1}{7})(\log_2\sqrt5)(\log_7 4)$。

答案：(1)625；(2)$\frac{1}{6}$；(3)-1

解析：(1) $81^{\frac{\log 25}{\log 9}}=81^{\log_9 25}=(3^4)^{\log_3 5}=3^{\log_3 625}=625$

(2) 設 $x=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$，

則 $x^2=(2+\sqrt{3})-2+(2-\sqrt{3})=2$，

因 $x>0$，故 $x=\sqrt{2}$，

於是原式 $=\log_8\sqrt{2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\log_2 2=\frac{1}{6}$

(3) 原式 $=(-\log_5 7)(\frac{1}{2}\log_2 5)(2\log_7 2)$

$=(-\frac{1}{2}\times 2)(\log_2 5)(\log_5 7)(\log_7 2)$

$=-1$

四、填充題：每題 3 分、共 30 分

1. $\log_5(5^x+125)=\frac{x}{2}+1+\log_5 6$ 之解為________。

答案：$x=2$ 或 4

解析：$\log_5(5^x+125)=\log_5 5^{\frac{x}{2}}+\log_5 5+\log_5 6$

$=\log_5(30\cdot 5^{\frac{x}{2}})$

$\Rightarrow 5^x-30\cdot 5^{\frac{x}{2}}+125=0$

$\Rightarrow (5^{\frac{x}{2}}-5)(5^{\frac{x}{2}}-25)=0$

$\Rightarrow 5^{\frac{x}{2}}=5=5^1$ 或 $5^{\frac{x}{2}}=25=5^2$

$\Rightarrow \frac{x}{2}=1$ 或 $\frac{x}{2}=2\Rightarrow x=2$ 或 $x=4$

2. 設 $a=\log_2 3$，$b=\log_3 7$，試以 a、b 表 $\log_{12} 63=$________。

答案：$\dfrac{2a+ab}{2+a}$

解析：$a=\log_2 3$，$b=\log_3 7\Rightarrow ab=\log_2 7$

$\log_{12} 63=\dfrac{\log_2 63}{\log_2 12}=\dfrac{\log_2 7+\log_2 9}{\log_2 3+\log_2 4}=\dfrac{ab+2a}{a+2}$

3. 已知函數 $f(x)=a^{2x}+5a^x-4\ (0<a\neq 1)$ 在區間〔$-1,1$〕(即 $-1\le x\le 1$) 上的最小值為 $-\frac{5}{4}$，則 $f(x)$ 在區間〔$-1,1$〕上的最大值為________。

答案：10

解析：設 $t=a^x>0$，

則 $y=f(x)=a^{2x}+5a^x-4=g(t)=t^2+5t-4=(t+\frac{5}{2})^2-\frac{41}{4}$ 在〔$-\frac{5}{2},\infty$) 上為遞增函數

$y_{\min}=t^2+5t-4=-\frac{5}{4}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{11}{2}$ (不合)

(i) $0<a<1$ 時，$t\in$〔$a,\frac{1}{a}$〕，$y=g(t)$ 在〔$a,\frac{1}{a}$〕上為遞增函數

$\therefore a=\frac{1}{2}\Rightarrow y_{\max}=g(\frac{1}{a})=g(2)=2^2+5\times 2-4=10$

(ii) $a>1$ 時，$t\in$〔$\frac{1}{a},a$〕，$y=g(t)$ 在〔$\frac{1}{a},a$〕上為遞增函數

4. 請搭配計算機回答問題：

小綠某天數學課看到題目中有自然常數 e 的 300 次方，心血來潮想用計算機按按看，但因她手上的計算機的顯示轉換成科學記號只能顯示 100 位數，小綠發現 e^{300} 直接利用計算機按出來螢幕會顯示 ERROR，試回答下列問題：

(1) 小綠先假設 $10^{k} \le e^{300} < 10^{k+1}$，其中 k 值為正整數，則 $k=$________。

(2) 承上題，3^{240} 為________位數。

(3) 若是 $e^{x}=10^{100}$，則 x 值大約為________。(四捨五入取到小數點後第二位)

答案：(1) 130；(2) 115；(3) 230.26

解析：(1) $\log e^{300}=300\log e=300\times 0.43429=130.28\ldots$

為 131 位數

$\therefore k=130$

(2) $\log 3^{240}=240\log 3\approx 114.509$

為 115 位數

(3) $e^{x}=10^{100}$

$x\log e=100$

$x=\dfrac{100}{\log e}\fallingdotseq 230.26$

5. 已知 $\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，滿足不等式 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n}<\dfrac{1}{1000}$ 的最小自然數 $n=$________。

答案：18

解析：$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n}<\dfrac{1}{1000}\Rightarrow \log\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n}<\log\dfrac{1}{1000}\Rightarrow n(\log 2-\log 3)<-3$，

$\Rightarrow n(0.3010-0.4771)<-3\Rightarrow n\times(-0.1761)<-3$，

即 $n>\dfrac{3}{0.1761}=17.03\ldots$，

故 n 最小值是 18

6. 設 α、β 為方程式 $3^{-x}-3^{2-\frac{x}{2}}+9=0$ 的兩根，試求 $\alpha+\beta=$________。

答案：-4

解析：令 $3^{-\frac{x}{2}}=t>0$，$t^{2}-9t+9=0$，$3^{-\frac{\alpha}{2}}\cdot 3^{-\frac{\beta}{2}}=9\Rightarrow 3^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}}=9=3^{2}$

$\therefore \alpha+\beta=-4$

7. 假設某種商品的廣告效應的模型可以用下述對數關係來表示：$N(x)=a+b\log_{2}(x+1)$，其中 $N(x)$ 表銷售數量（單位：個），x 為廣告費用（單位：萬元），a, b 為常數。已知不花錢做廣告時，銷售量為 800 個；若廣告費用花 3 萬元，銷售量為 2000 個。

(1) 試求數對 $(a, b)=$________。

(2) 若希望銷售量達到 3200 個，則至少需花費________萬元廣告費。

答案：(1) (800 , 600)；(2) 15

解析：(1) $N(0)=800$

$N(3)=2000$

$$\begin{cases} a+b\log_{2}1=800 \\ a+b\log_{2}4=2000 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=800 \\ a+2b=2000 \end{cases}$$

$\therefore a=800$，$b=600$

(2) $N(x)=800+600\log_{2}(x+1)$

$800+600\log_{2}(x+1)=3200$

$600\log_{2}(x+1)=2400$

$\log_{2}(x+1)=4$

$\therefore x=15$

8. 放射性物質衰變為原來質量一半所需的時間，稱為物質的半衰期。現有 A、B 兩種放射性物質，其中 A 的質量與 B 的質量之比例為 100：49，而 90 個月前 A 的質量與 B 的質量之比例為 25：49。若物質 B 的半衰期為 18 個月，則物質 A 的半衰期為________個月。

答案：30

解析：$\dfrac{25\times(\frac{1}{2})^{\frac{90}{T}}}{49\times(\frac{1}{2})^{\frac{90}{18}}}=\dfrac{100}{49}$　$(\dfrac{1}{2})^{\frac{90}{T}-5}=4$

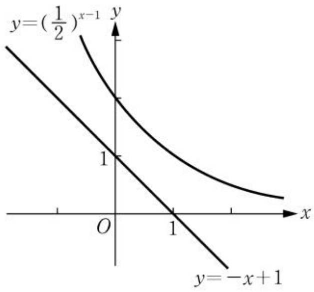
$\therefore \dfrac{90}{T}-5=-2$

$\therefore T=30$

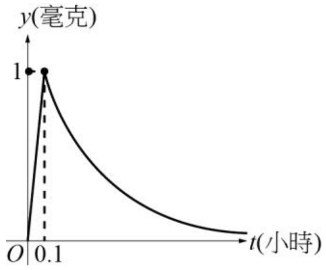
9. 方程式 $(\dfrac{1}{2})^{x-1}=-x+1$ 有________個相異的實根。

答案：0

解析：$\because \begin{cases} y=(\frac{1}{2})^{x-1} \\ y=-x+1 \end{cases}$ 的圖形沒有交點　$\therefore (\dfrac{1}{2})^{x-1}=-x+1$ 沒有相異實根



10. 為了預防新型冠狀病毒（COVID-19）的傳染，某高中對學校教室使用消毒液進行消毒。如圖所示，已知消毒液開始噴灑時，室內每立方公尺空氣中含藥量 y（毫克），與時間 t（小時）成正比；6 分鐘消毒液噴灑完畢後，y 與 t 的函數關係為：$y=(\dfrac{1}{16})^{t-a}$，其中 a 為常數。根據消毒液性質，當空氣中每立方公尺的含藥量不大於 0.125 毫克時，學生方可進教室，那麼從開始噴灑消毒液，至少需經過________分鐘才能進教室。



答案：51

解析：$1=(\dfrac{1}{16})^{0.1-a}$　$\therefore 0.1-a=0$　$\therefore a=0.1$

$\Rightarrow y=(\dfrac{1}{16})^{t-0.1}\leq 0.125=\dfrac{1}{8}$　$(\dfrac{1}{2})^{4t-0.4}\leq(\dfrac{1}{2})^{3}$

$4t-0.4\geq 3$

$4t\geq 3.4$

$t\geq\dfrac{17}{20}$

$\dfrac{17}{20}$（小時）$=\dfrac{17}{20}\times 60=51$（分鐘）