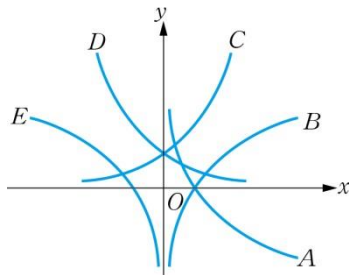


一、單選題：每題 3 分、共 15 分

- ( ) 1. 設  $a, b$  為正實數，且  $\log_7 a = 11, \log_7 b = 13$ ，試問  $\log_7 (a+b)$  之值最接近下列哪個選項？  
 (A)12 (B)13 (C)14 (D)23 (E)24
- ( ) 2. 五項實數數列  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  的每一項都大於 1，且每相鄰的兩項中，都有一數是另一數的兩倍。若  $a_1 = \log_{10} 36$ ，則  $a_5$  有多少種可能的值？  
 (A)3 (B)4 (C)5 (D)7 (E)8
- ( ) 3. 設  $x^2 - 3xy - 4y^2 = 0$  且  $x > y > 0$ ，試求  $\log(2x^2 - 3xy + 10y^2) - \log(x^2 + xy - 17y^2)$  之值為何？  
 (A)1 (B) $\frac{1}{10}$  (C)0 (D)10 (E) $\sqrt{10}$
- ( ) 4.  $x, y$  為實數， $2^x = \frac{1}{5}, 5^y = \frac{1}{8}$ 。則  $xy$  之值為  
 (A)1 (B)2 (C)3 (D)4 (E)5
- ( ) 5. 設  $a > 1$ ，若  $y = f(x) = a^{-x}$  與  $y = g(x) = \log_a x$  的圖形皆在附圖中，則右列圖形中，何者為  $y = f(-x)$  與  $y = -g(x)$  的圖形？



- (A)BA (B)CA (C)DA (D)CE (E)DE

二、多重選擇題：每題 3 分、共 15 分

- ( ) 1. 一種注射藥劑在病人血液中的量須維持在 600 mg 以上，否則病人就會有生命危險。現給某病人注射這種藥劑 2400 mg，如果藥在血液中以每 2 小時 20% 的比例衰減，試問下列選項哪些正確？  
 (A)注射後 4 小時，此病人血液中的藥量約為 1536 mg (B)注射後 4 小時，此病人血液中的藥量約為 1920 mg (C)注射後大約經過 6 小時，病人需補打下一劑 (D)注射後大約經過 9 小時，病人需補打下一劑 (E)注射後大約經過 12 小時，病人需補打下一劑
- ( ) 2. 請選出正確的選項？  
 (A) $\log_{-2} 1 = 0$  (B) $\frac{\log 8}{\log 2} = 4$  (C) $\log_4 \frac{\sqrt{2}}{4} = -\frac{3}{4}$  (D) $\log_a 5 = 2$ ，則  $a = \pm\sqrt{5}$  (E) $\log_{0.2} \frac{5}{2} = \log_5 0.4$
- ( ) 3. 設  $a > 1, x > 0$ ，則有關函數  $y = f(x) = a^x$  之敘述，下列何者正確？  
 (A)圖形由左向右上升 (B)圖形以  $x$  軸為漸近線 (C)圖形恆過  $(1, 0)$  (D)與  $y = a^{-x}$  對稱於  $y$  軸 (E) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \times f(x_2)$
- ( ) 4. 關於  $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$  的圖形，試問下列哪些選項正確？  
 (A)圖形必通過點  $(1, 0)$  (B)圖形必和任一鉛直線交於一點 (C)圖形必和任一條水

平線交於一點 (D)  $\frac{a^{x_1} + a^{x_2}}{2} \geq a^{\frac{x_1+x_2}{2}}$ ，其中  $x_1, x_2$  為任意實數 (E) 若  $x_1 > x_2$ ，則  $a^{x_1} > a^{x_2}$

- ( ) 5. 已知  $a$  為不等於 1 的正實數，有關指、對數函數圖形的敘述哪些正確？  
 (A)  $y = a^x, y = \log_a x$  的圖形皆凹口向上 (B)  $y = a^x, y = \log_a x$  的值域皆為所有實數 (C)  $y = \log_a x$  的圖形與直線  $y = a$  必有交點 (D)  $y = a^x, y = \log_a x$  的圖形對稱於直線  $y = x$  (E)  $y = a^x, y = \log_a x$  的圖形最多有 3 個交點

三、非選題：每題 8 分、共 40 分

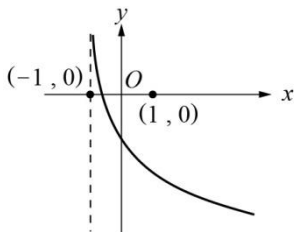
1. 設  $f(x) = 2(9^x + 9^{-x}) - 4(3^x + 3^{-x})$ ，試求  $f(x)$  的最小值，並求此時  $x$  值為何？

2. 比較對數  $a = \log_{\frac{1}{3}} 7, b = \log_{\frac{1}{7}} 3, c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{7}, d = \log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{3}$  的大小。

3. (1) 點  $P(\alpha, \beta)$  不在直線  $L: y = x$  上，請找出點  $P$  對直線  $L$  的對稱點  $Q$  之坐標？  
 (2) 實數  $a$  滿足  $0 < a \neq 1$ ，請證明指數函數  $f(x) = a^x$  與對數函數  $g(x) = \log_a x$  的圖形對稱於直線  $L: y = x$ 。

4. 函數  $y = a + \log_k(x + b)$  的圖形如附圖所示，其中  $x = -1$  為圖形的漸近線，試判斷(1)~(3)三題的敘述是否正確。

- ( ) (1)  $0 < k < 1$ 。  
 ( ) (2)  $b = -1$ 。  
 ( ) (3)  $a < 0$ 。



5. 試計算下列各式的值：

(1)  $81^{\frac{\log 25}{\log 9}}$ 。

(2)  $\log_8 (\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}})$ 。

(3)  $(\log_5 \frac{1}{7})(\log_2 \sqrt{5})(\log_7 4)$ 。

四、填充題：每題 3 分、共 30 分

1.  $\log_5 (5^x + 125) = \frac{x}{2} + 1 + \log_5 6$  之解為\_\_\_\_\_。

2. 設  $a = \log_2 3$ ,  $b = \log_3 7$ , 試以  $a$ 、 $b$  表  $\log_{12} 63 =$ \_\_\_\_\_。

3. 已知函數  $f(x) = a^{2x} + 5a^x - 4$  ( $0 < a \neq 1$ ) 在區間  $[-1, 1]$  (即  $-1 \leq x \leq 1$ ) 上的最小值為  $-\frac{5}{4}$ , 則  $f(x)$  在區間  $[-1, 1]$  上的最大值為\_\_\_\_\_。

4. 請搭配計算機回答問題：

小綠某天數學課看到題目中有自然常數  $e$  的 300 次方, 心血來潮想用計算機按按看, 但因她手上的計算機的顯示轉換成科學記號只能顯示 100 位數, 小綠發現  $e^{300}$  直接利用計算機按出來螢幕會顯示 ERROR, 試回答下列問題：

(1) 小綠先假設  $10^k \leq e^{300} < 10^{k+1}$ , 其中  $k$  值為正整數, 則  $k =$ \_\_\_\_\_。

(2) 承上題,  $3^{240}$  為\_\_\_\_\_位數。

(3) 若是  $e^x = 10^{100}$ , 則  $x$  值大約為\_\_\_\_\_。(四捨五入取到小數點後第二位)

5. 已知  $\log 2 \approx 0.3010$ ,  $\log 3 \approx 0.4771$ , 滿足不等式  $(\frac{2}{3})^n < \frac{1}{1000}$  的最小自然數  $n =$ \_\_\_\_\_。

6. 設  $\alpha$ 、 $\beta$  為方程式  $3^{-x} - 3^{\frac{2-x}{2}} + 9 = 0$  的兩根, 試求  $\alpha + \beta =$ \_\_\_\_\_。

7. 假設某種商品的廣告效應的模型可以用下述對數關係來表示： $N(x) = a + b \log_2(x+1)$ , 其中  $N(x)$  表銷售數量 (單位：個),  $x$  為廣告費用 (單位：萬元),  $a, b$  為常數。已知不花錢做廣告時, 銷售量為 800 個; 若廣告費用花 3 萬元, 銷售量為 2000 個。

(1) 試求數對  $(a, b) =$ \_\_\_\_\_。

(2) 若希望銷售量達到 3200 個, 則至少需花費\_\_\_\_\_萬元廣告費。

8. 放射性物質衰變為原來質量一半所需的時間, 稱為物質的半衰期。現有 A、B 兩種放射性物質, 其中 A 的質量與 B 的質量之比例為 100:49, 而 90 個月前 A 的質量與 B 的質量之比例為 25:49。若物質 B 的半衰期為 18 個月, 則物質 A 的半衰期為\_\_\_\_\_個月。

9. 方程式  $(\frac{1}{2})^{x-1} = -x+1$  有\_\_\_\_\_個相異的實根。

10. 為了預防新型冠狀病毒 (COVID-19) 的傳染，某高中對學校教室使用消毒液進行消毒。如圖所示，已知消毒液開始噴灑時，室內每立方公尺空氣中含藥量  $y$  (毫克)，與時間  $t$  (小時) 成正比；6 分鐘消毒液噴灑完畢後， $y$  與  $t$  的函數關係為： $y = (\frac{1}{16})^{t-a}$ ，其中  $a$  為常數。根據消毒液性質，當空氣中每立方公尺的含藥量不大於 0.125 毫克時，學生方可進教室，那麼從開始噴灑消毒液，至少需經過\_\_\_\_\_分鐘才能進教室。

