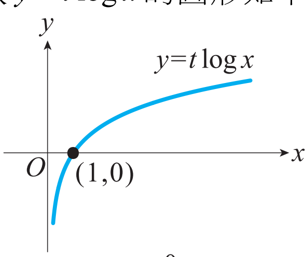
7 對數函數

主題一　常用對數函數及其圖形 （搭配課本 P.110～P.118）

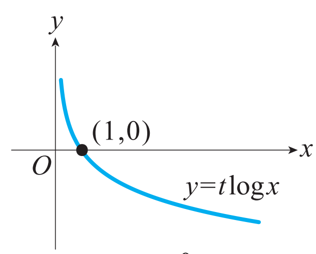
1. 定義：設 $x>0$，函數 $y=f(x)=\log x$ 稱為以 10 為底數的**常用對數函數**。
2. 一般底數的對數函數 $y=\log_a x$ 皆可（藉由換底公式）換成常用對數函數 $y=\log x$ 的常數倍：

$$y=\log_a x=\frac{\log x}{\log a}=\frac{1}{\log a}\times\log x=t\log x\text{。（其中 }t=\frac{1}{\log a}\text{）}$$

3. 常用對數函數 $y=t\log x$ 的圖形如下。

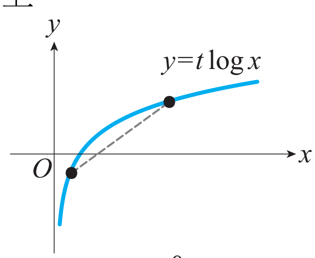


$t>0$

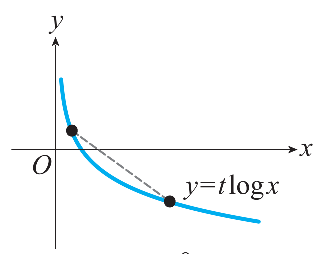


$t<0$

4. 常用對數函數圖形 $y=t\log x$ 的特徵：
   (1) 因為 $\log 1=0$，所以圖形會過點 $(1,0)$。
   (2) 圖形都在 y 軸右方，且 y 軸為其漸近線。
   (3) ① 當 $t>0$ 時，因為圖形由左往右逐漸上升，所以對數函數為**嚴格遞增函數**（即 x 愈大，y 愈大）。
   ② 當 $t<0$ 時，因為圖形由左往右逐漸下降，所以對數函數為**嚴格遞減函數**（即 x 愈大，y 愈小）。
   (4) 函數 $y=t\log x$ 和 $y=-t\log x$ 的圖形對稱於 x 軸。
   (5) ① 當 $t>0$ 時，圖形上任相異兩點所連成的線段都在函數圖形的下方，即函數圖形的凹口向下。
   ② 當 $t<0$ 時，圖形上任相異兩點所連成的線段都在函數圖形的上方，即函數圖形的凹口向上。



$t>0$



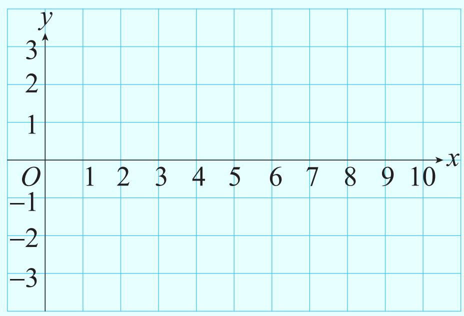
$t<0$

5. 常用對數函數 $y=\log x$ 的定義域為所有正實數，且值域為全體實數 $\mathbb{R}$。
6. 指數函數 $y=10^x$ 與常用對數函數 $y=\log x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$。

例題 1

【配合課本例 1】

已知 $\log 2 \approx 0.3010$，$\log 3 \approx 0.4771$，$\log 7 \approx 0.8451$。在下列方格紙中描繪常用對數函數 $y=\log x$ 的圖形。



解▶ 首先對某些 x 值求出其對應的函數值 $y=\log x$，

$\log 1 = 0$；　$\log 5 = \log\frac{10}{2} = 1 - \log 2 \approx 0.6990$；

$\log 10 = 1$；

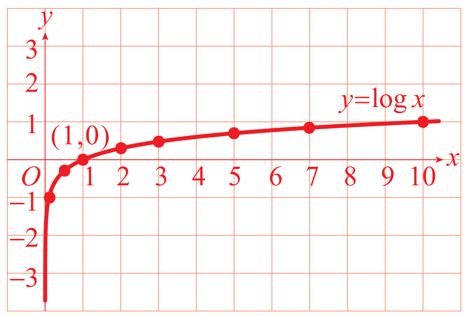
$\log\frac{1}{2} = -\log 2 \approx -0.3010$；　$\log\frac{1}{10} = -1$。

將以上各式的結果整理列表如下。

x	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	5	7	10
$y=\log x$	-1	約 -0.3010	0	約 0.3010	約 0.4771	約 0.6990	約 0.8451	1

接著將表列所對應的點逐一畫在坐標平面上，

最後再用平滑曲線把這些點連接起來而得出下圖，即為 $y=\log x$ 的圖形。



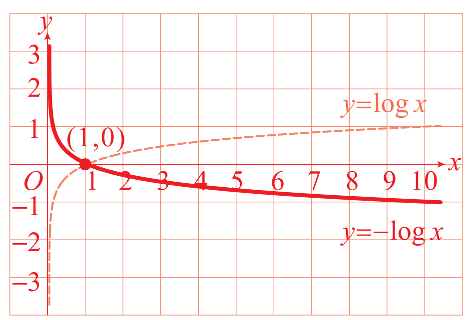
演練 1

利用 $y=\log x$ 描繪 $y=-\log x$ 的圖形。

解▶ 因為對每一個 x，$y=-\log x$ 的值總是 $y=\log x$ 的相反數，

所以 $y=-\log x$ 的圖形與 $y=\log x$ 的圖形對稱於 x 軸，

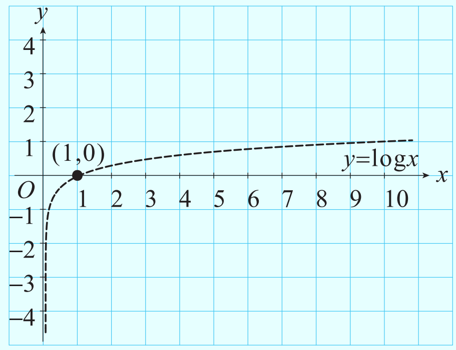
如右圖所示。



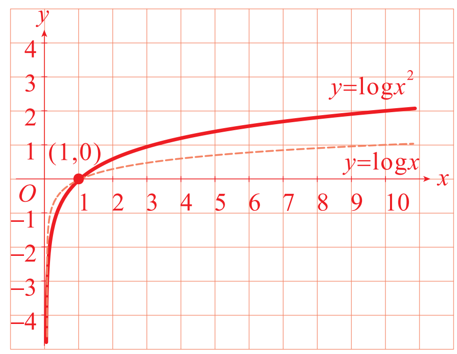
例題 2

【配合課本例 2】

設 $x>0$，利用 $y=\log x$ 的圖形，畫出 $y=\log x^2$ 的圖形。

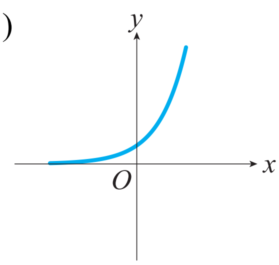


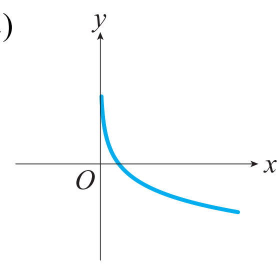
解▸ 因為對每一個 $x>0$，$y=\log x^2=2\log x$ 的值總是 $y=\log x$ 的 2 倍，所以 $y=\log x^2$ 的圖形如右圖所示。

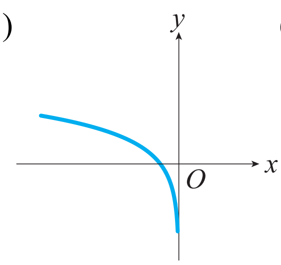


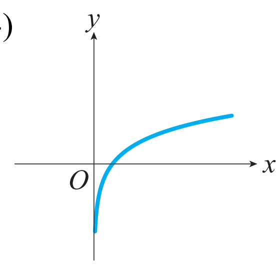
演練 2

設 t 為不等於 0 的實數，下列圖形中，哪些可能是對數函數 $y=t\log x$ 的部分圖形？

(1)


(2)


(3)


(4)


解▸ 由對數函數的圖形可知，正確的選項為(2)(4)。

例題 3

【概念題】

已知函數 $f(x)$ 的圖形與 $g(x)=2\log x$ 的圖形對稱於 x 軸，求 $f(x)$。

解▸ 因為對數函數 $y=t\log x$ 和 $y=-t\log x$ 的圖形對稱於 x 軸，所以 $f(x)=-2\log x$。

演練 3

已知函數 $f(x)$ 的圖形與 $g(x)=-4\log x$ 的圖形對稱於 x 軸，求 $f(x)$。

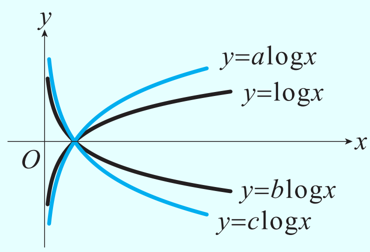
解▶ 因為對數函數 $y=t\log x$ 和 $y=-t\log x$ 的圖形對稱於 x 軸，所以 $f(x)=4\log x$。

例題 4

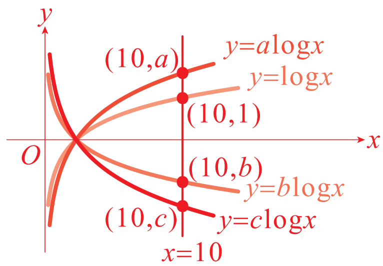
【配合課本例 3】

右圖為函數 $y=a\log x$、$y=b\log x$、$y=c\log x$ 與 $y=\log x$ 的圖形，且 $y=b\log x$ 與 $y=\log x$ 的圖形對稱於 x 軸。選出所有正確的選項。

(1) $a>1$　(2) $a<1$　(3) $b=-1$　(4) $c<-1$。



解▶ 因為 $y=b\log x$ 與 $y=\log x$ 的圖形對稱於 x 軸，所以 $b=-1$。
作直線 $x=10$ 與四個函數圖形分別交於四點，
又由圖可知：$a>1>b=-1>c$。
故正確的選項為(1)(3)(4)。



（示意圖）

演練 4

設 $t>0$，關於常用對數函數 $y=f(x)=t\log x$ 的敘述，選出所有正確的選項。

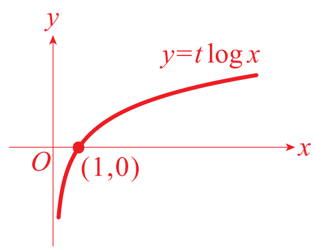
(1)函數 $f(x)$ 的圖形為嚴格遞增函數

(2)函數 $f(x)$ 的圖形凹口向上

(3)函數 $f(x)$ 的圖形必過點 $(1,0)$

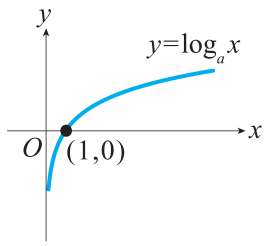
(4)函數 $f(x)$ 的圖形與任意一條鉛直線相交。

解▶ 作 $t>0$ 時，$y=t\log x$ 的圖形如右。
觀察圖形即可得(1)(3)正確。

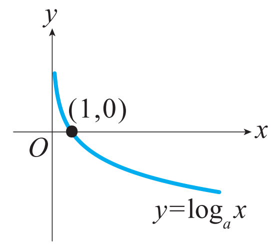


◎ ## 主題二　對數函數及其圖形

1. 定義：設 $a>0$，$a\neq 1$，$x>0$，函數 $y=f(x)=\log_a x$ 稱為以 a 為底數的對數函數。
2. 對數函數 $y=\log_a x$ 的圖形如下。

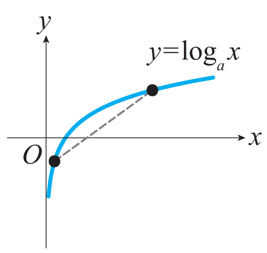


$a>1$

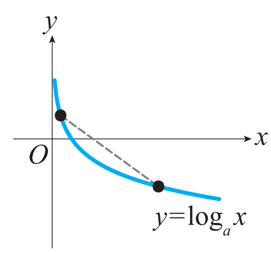


$0<a<1$

3. 對數函數圖形的特徵：
   (1) 因為 $\log_a 1=0$，所以圖形會過點 $(1,0)$。
   (2) 圖形都在 y 軸右方，且 y 軸為其漸近線。
   (3) ① 當 $a>1$ 時，因為圖形由左往右逐漸上升，所以對數函數為**嚴格遞增函數**（即 x 愈大，y 愈大）。
   ② 當 $0<a<1$ 時，因為圖形由左往右逐漸下降，所以對數函數為**嚴格遞減函數**（即 x 愈大，y 愈小）。
   (4) 函數 $y=\log_a x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的圖形對稱於 x 軸。
   (5) ① 當 $a>1$ 時，圖形上任相異兩點所連成的線段都在函數圖形的下方，即函數圖形的凹口向下。
   ② 當 $0<a<1$ 時，圖形上任相異兩點所連成的線段都在函數圖形的上方，即函數圖形的凹口向上。



$a>1$



$0<a<1$

4. 對數函數 $y=\log_a x$ 的定義域為所有正實數，且值域為全體實數 $\mathbb{R}$。
5. 指數函數 $y=a^x$ 與對數函數 $y=\log_a x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$。

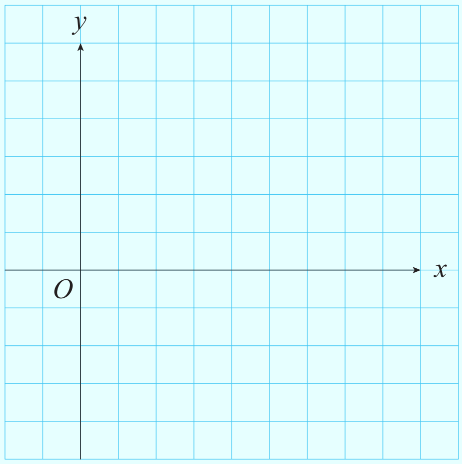
註：符號◎表示：非課綱的內容，教師可視情況延伸補充。

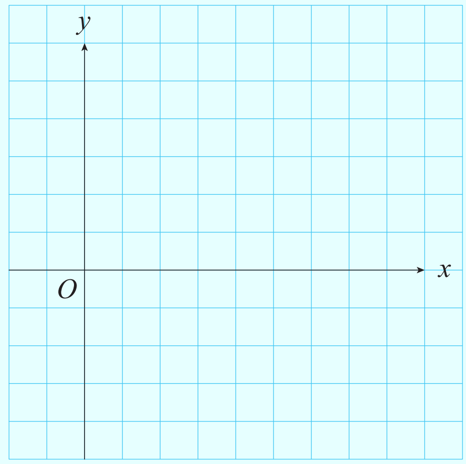
例題 5

【配合課本內文】

在下列方格紙中描繪下列各對數函數的圖形。

(1) $y=\log_2 x$。　　◎(2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$。





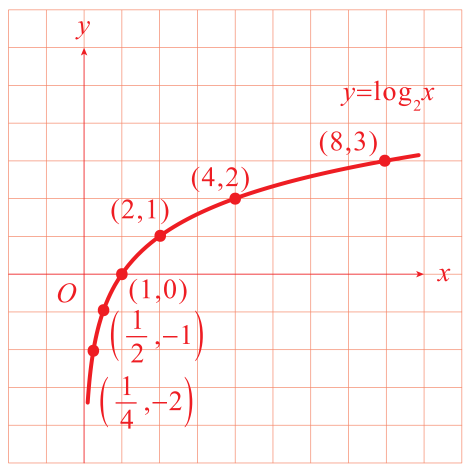
解▶ (1) 首先列出一些滿足 $y=\log_2 x$ 的點 (x,y)。

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3

接著將表列所對應的點逐一畫在坐標平面上，

最後再用平滑曲線把這些點連接起來而得出右圖，

即為 $y=\log_2 x$ 的圖形。



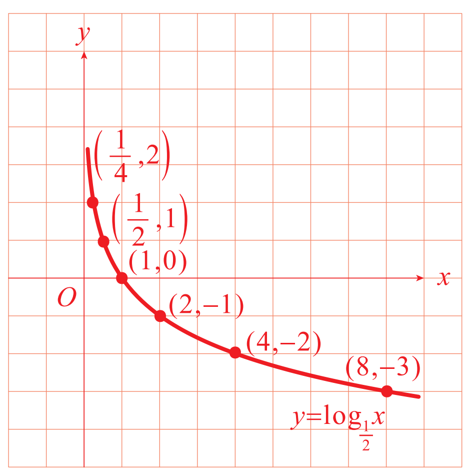
(2) 首先列出一些滿足 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的點 (x,y)。

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-1	-2	-3

接著將表列所對應的點逐一畫在坐標平面上，

最後再用平滑曲線把這些點連接起來而得出右圖，

即為 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形。

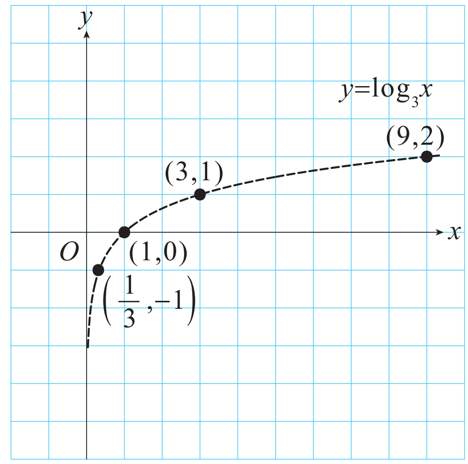


◎ 演練 5

已知 $y=\log_a x$ 的圖形與 $y=\log_3 x$ 的圖形對稱於 x 軸。

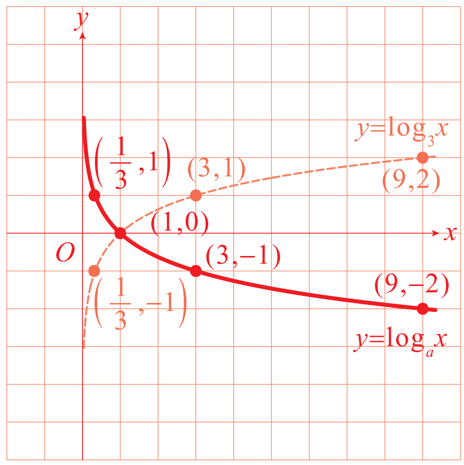
(1)利用 $y=\log_3 x$ 的圖形，畫出 $y=\log_a x$ 的圖形。

(2)觀察圖形推測 a 的值。



解▶ (1) 因為 $y=\log_a x$ 的圖形與 $y=\log_3 x$ 的圖形對稱於 x 軸，

所以其圖形如下圖所示。

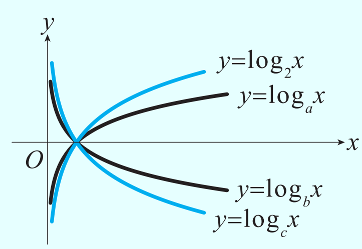


(2) 由圖可知，$a=\dfrac{1}{3}$。

◎ 例題 6

右圖為函數 $y=\log_a x$、$y=\log_b x$、$y=\log_c x$ 與 $y=\log_2 x$ 的圖形，且 $y=\log_c x$ 與 $y=\log_2 x$ 的圖形對稱於 x 軸。選出正確的選項。

(1) $a>2$　(2) $1<a<2$　(3) $b>c$　(4) $c=\dfrac{1}{2}$。



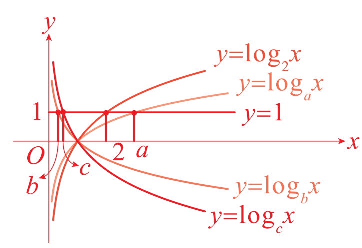
解▶ 作直線 $y=1$ 與四個函數圖形分別交於四點，

如右圖所示，由圖可知：$a>2>1>c>b$。

又因為 $y=\log_c x$ 與 $y=\log_2 x$ 的圖形對稱於 x 軸，

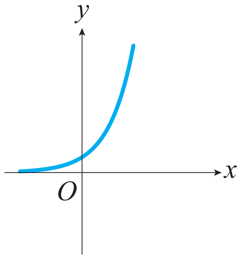
所以 $c=\dfrac{1}{2}$。

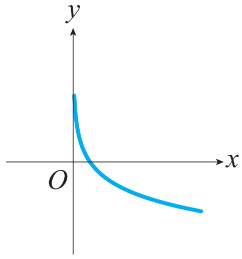
故選(1)(4)。

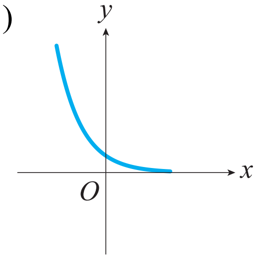


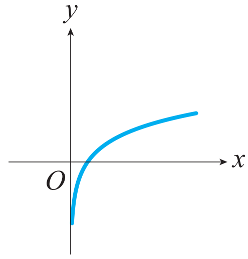
◎ 演練 6

設 $a>0$，$a\neq 1$，下列圖形中，哪些可能是對數函數 $y=\log_a x$ 的圖形？

(1) 

(2) 

(3) 

(4) 

解▶ 由對數函數的圖形可知，正確的選項為(2)(4)。

◎ 例題 7

已知函數 $f(x)$ 的圖形與 $g(x)=\log_3 x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$，求 $f(x)$。

解▶ 因為指數函數 $y=a^x$ 與對數函數 $y=\log_a x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$，

所以 $f(x)=3^x$。

◎ 演練 7

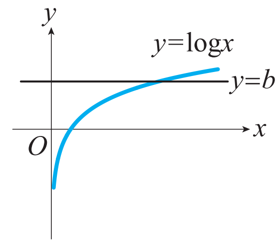
已知函數 $f(x)$ 的圖形與 $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$，求 $f(x)$。

解▶ 因為指數函數 $y=a^x$ 與對數函數 $y=\log_a x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$，

所以 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$。

主題三 對數方程式 （搭配課本 P.118～P.120）

1. 常用對數方程式 $\log x = b$ 的解即為常用對數函數 $y=\log x$ 與水平線 $y=b$ 圖形交點的 x 坐標。



2. 因為常用對數函數 $y=\log x$ 的圖形與任意水平線都恰有一個交點，所以
   (1) 若 $\log\alpha=\log\beta$，則 $\alpha=\beta$。
   說例 若 $\log x=\log 5$，則 $x=5$。
   (2) 若 $\alpha=\beta$，則 $\log\alpha=\log\beta$。
   說例 若 $2^x=5$，則 $\log 2^x=\log 5$，可得 $x\log 2=\log 5$，即 $x=\dfrac{\log 5}{\log 2}$。
3. 一般而言，對數方程式 $\log_a x=b$ 的解即為對數函數 $y=\log_a x$ 與水平線 $y=b$ 交點的 x 坐標。又因為對數函數 $y=\log_a x$ 的圖形與任意水平線都恰有一個交點，所以「若 $\log_a\alpha=\log_a\beta$，則 $\alpha=\beta$」。
   說例 若 $\log_2 x=\log_2 3$，則 $x=3$。

例題 8 【配合課本例 4】

解下列各方程式：
(1) $\log(x-3)+\log(x-2)=2-\log 5$。
(2) $\log(10^x+100)=\dfrac{x}{2}+1+\log 2$。

解▶ (1) 首先，因為真數必須為正，即 $x-3>0$ 且 $x-2>0$，所以 $x>3$。
其次，因為利用對數的性質，方程式可化為 $\log(x-3)(x-2)=\log\dfrac{100}{5}=\log 20$，
所以 $(x-3)(x-2)=20$，即 $x^2-5x-14=0$，因式分解得 $(x-7)(x+2)=0$，
解得 $x=7$ 或 -2。最後，綜合以上得 $x=7$。

(2) 首先，因為真數必須為正，即 $10^x+100>0$，所以 x 為任意實數。
其次，因為利用對數的性質，方程式可化為 $\log(10^x+100)=\log\left(10^{\frac{x}{2}}\times10\times2\right)$，
所以 $10^x+100=20\times10^{\frac{x}{2}}$。
令 $t=10^{\frac{x}{2}}$（$t>0$），將方程式改寫為 $t^2+100=20t$，即 $t^2-20t+100=0$，解得 $t=10$。
因此，$10^{\frac{x}{2}}=10$，解得 $x=2$。最後，綜合以上得 $x=2$。

演練 8

解下列各方程式：

(1) $\log x+\log 2=2$ 。

(2) $\log x+\log(x-1)=1+\log 2$ 。

解▶ (1) 首先，因為真數必須為正，所以 $x>0$ 。
其次，因為利用對數的性質，方程式可化為 $\log 2x=\log 100$ ，
所以 $2x=100$ ，解得 $x=50$ 。
最後，綜合以上得 $x=50$ 。

(2) 首先，因為真數必須為正，即 $x>0$ 且 $x-1>0$ ，所以 $x>1$ 。
其次，因為利用對數的性質，方程式可化為 $\log\left(x(x-1)\right)=\log 20$ ，
所以 $x(x-1)=20$ ，即 $x^2-x-20=0$ ，解得 $x=5$ 或 -4 。
最後，綜合以上得 $x=5$ 。

例題 9

【配合課本例 5】

解下列各方程式：

(1) $\log_4(x-2)+\log_4(x+1)=1$ 。

(2) $\log_3(3^x+243)=\dfrac{x}{2}+2+\log_3 4$ 。

解▶ (1) 首先，因為真數必須為正，即 $x-2>0$ 且 $x+1>0$ ，所以 $x>2$ 。
其次，因為利用對數的性質，方程式可化為 $\log_4\left((x-2)(x+1)\right)=\log_4 4$ ，
所以 $(x-2)(x+1)=4$ ，即 $x^2-x-6=0$ ，解得 $x=3$ 或 -2 。
最後，綜合以上得 $x=3$ 。

(2) 首先，因為真數必須為正，即 $3^x+243>0$ ，所以 x 為任意實數。
其次，因為利用對數的性質，方程式可化為 $\log_3(3^x+243)=\log_3\left(3^{\frac{x}{2}}\times 3^2\times 4\right)$ ，
所以 $3^x+243=36\times 3^{\frac{x}{2}}$ 。
令 $t=3^{\frac{x}{2}}$ （ $t>0$ ），將方程式改寫為 $t^2+243=36t$ ，即 $t^2-36t+243=0$ ，
解得 $t=9$ 或 27。
因此， $3^{\frac{x}{2}}=9$ 或 27，解得 $x=4$ 或 6。
最後，綜合以上得 $x=4$ 或 6。

演練 9

解下列各方程式：

(1) $\log_2(x+3)-\log_2(x-1)=1$ 。

(2) $\log_8(8^x+128)=\dfrac{x}{2}+1+\log_8 3$ 。

解▸ (1) 首先，因為真數必須為正，即 $x+3>0$ 且 $x-1>0$，所以 $x>1$。

其次，因為利用對數的性質，方程式可化為 $\log_2\dfrac{(x+3)}{(x-1)}=\log_2 2$，所以 $\dfrac{x+3}{x-1}=2$，解得 $x=5$。

最後，綜合以上得 $x=5$。

(2) 首先，因為真數必須為正，即 $8^x+128>0$，所以 x 為任意實數。

其次，因為利用對數的性質，方程式可化為 $\log_8(8^x+128)=\log_8\left(8^{\frac{x}{2}}\times 8\times 3\right)$，

所以 $8^x+128=24\times 8^{\frac{x}{2}}$。

令 $t=8^{\frac{x}{2}}$（$t>0$），將方程式改寫成 $t^2-24t+128=0$，

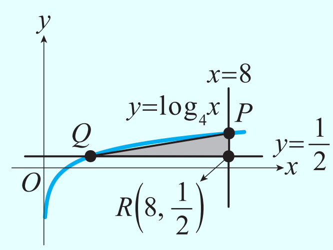
因式分解得 $(t-16)(t-8)=0$，解得 $t=16$ 或 8。

因此，$8^{\frac{x}{2}}=16$ 或 $8^{\frac{x}{2}}=8$，解得 $x=\dfrac{8}{3}$ 或 2。

最後，綜合以上得 $x=\dfrac{8}{3}$ 或 2。

例題 10 【常考題】

右圖為 $y=\log_4 x$ 的圖形。設 P、Q 分別為直線 $x=8$、$y=\dfrac{1}{2}$ 與 $y=\log_4 x$ 的交點，R 為點 $\left(8,\dfrac{1}{2}\right)$，求 $\triangle PQR$ 的面積。



解▸ 設 $P(8,b)$、$Q\left(a,\dfrac{1}{2}\right)$。

因為 P、Q 在 $y=\log_4 x$ 的圖形上，

所以 $b=\log_4 8=\dfrac{3}{2}$ 且 $\log_4 a=\dfrac{1}{2}=\log_4 2$，解得 $a=2$。

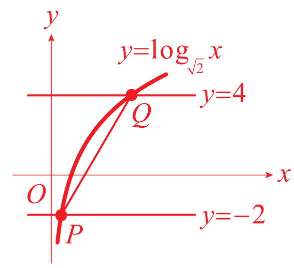
因此 $\overline{PR}=b-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}=1$、$\overline{QR}=8-a=8-2=6$。

故 $\triangle PQR$ 的面積為 $\dfrac{\overline{PR}\times\overline{QR}}{2}=\dfrac{1\times 6}{2}=3$。

演練 10

設 P 、 Q 分別為直線 $y=-2$ 、 $y=4$ 與 $y=\log_{\sqrt{2}}x$ 的交點，求直線 PQ 的斜率。

解▸ 設 $P(\alpha,-2)$ 、 $Q(\beta,4)$ ，如右圖所示。



因為 P、Q 在 $y=\log_{\sqrt{2}}x$ 的圖形上，

所以 $\log_{\sqrt{2}}\alpha=-2$ 且 $\log_{\sqrt{2}}\beta=4$ ，

解得 $\alpha=\left(\sqrt{2}\right)^{-2}=\dfrac{1}{2}$ 且 $\beta=\left(\sqrt{2}\right)^{4}=4$ 。

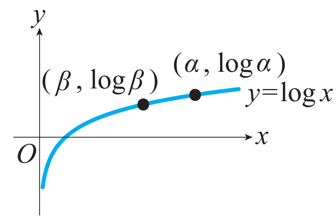
故直線 PQ 的斜率為 $\dfrac{4-(-2)}{\beta-\alpha}=\dfrac{6}{4-\frac{1}{2}}=\dfrac{12}{7}$ 。

7

主題四　對數不等式

（搭配課本 P.121～P.123）

觀察常用對數函數 $y=\log x$ 的圖形，因為它是嚴格遞增函數，圖形由左往右逐漸上升（即 x 愈大，y 愈大），所以有以下性質：



(1) 若 $\alpha>\beta$ ，則 $\log\alpha>\log\beta$ 。

說例 因為 $1>0.3$ ，所以 $\log 1>\log 0.3$ 。

(2) 以上(1)的性質，反之亦成立：若 $\log\alpha>\log\beta$ ，則 $\alpha>\beta$ 。

說例 若 $\log x>\log 5$ ，則 $x>5$ 。

例題 11 【概念題】

比較 $a=2\log 2$ 、 $b=\dfrac{1}{2}\log 9$ 、 $c=\log 2+\log 3$ 三數的大小關係。

解▸ 將以上三數都化成常用對數如下：

$a=2\log 2=\log 4$ ，

$b=\dfrac{1}{2}\log 9=\log 3$ ，

$c=\log 2+\log 3=\log 6$ 。

因為 $y=\log x$ 為嚴格遞增函數，所以 $c>a>b$ 。

演練 11

比較 $a=\log 2$ 、 $b=-\log\frac{1}{5}$ 、 $c=\log 2+\log 5$ 三數的大小關係。

解▸ 將以上三數都化成常用對數如下：

$a=\log 2$ ，

$b=-\log\frac{1}{5}=\log 5$ ，

$c=\log 2+\log 5=\log 10=1$ 。

因為 $y=\log x$ 為嚴格遞增函數，所以 $c>b>a$ 。

例題 12

【配合課本例 6】

比較 $a=\log_7 4$ 、 $b=\frac{1}{2}\log_2 9$ 、 $c=\log_4 7$ 三數的大小關係。

解▸ 將以上三數都化成常用對數如下：

$a=\log_7 4=\frac{\log 4}{\log 7}<\frac{\log 7}{\log 7}=1$ ，

$b=\frac{1}{2}\log_2 9=\frac{\log 9}{2\log 2}=\frac{\log 9}{\log 4}>\frac{\log 4}{\log 4}=1$ ，

$c=\log_4 7=\frac{\log 7}{\log 4}>\frac{\log 4}{\log 4}=1$ 。

因為 $\log 9>\log 7$ ，所以 $b>c>1>a$ 。

演練 12

比較 $a=\log_{\frac{1}{5}} 3$ 、 $b=\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}$ 、 $c=\log_{\frac{1}{3}} 5$ 三數的大小關係。

解▸ 將以上三數都化成常用對數如下：

$a=\log_{\frac{1}{5}} 3=\frac{\log 3}{\log 5^{-1}}=-\frac{\log 3}{\log 5}<0$ ，

$b=\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}=\frac{\log 3^{-1}}{\log 5^{-1}}=\frac{-\log 3}{-\log 5}=\frac{\log 3}{\log 5}>0$ ，

$c=\log_{\frac{1}{3}} 5=\frac{\log 5}{\log 3^{-1}}=-\frac{\log 5}{\log 3}<0$ 。

因為 $\log 5>\log 3$ ，所以 $b>0>a>c$ 。

例題 13

【配合課本例 7】

解下列各不等式：

(1) $\log(x+2)>-1$ 。　　(2) $1+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{4}}(4-x)$ 。

解▸ (1) 首先，因為真數必須為正，即 $x+2>0$，所以 $x>-2$ 。

其次，因為 $-1=\log 0.1$ ，所以不等式可化為 $\log(x+2)>\log 0.1$ ，

可推得 $x+2>0.1$ ，解得 $x>-1.9$ 。

最後，綜合以上可得 $x>-1.9$ 。

(2) 首先，因為真數必須為正，即 $x-1>0$ 且 $4-x>0$，所以 $1<x<4$ 。

其次，利用換底公式可得 $1+\dfrac{\log(x-1)}{\log\frac{1}{2}}>\dfrac{\log(4-x)}{\log\frac{1}{4}}$ ，

即 $1+\dfrac{\log(x-1)}{-\log 2}>\dfrac{\log(4-x)}{-2\log 2}$ ，

同乘 $-2\log 2$ 可得 $-2\log 2+2\log(x-1)<\log(4-x)$ 。

再利用對數的性質化簡得 $\log\left(2^{-2}\times(x-1)^2\right)<\log(4-x)$ ，

可推得 $\frac{1}{4}(x-1)^2<4-x$ ，即 $x^2+2x-15<0$ ，解得 $-5<x<3$ 。

最後，綜合以上可得 $1<x<3$ 。

演練 13

解下列各不等式：

(1) $\log(1-x)>\log(2x+1)$ 。　　(2) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)<\log_{\frac{1}{4}}(8-x)$ 。

解▸ (1) 首先，因為真數必須為正，即 $1-x>0$ 且 $2x+1>0$ ，所以 $-\frac{1}{2}<x<1$ 。

其次，因為常用對數函數為嚴格遞增函數，所以可推得 $1-x>2x+1$ ，

解得 $x<0$ 。

最後，綜合以上可得 $-\frac{1}{2}<x<0$ 。

(2) 首先，因為真數必須為正，即 $x-2>0$ 且 $8-x>0$ ，所以 $2<x<8$ 。

其次，利用換底公式可得 $\dfrac{\log(x-2)}{\log\frac{1}{2}}<\dfrac{\log(8-x)}{\log\frac{1}{4}}$ ，

即 $\dfrac{\log(x-2)}{-\log 2}<\dfrac{\log(8-x)}{-2\log 2}$ ，同乘 $-2\log 2$ 可得 $2\log(x-2)>\log(8-x)$ ，

再利用對數的性質化簡得 $\log(x-2)^2>\log(8-x)$ ，

可推得 $(x-2)^2>8-x$ ，即 $x^2-3x-4>0$ ，解得 $x>4$ 或 $x<-1$ 。

最後，綜合以上可得 $4<x<8$ 。

例題 14 【常考題】

解不等式 $\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) < 1$。

解▸ 首先，因為真數必須為正，即

① $x > 0$。

② $\log_{\frac{1}{2}} x = \dfrac{\log x}{\log \frac{1}{2}} = \dfrac{\log x}{-\log 2} > 0$，可得 $\log x < 0 = \log 1$，即 $x < 1$。所以 $0 < x < 1$。

其次，因為利用換底公式可得 $\dfrac{\log\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)}{\log 2} < 1$，即 $\log\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) < \log 2$，所以 $\log_{\frac{1}{2}} x < 2$。

再利用換底公式可得 $\dfrac{\log x}{\log \frac{1}{2}} = \dfrac{\log x}{-\log 2} < 2$，即 $\log x > -2\log 2 = \log 2^{-2} = \log \frac{1}{4}$，所以 $x > \frac{1}{4}$。

最後，綜合以上可得 $\frac{1}{4} < x < 1$。

演練 14

解不等式 $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right) > -1$。

解▸ 首先，因為真數必須為正，即

① $x > 0$。

② $\log_{\frac{1}{3}} x = \dfrac{\log x}{\log \frac{1}{3}} = \dfrac{\log x}{-\log 3} > 0$，可得 $\log x < 0 = \log 1$，即 $x < 1$。

所以 $0 < x < 1$。

其次，因為利用換底公式可得不等式 $\dfrac{\log\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)}{\log \frac{1}{2}} = \dfrac{\log\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)}{-\log 2} > -1$，

即 $\log\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right) < \log 2$，所以 $\log_{\frac{1}{3}} x < 2$。

再利用換底公式可得 $\dfrac{\log x}{\log \frac{1}{3}} = \dfrac{\log x}{-\log 3} < 2$，

即 $\log x > -2\log 3 = \log 3^{-2} = \log \frac{1}{9}$，所以 $x > \frac{1}{9}$。

最後，綜合以上可得 $\frac{1}{9} < x < 1$。

例題 15

【配合課本例 8】

已知某投資提供年利率為 20%的理財方案，每年計息一次，依複利計息，問：至少要多少年（取整數年數），本利和才會超過本金的 2 倍？
（$\log 2 \approx 0.3010$，$\log 3 \approx 0.4771$）

解▸ 設本金為 P 元，且至少要 n 年本利和才會超過本金的 2 倍。

依題意可得 $P(1+20\%)^n > 2P$，化簡得 $1.2^n > 2$，可推得 $\log 1.2^n > \log 2$，

利用對數的性質可得 $n\log 1.2 > \log 2$。

又因為 $\log 1.2 = \log\dfrac{12}{10} = \log\dfrac{2^2\times 3}{10} = 2\log 2 + \log 3 - 1 \approx 0.0791$，

代入上式可得 $0.0791n > 0.3010$，所以 $n > \dfrac{0.3010}{0.0791} \approx 3.8$。

故至少要 4 年。

演練 15

某公司為了響應節能減碳政策，決定每年依固定的比率 2%逐年減少二氧化碳排放量，問：至少要多少年（取整數年數），該公司的二氧化碳排放量才會低於目前排放量的 90%？
（$\log 2 \approx 0.3010$，$\log 3 \approx 0.4771$，$\log 7 \approx 0.8451$）

解▸ 設至少要 n 年，該公司的二氧化碳排放量才會低於目前的 90%。

依題意可得 $(1-2\%)^n < 90\%$，化簡得 $\left(\dfrac{98}{100}\right)^n < \dfrac{9}{10}$，

可推得 $\log\left(\dfrac{98}{100}\right)^n < \log\dfrac{9}{10}$，利用對數的性質可得 $n\log\dfrac{98}{100} < \log\dfrac{9}{10}$。

又因為 $\log\dfrac{98}{100} = \log\dfrac{2\times 7^2}{100} = \log 2 + 2\log 7 - 2 \approx -0.0088$，

且 $\log\dfrac{9}{10} = 2\log 3 - 1 \approx -0.0458$，

代入上式可得 $-0.0088n < -0.0458$，所以 $n > \dfrac{-0.0458}{-0.0088} \approx 5.2$，

故至少要 6 年。

重要精選考題

（主：代表本單元對應的主題）

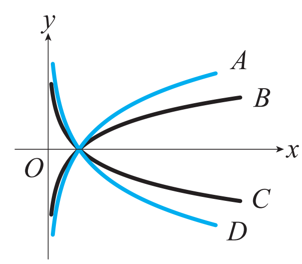
基礎題

1. 關於兩對數函數 $f(x)=\log x$ 、 $g(x)=-\log x$ ，選出正確的選項。
   (1) $f(x)$ 的圖形在 x 軸的上方
   (2) $f(x)$ 的圖形恆通過點 $(1,0)$
   (3) $g(x)$ 的圖形恆通過點 $(0,-1)$
   (4)因為 $\sqrt{3}>\sqrt{2}$ ，所以 $f(\sqrt{3})>f(\sqrt{2})$
   (5) $f(x)$ 的圖形與 $g(x)$ 的圖形對稱於 y 軸。

主一

解▸ (2)(4)

2. 右圖為 $y=2\log x$ 、 $y=\log x$ 、 $y=-\log x$ 與 $y=-2\log x$ 的圖形，選出 $y=\log x$ 的圖形。
   (1)A (2)B (3)C (4)D。



主一

解▸ (2)

3. 已知 (a,b) 是對數函數 $y=\log x$ 圖形上一點，問：下列哪些選項中的點也會在 $y=\log x$ 的圖形上？
   (1) $(1,0)$ (2) $(10a,b+1)$ (3) $\left(\frac{1}{a},1-b\right)$ (4) $(a^2,2b)$。

主一

解▸ (1)(2)(4)

4. 解方程式 $\log\left(x+\sqrt{6}\right)+\log\left(x-\sqrt{6}\right)=1$。 主三

解▸ $x=4$

5. 解下列各方程式：

(1) $\log_5 x+\log_5\left(x-4\right)=1$。

(2) $1+\log_4\left(x-1\right)=\log_2\left(x-9\right)$。 主三

解▸ (1) $x=5$　(2) $x=17$

6. 解不等式 $\log\left(x+2\right)>\log\left(3x-3\right)$。 主四

解▸ $1<x<\frac{5}{2}$

7. 解下列各不等式：

(1) $\log_2 x+\log_2 x^2<3$。

(2) $\log_2 x+\log_4 x<3$。 主四

解▸ (1) $0<x<2$　(2) $0<x<4$

8. 已知 $\log 2\approx 0.3010$，求滿足 $100^n>2^{100}$ 的最小正整數 n。 主四

解▸ 16

9. 滿足不等式 $\frac{1}{101}\le\left(\sqrt{10}\right)^x\le 2001$ 的整數 x 共有多少個？（ $\log 2\approx 0.3010$ ）

(1)9 個　(2)10 個　(3)11 個　(4)12 個　(5)13 個。 主四

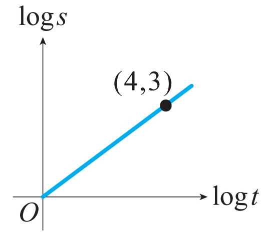
解▸ (3)

進階題

1. 解方程式 $5\log_x 10-\log x+4=0$。

解▸ $x=100000$ 或 $\frac{1}{10}$

2. 某科學家在研究兩個變數 s 與 t 的關係時發現：若將 $\log t$ 當作 x 坐標，$\log s$ 當作 y 坐標，可得函數圖形如右圖中的直線。求
(1)該直線的方程式。
(2)兩變數 s 與 t 的關係式。



解▸ (1) $y=\frac{3}{4}x$ (2) $s^4=t^3$

3. 請問指數方程式 $2^{10^x}=10^6$ 的解 x 最接近下列哪一個選項？
（$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 7\approx 0.8451$）
(1)1.1 (2)1.2 (3)1.3 (4)1.4。

解▸ (3)

4. $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>\log_{\frac{1}{9}}(x+5)$。

解▸ $1<x<4$

5. 在養分充足的情況下，細菌的數量會以指數函數的方式成長。假設細菌 A 的數量每兩個小時可以成長為兩倍，細菌 B 的數量每三個小時可以成長為三倍。若養分充足且一開始兩種細菌的數量相等，則大約幾小時後細菌 B 的數量除以細菌 A 的數量最接近 10？
（$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$）
(1)24 小時 (2)48 小時 (3)69 小時 (4)96 小時 (5)117 小時。

解▸ (5)

歷屆大考觀摩

1. 一份試卷共有 10 題單選題，每題有 5 個選項，其中只有一個選項是正確答案。假設小明以隨機猜答的方式回答此試卷，且各題猜答方式互不影響。試估計小明全部答對的機率最接近下列哪一選項？（ $\log 5 \approx 0.6990$ ）
(1) 10^{-5}　(2) 10^{-6}　(3) 10^{-7}　(4) 10^{-8}　(5) 10^{-9} 。　【107 學測】【答對率 58%】
解▸ (3)

2. 設正實數 b 滿足 $(\log 100)(\log b)+\log 100+\log b=7$ 。試選出正確的選項。
(1) $1 \le b \le \sqrt{10}$　(2) $\sqrt{10} \le b \le 10$　(3) $10 \le b \le 10\sqrt{10}$
(4) $10\sqrt{10} \le b \le 100$　(5) $100 \le b \le 100\sqrt{10}$ 。　【108 學測】【答對率 54%】
解▸ (4)

3. 試問有多少個整數 x 滿足 $10^9 < 2^x < 9^{10}$ ？（ $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ）
(1)1 個　(2)2 個　(3)3 個　(4)4 個　(5)0 個。　【107 學測】【答對率 58%】
解▸ (2)

4. 設 $a>1>b>0$ ，關於下列不等式，選出正確的選項。
(1) $(-a)^7>(-a)^9$　(2) $b^{-9}>b^{-7}$　(3) $\log\frac{1}{a}>\log\frac{1}{b}$　(4) $\log_a 1>\log_b 1$ 。　【102 學測（修）】
解▸ (1)(2)

5. 在坐標平面上， $A(a,r)$ 、 $B(b,s)$ 為函數圖形 $y=\log_2 x$ 上之兩點，其中 $a<b$ 。已知 A 、B 連線的斜率等於 2，且線段 AB 的長度為 $\sqrt{5}$ ，則 $(a,b)=$ ______ 。（化成最簡分數）
【108 指甲】【答對率 51%】
解▸ $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$