6 對數與對數律

主題一 對數的意義

（搭配課本 P.92～P.95）

$\log_a b$ ← 真數（b）
← 底數（a）

1. 對數的定義：當 $a>0$ ，$a\neq 1$ 且 $b>0$ 時，方程式 $a^x=b$ 有唯一實數解 $x=\log_a b$ 。稱 $\log_a b$ 為「以 a 為底數時 b 的對數」，其中 a 稱為**底數**，b 稱為**真數**。

   說例

   (1) 由 $2^3=8$ 可得 $\log_2 8=3$ 。

   (2) 當 $2^x=5$ 時，可將 x 表示成 $\log_2 5$ ，即 $x=\log_2 5$ 。

2. 特別注意：

   (1) 當 $a>0$ ，$a\neq 1$ ，且 $b>0$ 時，$\log_a b$ 才有意義。

   說例 $\log_1 3$ 、$\log_{(-2)} 5$ 、$\log_3(-5)$ 皆沒有意義。

   (2) 以 10 為底的對數 $\log_{10} b$ 常用 $\log b$ 表示，又稱為常用對數。

   說例 $\log_{10} 2=\log 2$ 。

3. 若 $a>0$ ，$a\neq 1$ ，則根據定義可得：$\log_a a=1$ 、$\log_a 1=0$ 。

   說例 $\log_2 2=1$ 、$\log_3 1=0$ 。

4. (1) 因為 $\log_a b$ 是方程式 $a^x=b$ 的解，所以 $a^{\log_a b}=b$ 。

   (2) 因為 $\log b$ 是方程式 $10^x=b$ 的解，所以 $10^{\log b}=b$ 。

   說例 $3^{\log_3 5}=5$ 、$10^{\log 7}=7$ 。

5. 任何指數函數皆可改成以 10 為底的指數函數。

   說例 $2^x=\left(10^{\log 2}\right)^x=10^{(\log 2)x}$ 。

例題 1

【概念題】

以對數表示下列各式中 x 的值：

(1) $2^x=3$。　(2) $10^x=2$。　(3) $0.3^x=5$。

解▶ 因為方程式 $a^x=b$ 的解為 $x=\log_a b$，所以

(1) $x=\log_2 3$。

(2) $x=\log_{10} 2=\log 2$。

(3) $x=\log_{0.3} 5$。

演練 1

以對數表示下列各式中 x 的值：

(1) $3^x=5$。　(2) $10^x=\frac{1}{2}$。　(3) $2^x=\sqrt{7}$。

解▶ 因為方程式 $a^x=b$ 的解為 $x=\log_a b$，所以

(1) $x=\log_3 5$。

(2) $x=\log_{10}\frac{1}{2}=\log\frac{1}{2}$。

(3) $x=\log_2\sqrt{7}$。

例題 2

【配合課本例 1】

求下列各對數的值：

(1) $\log_2 32$。　(2) $\log_2\frac{1}{16}$。　(3) $\log_{99} 1$。　(4) $\log_3\frac{1}{3\sqrt{3}}$。

解▶ (1) 因為 $32=2^5$，所以 $\log_2 32=5$。

(2) 因為 $\frac{1}{16}=2^{-4}$，所以 $\log_2\frac{1}{16}=-4$。

(3) 因為 $1=99^0$，所以 $\log_{99} 1=0$。

(4) 因為 $\frac{1}{3\sqrt{3}}=\left(3\sqrt{3}\right)^{-1}=\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{-1}=3^{-\frac{3}{2}}$，所以 $\log_3\frac{1}{3\sqrt{3}}=-\frac{3}{2}$。

演練 2

求下列各對數的值：

(1) $\log_{\sqrt{3}} 1$。 (2) $\log_{81} 27$。 (3) $\log_{\sqrt{7}} 49$。 (4) $\log_{\frac{1}{2}} 8$。

解▸ (1) 因為 $1=\left(\sqrt{3}\right)^0$，所以 $\log_{\sqrt{3}} 1=0$。

(2) 因為 $27=3^3=\left(3^4\right)^{\frac{3}{4}}=81^{\frac{3}{4}}$，所以 $\log_{81} 27=\frac{3}{4}$。

(3) 因為 $49=\left(\sqrt{7}\right)^4$，所以 $\log_{\sqrt{7}} 49=4$。

(4) 因為 $8=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$，所以 $\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$。

例題 3 【配合課本例 2】

設 $x=\log_3 2$，求 3^x+9^{-x} 的值。

解▸ 因為 $3^x=3^{\log_3 2}=2$，$9^{-x}=\frac{1}{9^x}=\frac{1}{\left(3^x\right)^2}=\frac{1}{4}$，所以 $3^x+9^{-x}=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$。

演練 3

設 $x=\log_2 7$，求 4^x+2^{-x} 的值。

解▸ 因為 $2^x=2^{\log_2 7}=7$，$4^x=\left(2^x\right)^2=7^2=49$，$2^{-x}=\frac{1}{2^x}=\frac{1}{7}$，

所以 $4^x+2^{-x}=49+\frac{1}{7}=\frac{344}{7}$。

例題 4 【常考題】

設 $\log\left(-3x^2+11x-6\right)$ 有意義，求 x 的範圍。

解▸ 根據對數的定義，真數 $-3x^2+11x-6>0$，即 $3x^2-11x+6<0$，

因式分解得 $(3x-2)(x-3)<0$，

解得 $\frac{2}{3}<x<3$。

演練 4

設 $\log_2(x^2+2x)$ 有意義，求 x 的範圍。

解▸ 根據對數的定義，真數 $x^2+2x>0$，即 $x(x+2)>0$，

解得 $x>0$ 或 $x<-2$。

主題二　對數律

（搭配課本 P.95～P.98）

1. 常用對數的對數律：若 r、s 皆為正數，則

(1) $\log rs=\log r+\log s$。

(2) $\log\dfrac{r}{s}=\log r-\log s$。

(3) $\log r^t=t\log r$（t是實數）。

說例

(1) $\log 2+\log 5=\log(2\times 5)=\log 10=1$。

(2) $\log 20-\log 2=\log\dfrac{20}{2}=\log 10=1$。

(3) $\log 1000=\log 10^3=3\log 10=3$。

◎2. 對數律：若 $a>0$，$a\neq 1$，且 r、s 皆為正數，則

(1) $\log_a rs=\log_a r+\log_a s$。

(2) $\log_a\dfrac{r}{s}=\log_a r-\log_a s$。

(3) $\log_a r^t=t\log_a r$（t是實數）。

說例

(1) $\log_6 2+\log_6 3=\log_6(2\times 3)=\log_6 6=1$。

(2) $\log_2 12-\log_2 3=\log_2\dfrac{12}{3}=\log_2 4=2$。

(3) $\log_2 2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}\log_2 2=\dfrac{3}{2}$。

註：符號◎表示：非課綱的內容，教師可視情況延伸補充。

例題 5

【配合課本例 3】

求下列各式的值：

(1) $\log 2-\log 3+\log 15$ 。　　◎(2) $\log_6 3+\log_6 8-\log_6 \frac{2}{3}$ 。

解▸ (1)原式 $=\log\left(\frac{2\times 15}{3}\right)=\log 10=1$ 。

(2)原式 $=\log_6\left(3\times 8\div\frac{2}{3}\right)=\log_6\left(24\times\frac{3}{2}\right)=\log_6 36=\log_6 6^2=2$ 。

演練 5

求下列各式的值：

(1) $\log 50+\log\frac{3}{7}-\log\frac{3}{14}$ 。　　◎(2) $\log_5 250+\log_5 10-\log_5 4$ 。

解▸ (1) 原式 $=\log\left(50\times\frac{3}{7}\div\frac{3}{14}\right)=\log\left(50\times\frac{3}{7}\times\frac{14}{3}\right)=\log 100=\log 10^2=2$ 。

(2) 原式 $=\log_5\left(\frac{250\times 10}{4}\right)=\log_5 625=\log_5 5^4=4$ 。

例題 6

【常考題】

求下列各式的值：

(1) $3\log 2+2\log 5-\log 2$ 。　　◎(2) $\log_{18} 2+2\log_{18} 3$ 。

解▸ (1) 原式 $=\log 2^3+\log 5^2-\log 2=\log\left(8\times 25\times\frac{1}{2}\right)=\log 100=2$ 。

(2) 原式 $=\log_{18} 2+\log_{18} 3^2=\log_{18} 18=1$ 。

演練 6

求下列各式的值：

(1) $3\log\sqrt[3]{4}+\log 25$ 。　　◎(2) $2\log_2 6+\log_2\frac{1}{9}$ 。

解▸ (1) 原式 $=\log(4\times 25)=\log 100=2$ 。

(2) 原式 $=\log_2 6^2+\log_2\frac{1}{9}=\log_2\left(36\times\frac{1}{9}\right)=\log_2 4=\log_2 2^2=2$ 。

6

例題 7

【配合課本例 4】

求下列各式的值：

(1) $4\log 5+2\log 8-2\log 2$ 。

◎(2) $\log_3 15+\frac{1}{2}\log_3 30-\log_3 5\sqrt{5}-\frac{1}{2}\log_3 2$ 。

解▸ (1) 原式 $=\log 5^4+\log 8^2-\log 2^2=\log\left(5^4\times 2^6\times\frac{1}{2^2}\right)=\log 10^4=4$ 。

(2) 原式 $=\log_3 15+\log_3\sqrt{30}-\log_3 5\sqrt{5}-\log_3\sqrt{2}$

$=\log_3\frac{15\times\sqrt{30}}{5\sqrt{5}\times\sqrt{2}}$

$=\log_3 3\sqrt{3}=\frac{3}{2}$ 。

演練 7

求下列各式的值：

(1) $\log\frac{11}{36}+2\log 3-\log\frac{11}{25}+4\log 2$ 。

◎(2) $\log_3 54-2\log_3 2+\log_3 6$ 。

解▸ (1) 原式 $=\log\frac{11}{36}+\log 9-\log\frac{11}{25}+\log 16=\log\left(\frac{11}{36}\times 9\times\frac{25}{11}\times 16\right)=\log 100=2$ 。

(2) 原式 $=\log_3 54-\log_3 2^2+\log_3 6=\log_3\left(54\times\frac{1}{4}\times 6\right)=\log_3 81=4$ 。

主題三 換底公式 （搭配課本 P.98～P.102）

1. 換底公式：

若 a、b 均為正數，且 $a\neq 1$，則任意底數的對數皆可換成常用對數：$\log_a b=\dfrac{\log b}{\log a}$。

2. 換底公式延伸公式：（$b\neq 1$）

因為 $\log_a b=\dfrac{\log b}{\log a}$，且 $\log_b a=\dfrac{\log a}{\log b}$，所以 $\log_a b$ 與 $\log_b a$ 互為倒數，即 $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$。

說例 因為 $\log_2 3=\dfrac{\log 3}{\log 2}$，$\log_3 2=\dfrac{\log 2}{\log 3}$，所以 $\log_2 3=\dfrac{1}{\log_3 2}$。

◎3. 任意底數的換底公式：若 a、b、c 均為正數，且 $a\neq 1$、$c\neq 1$，則 $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$。

◎4. 補充公式：$\log_{a^s} r^t=\dfrac{\log r^t}{\log a^s}=\dfrac{t\log r}{s\log a}=\dfrac{t}{s}\log_a r$。

說例 $\log_{3^2} 3^5=\dfrac{5}{2}\log_3 3=\dfrac{5}{2}$。

註：符號◎表示：非課綱的內容，教師可視情況延伸補充。

例題 8 【配合課本例 5】

求下列各式的值：

(1) $\log_{27} 9$。 (2) $\log_{\sqrt{2}} 3\times\log_3 4$。

解▸ (1) 原式 $=\dfrac{\log 9}{\log 27}=\dfrac{\log 3^2}{\log 3^3}=\dfrac{2\log 3}{3\log 3}=\dfrac{2}{3}$。

(2) 原式 $=\dfrac{\log 3}{\log\sqrt{2}}\times\dfrac{\log 4}{\log 3}=\dfrac{\log 4}{\log\sqrt{2}}=\dfrac{\log 2^2}{\log 2^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{2\log 2}{\frac{1}{2}\log 2}=4$。

演練 8

求下列各式的值：

(1) $\log_{\frac{1}{4}} 8$。 (2) $\log_2 3\times\log_3 4\times\log_4 7\times\log_7 8$。

解▸ (1) 原式 $=\dfrac{\log 8}{\log\frac{1}{4}}=\dfrac{\log 2^3}{\log 2^{-2}}=\dfrac{3\log 2}{(-2)\log 2}=-\dfrac{3}{2}$。

(2) 原式 $=\dfrac{\log 3}{\log 2}\times\dfrac{\log 4}{\log 3}\times\dfrac{\log 7}{\log 4}\times\dfrac{\log 8}{\log 7}=\dfrac{\log 8}{\log 2}=\dfrac{\log 2^3}{\log 2}=\dfrac{3\log 2}{\log 2}=3$。

例題 9

【配合課本例 6】

求下列各式的值：

(1) $\dfrac{2}{\log_2 60}+\dfrac{1}{\log_3 60}+\dfrac{1}{\log_5 60}$。　　(2) $\left(\log_2\sqrt{7}\right)\times\left(\log_7 2+\log_{49}\dfrac{1}{8}\right)$。

解▶ (1) 原式 $=\dfrac{2\log 2}{\log 60}+\dfrac{\log 3}{\log 60}+\dfrac{\log 5}{\log 60}=\dfrac{\log\left(2^2\times 3\times 5\right)}{\log 60}=1$。

(2) 原式 $=\dfrac{\log\sqrt{7}}{\log 2}\times\left(\dfrac{\log 2}{\log 7}+\dfrac{\log 8^{-1}}{\log 49}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\log 7}{\log 2}\times\left(\dfrac{\log 2}{\log 7}+\dfrac{(-3)\times\log 2}{2\times\log 7}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\log 7}{\log 2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{\log 2}{\log 7}=-\dfrac{1}{4}$。

演練 9

求下列各式的值：

(1) $\dfrac{1}{\log_3 6}+\dfrac{1}{\log_{12} 6}$。　　(2) $2\log_2 3\times\left(\log_3 2+\log_9\dfrac{1}{8}\right)$。

解▶ (1) 原式 $=\dfrac{\log 3}{\log 6}+\dfrac{\log 12}{\log 6}=\dfrac{\log 36}{\log 6}=\dfrac{2\log 6}{\log 6}=2$。

(2) 原式 $=2\times\dfrac{\log 3}{\log 2}\times\left(\dfrac{\log 2}{\log 3}+\dfrac{\log 8^{-1}}{\log 9}\right)$

$=2\times\dfrac{\log 3}{\log 2}\times\left(\dfrac{\log 2}{\log 3}+\dfrac{(-3)\times\log 2}{2\log 3}\right)$

$=2\times\dfrac{\log 3}{\log 2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{\log 2}{\log 3}=-1$。

例題 10 【常考題】

設 $a=\log 3$、$b=\log 5$。將下列各式用 a、b 表示：

(1) $\log_3 5$。 (2) $\log_5 15$。 (3) $\log_2 25$。

解▸ (1) $\log_3 5=\dfrac{\log 5}{\log 3}=\dfrac{b}{a}$。

(2) $\log_5 15=\dfrac{\log 15}{\log 5}=\dfrac{\log 3+\log 5}{\log 5}=\dfrac{a+b}{b}$。

(3) $\log_2 25=\dfrac{\log 25}{\log 2}=\dfrac{\log 5^2}{\log\left(\dfrac{10}{5}\right)}=\dfrac{2\log 5}{\log 10-\log 5}=\dfrac{2b}{1-b}$。

演練 10

設 $a=\log 2$、$b=\log 3$。將下列各式用 a、b 表示：

(1)$\log 4$。 (2)$\log 5$。 (3)$\log 6$。

解▸ (1) $\log 4=\log 2^2=2\log 2=2a$。

(2) $\log 5=\log\dfrac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-a$。

(3) $\log 6=\log(2\times 3)=\log 2+\log 3=a+b$。

例題 11 【配合課本例 7】

已知 $\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，解方程式 $3^x=5$。（四捨五入到小數點以下第 1 位）

解▸ 根據對數的定義，方程式 $3^x=5$ 的解為

$$x=\log_3 5=\frac{\log 5}{\log 3}=\frac{\log\frac{10}{2}}{\log 3}=\frac{\log 10-\log 2}{\log 3}\approx\frac{1-0.3010}{0.4771}\approx 1.5$$ 。

演練 11

已知 $\log 2 \approx 0.3010$，$\log 3 \approx 0.4771$，解方程式 $2^x = 3$。（四捨五入到小數點以下第 1 位）

解▸ 根據對數的定義，方程式 $2^x = 3$ 的解為 $x = \log_2 3 = \dfrac{\log 3}{\log 2} \approx \dfrac{0.4771}{0.3010} \approx 1.6$。

例題 12

【配合課本例 8】

芮氏地震規模 M 與地震所釋放的能量 E 之間的關係為 $\log E = 4.8 + 1.5M$。已知史上紀錄到規模最大的地震為 1960 年智利大地震，其芮氏地震規模為 9.5；而史上紀錄到臺灣規模最大的地震分別在 1910 與 1920 年各有一次，其芮氏地震規模為 8.3，問智利大地震所釋放的能量是臺灣大地震的幾倍？（$10^{0.8} \approx 6.3$）

解▸ 設智利大地震與臺灣大地震所釋放的能量分別為 E_1 和 E_2。

由題意可得，

$\log E_1 = 4.8 + 1.5 \times 9.5 \cdots\cdots①$，

$\log E_2 = 4.8 + 1.5 \times 8.3 \cdots\cdots②$，

將 ①−②，得 $\log E_1 - \log E_2 = \log\left(\dfrac{E_1}{E_2}\right) = 1.5 \times 1.2 = 1.8$，

整理得 $\dfrac{E_1}{E_2} = 10^{1.8} \approx 10 \times 6.3 = 63$。

故智利大地震所釋放的能量是臺灣大地震的 63 倍。

演練 12

承例題，史上紀錄到最早的大地震為 115 年的羅馬帝國的大地震，其芮氏地震規模為 7.5，求智利大地震所釋放的能量是羅馬帝國大地震的幾倍？

解▸ 設智利大地震與羅馬帝國大地震所釋放的能量分別為 E_1 和 E_2。

由題意可得，

$\log E_1 = 4.8 + 1.5 \times 9.5 \cdots\cdots①$，

$\log E_2 = 4.8 + 1.5 \times 7.5 \cdots\cdots②$，

將 ①−②，得 $\log E_1 - \log E_2 = \log\left(\dfrac{E_1}{E_2}\right) = 1.5 \times 2 = 3$，

整理得 $\dfrac{E_1}{E_2} = 10^3 = 1000$。

故智利大地震所釋放的能量是羅馬帝國大地震的 1000 倍。

主題四 常用對數與科學記號（搭配課本 P.103～P.105）

1. 正數 a 可表為科學記號，即 $a=b\times10^n$（其中 n 是整數，$1\le b<10$）。
2. 設正數 $a=b\times10^n$（其中 n 是整數，$1\le b<10$）。
   (1) 若 $a\ge1$，則整數部分有 $n+1$ 位。
   (2) 若 $0<a<1$，則 a 從小數點後第 $-n$ 位開始出現不為 0 的數字。
   說例
   (1) 5.12×10^5 是 6 位數，最高位數為 5。
   (2) $0.00543=5.43\times10^{-3}$ 從小數點後第 3 位開始出現不為 0 的數字，此數字為 5。
3. 利用 $a=10^{\log a}$ 可將任意正數表為科學記號：
   說例
   (1) 因為 $3^{100}=\left(10^{\log3}\right)^{100}=10^{100\log3}\approx10^{47.71}=10^{0.71}\times10^{47}\approx5.13\times10^{47}$，
   所以 3^{100} 為 48 位數，最高位數字為 5。
   (2) 因為 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{50}=2^{-50}=\left(10^{\log2}\right)^{-50}=10^{-50\log2}\approx10^{-15.05}=10^{0.95}\times10^{-16}\approx8.91\times10^{-16}$，
   所以 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{50}$ 從小數點後第 16 位開始出現不為 0 的數字，此不為 0 的數字為 8。

例題 13 【配合課本例 9】

已知 $\log2\approx0.3010$，$\log9\approx0.9542$，問：5^{30} 是幾位數？最高位數字為何？

解 將 5^{30} 化成 10 的冪次，可得

$$5^{30}=\left(\frac{10}{2}\right)^{30}=\left(\frac{10}{10^{\log2}}\right)^{30}=10^{30(1-\log2)}\approx10^{30\times0.6990}=10^{20.97}=10^{0.97}\times10^{20}$$。

因為 $10^{0.9542}\approx10^{\log9}=9$，$10^1=10$，可得 $9<10^{0.97}<10$，
所以 $5^{30}=9.\cdots\times10^{20}$。
故 5^{30} 為 21 位數，最高位數字為 9。

演練 13

已知 $\log 2 \approx 0.3010$，$\log 3 \approx 0.4771$，問：$2^{30} \times 3^{40}$ 是幾位數？最高位數字為何？

解▶ 將 $2^{30} \times 3^{40}$ 化成 10 的冪次，可得

$$2^{30} \times 3^{40} = \left(10^{\log 2}\right)^{30} \times \left(10^{\log 3}\right)^{40} = 10^{30\log 2 + 40\log 3} \approx 10^{9.03+19.084} = 10^{28.114} = 10^{0.114} \times 10^{28} \text{。}$$

因為 $10^0 = 1$，$10^{0.3010} \approx 10^{\log 2} = 2$，可得 $1 < 10^{0.114} < 2$，

所以 $2^{30} \times 3^{40} = 1.\cdots \times 10^{28}$。

故 $2^{30} \times 3^{40}$ 為 29 位數，最高位數字為 1。

例題 14

【配合課本例 9】

已知 $\log 2 \approx 0.3010$，$\log 3 \approx 0.4771$，問：將 0.6^{30} 表示成小數時，從小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？此不為 0 的數字為何？

解▶ 將 0.6^{30} 化成 10 的冪次，可得

$$0.6^{30} = \left(\frac{2 \times 3}{10}\right)^{30} = \left(\frac{10^{\log 2} \times 10^{\log 3}}{10}\right)^{30} = 10^{30(\log 2 + \log 3 - 1)} \approx 10^{-6.657} = 10^{0.343} \times 10^{-7} \text{。}$$

因為 $10^{0.3010} \approx 10^{\log 2} = 2$，$10^{0.4771} \approx 10^{\log 3} = 3$，可得 $2 < 10^{0.343} < 3$，

所以 $0.6^{30} = 2.\cdots \times 10^{-7}$。

故 0.6^{30} 從小數點後第 7 位開始出現不為 0 的數字，此不為 0 的數字為 2。

演練 14

已知 $\log 2 \approx 0.3010$，$\log 3 \approx 0.4771$，$\log 7 \approx 0.8451$，問：將 $\left(\frac{6}{7}\right)^{40}$ 表示成小數時，從小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？此不為 0 的數字為何？

解▶ 將 $\left(\frac{6}{7}\right)^{40}$ 化成 10 的冪次，可得

$$\left(\frac{6}{7}\right)^{40} = \left(\frac{2 \times 3}{7}\right)^{40} = \left(\frac{10^{\log 2} \times 10^{\log 3}}{10^{\log 7}}\right)^{40} = 10^{40(\log 2 + \log 3 - \log 7)} \approx 10^{-2.68} = 10^{0.32} \times 10^{-3} \text{。}$$

因為 $10^{0.3010} \approx 10^{\log 2} = 2$，$10^{0.4771} \approx 10^{\log 3} = 3$，可得 $2 < 10^{0.32} < 3$，

所以 $\left(\frac{6}{7}\right)^{40} = 2.\cdots \times 10^{-3}$。

故 $\left(\frac{6}{7}\right)^{40}$ 從小數點後第 3 位開始出現不為 0 的數字，此不為 0 的數字為 2。

重要精選考題

（主：代表本單元對應的主題）

基礎題

1. 求下列各式的值：
(1) $\log_5 \sqrt[4]{5}$。 (2)$\log 1000$。 (3)$\log 0.0001$。 (4) $\log_{\frac{1}{3}} 27$。 主一

解▶ (1) $\frac{1}{4}$ (2) 3 (3) -4 (4) -3

2. 求下列各式的值：
(1) $5^{3\log_5 2}$。 (2) $4^{\log_2 5}$。 主一

解▶ (1)8 (2)25

3. 設 $x=\log 5$，求 $100^x+0.1^x$ 的值。 主一

解▶ $\frac{126}{5}$

4. 下列哪些選項沒有意義？
(1) $\log_1 2$ (2) $\log_{\sqrt{2}} 1$ (3) $\log_2\left(1-\sqrt{3}\right)$ (4) $\log_{(-5)} 3$ (5) $\log_{\sqrt{2}-1} \sqrt{3}$。 主一

解▶ (1)(3)(4)

5. 設 $\log_{(x-1)}(5-2x)$ 有意義，求 x 的範圍。 主一

解▶ $1<x<\frac{5}{2}$，但 $x\neq 2$

6. 求下列各式的值：
(1) $\log 8+\log 25-\log 2$。 (2) $\log_6 12+\log_6 75-2\log_6 5$。 主二

解▶ (1)2 (2)2

7. 求下列各式的值：

(1) $\log\frac{11}{36}+2\log3-\log\frac{11}{25}+4\log2$ 。

(2) $\log_6 2^{10}+5\log_{\sqrt{6}}3$ 。

主二、三

解▸ (1)2　(2)10

6

8. 求下列各式的值：

(1) $\log_2\left(\log_2\left(\log_3 81\right)\right)$ 。　(2) $\log_2\pi+\log_{\frac{1}{2}}\pi$ 。

主三

解▸ (1)1　(2)0

9. 求下列各式的值：

(1) $\frac{\log_4 9}{\log_2 81}$ 。

(2) $\log_3 4\times\log_4 5\times\log_5 9$ 。

(3) $\left(\log_2 5+\log_8\sqrt{125}\right)\left(\log_{25}4+\log_5\frac{1}{8}\right)$ 。

主三

解▸ (1) $\frac{1}{4}$　(2)2　(3) -3

10. 設 $a=\log2$ 、 $b=\log3$ 。將下列各式用 a 、 b 表示：

(1)log8 。　(2)log9 。　(3) log12 。　(4) $\log_{0.1}\frac{1}{15}$ 。

主三

解▸ (1) $3a$　(2) $2b$
(3) $2a+b$　(4) $b+1-a$

11. 已知 $\log2\approx0.3010$ ， $\log3\approx0.4771$ ， $\log7\approx0.8451$ 。問：

(1) 12^{40} 是幾位數？

(2)將 0.98^{1000} 表示成小數時，從小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？

主四

解▸ (1)44 位數　(2)第 9 位

進階題

1. 已知 $f(x)=\log_{\sqrt{3}}x$，且 $f(a)+f(b)=4$，求 ab 的值。

解▸ 9

2. 設 a、b 為正實數，已知 $\log_7 a=11$、$\log_7 b=13$，問：$\log_7(a+b)$ 之值最接近下列哪個選項？
(1)12 (2)13 (3)14 (4)23 (5)24。 【學測】

解▸ (2)

3. 克卜勒研究行星繞恆星運轉的數據時發現：某一個行星繞恆星運動的週期為 T，運行軌跡的半徑為 R，且滿足 $R=8T^{\frac{2}{3}}$。設 $x=\log_2 R$、$y=\log_2 T$。求兩變數 x 與 y 的關係式。

解▸ $3x-2y=9$（或 $y=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$）

4. 聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特（W/m^2）來衡量，一般人能感覺出聲音的最小強度為 $I_0=10^{-12}$（W/m^2）；當測得的聲音強度為 I（W/m^2）時，所產生的噪音分貝數 d 為 $d(I)=10\times\log\frac{I}{I_0}$。
(1)已知一隻蚊子振動翅膀測得的聲音強度為 10^{-12}（W/m^2），求其產生的噪音分貝數。
(2)已知汽車製造廠測試發現，某新車以每小時 60 公里速度行駛時，測得的聲音強度為 10^{-4}（W/m^2），試問此聲音強度產生的噪音為多少分貝？ 【指乙（修）】

解▸ (1)0 分貝 (2)80 分貝

5. 設 $a=\log_2 3$、$b=\log_3 11$，將下列各式用 a、b 表示：
(1) $\log_3 2$。 (2) $\log_2 11$。 (3) $\log_{66} 99$。

解▸ (1) $\frac{1}{a}$ (2) ab (3) $\frac{2a+ab}{1+a+ab}$

6. 設 a、b、c 為正整數，已知 $a\log_{520}2+b\log_{520}5+c\log_{520}13=3$，求 $a+b+c$ 的值。

解▸ 15

歷屆大考觀摩

1. 若正實數 x 、 y 滿足 $\log x = 2.8$ 、 $\log y = 5.6$ ，則 $\log\left(x^2 + y\right)$ 最接近下列哪一個選項的值？（ $\log 2 \approx 0.3010$ ）

(1) 2.8 (2) 5.6 (3) 5.9 (4) 8.4 (5) 11.2 。 【101 學測】【答對率 51%】

解▸ (3)

2. 請問下列哪一個選項等於 $\log\left(2^{\left(3^5\right)}\right)$ ？

(1) $5\log\left(2^3\right)$ (2) $3 \times 5\log 2$ (3) $5\log 2 \times \log 3$ (4) $5\left(\log 2 + \log 3\right)$ (5) $3^5 \log 2$ 。

【103 學測】【答對率 82%】

解▸ (5)

3. 聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特（ $\mathrm{W/m^2}$ ）來衡量，一般人能感覺出聲音的最小強度為 $I_0 = 10^{-12}$ ($\mathrm{W/m^2}$)；當測得的聲音強度為 I ($\mathrm{W/m^2}$)時，所產生的噪音分貝數 d 為 $d(I) = 10\log\dfrac{I}{I_0}$ 。棒球比賽場中，若一支瓦斯汽笛獨鳴，測得的噪音為 70 分貝，則一百支瓦斯汽笛同時同地合鳴，被測得的噪音大約為多少分貝？ 【指乙（修）】

解▸ 90 分貝

4. 第 1 天獲得 1 元、第 2 天獲得 2 元、第 3 天獲得 4 元、第 4 天獲得 8 元，依此每天所獲得的錢為前一天的兩倍，如此進行到第 30 天，試問這 30 天所獲得的錢，總數最接近下列哪一個選項？（ $\log 2 \approx 0.3010$ ）

(1)10,000 元 (2)1,000,000 元 (3)100,000,000 元
(4)1,000,000,000 元 (5)1,000,000,000,000 元。 【104 學測】【答對率 68%】

解▸ (4)

6