1-2 自我評量

基礎題

1. 試選出正確的選項。

(A) $\log(8\times 9)=\log 8+\log 9$ (B) $\log\frac{2}{3}=\log 2\div\log 3$ (C) $\log 3^2=(\log 3)^2$ (D) $\log 16=4\log 2$

(E) $2^{\log_3 2}=3$

[解] (A) ○

(B) ×：$\log\frac{2}{3}=\log 2-\log 3\neq\log 2\div\log 3$

(C) ×：$\log 3^2=2(\log 3)\neq(\log 3)^2$

(D) ○

(E) ×：$3=2^{\log_2 3}\neq 2^{\log_3 2}$

故選(A)(D)

2. 下列哪些式子是正確的？

(A) $\log(-3)^2=2\log(-3)$ (B) $\log 2=1-\log 5$ (C) $\log_{(-3)}9=2$ (D) $\log(2+5)=\log 2\times\log 5$

(E) $\log\frac{7}{3}=\log 7-\log 3$

[解] $\log_a b$有意義$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0, a\neq 1\\ b>0\end{cases}$

(A)(C) ×

(B) ○：$\log 2=\log\frac{10}{5}=\log 10-\log 5=1-\log 5$

(D) ×：$\log(2+5)=\log 7\neq\log 2\times\log 5$

(E) ○

故選(B)(E)

3. 試求下列各式的值：

(1) $\log_5 1$。 (2) $\log_3 3\sqrt{27}$。 (3) $\log_4 128$。 (4) $5^{\log_5 6}$。 (5) $7^{\frac{\log 9}{\log 7}}$。

[解] (1) $\log_5 1=0$

(2) 設$\log_3 3\sqrt{27}=x$，則$3^x=3\sqrt{27}=3^{1+\frac{3}{2}}=3^{\frac{5}{2}}$，$\therefore$所求$=\frac{5}{2}$

(3) 設$\log_4 128=x$，則$4^x=128\Rightarrow(2^2)^x=2^7\Rightarrow 2x=7\Rightarrow x=\frac{7}{2}$，$\therefore$所求$=\frac{7}{2}$

(4) $5^{\log_5 6}=6$

(5) $7^{\frac{\log 9}{\log 7}}=7^{\log_7 9}=9$

4. 化簡$\log\frac{1}{6}-\log\frac{125}{42}-\log 56$。

[解] 原式$=\log\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{125}{42}\times 56}=\log\dfrac{42}{125\times 6\times 56}=\log\dfrac{1}{1000}=\log 10^{-3}=-3$

5. 化簡$\log\frac{7}{36}+5\log 2-\log\frac{14}{25}+2\log 3$。

[解] 原式 $=\log\frac{7}{36}+\log 2^5-\log\frac{14}{25}+\log 3^2=\log\frac{\frac{7}{36}\times 2^5\times 3^2}{\frac{14}{25}}=\log 100=\log 10^2=2$

6. 化簡 $\log\frac{28}{15}-2\log\frac{3}{14}+3\log\frac{6}{7}-4\log\frac{2}{5}$ 。

[解] 所求 $=\log\frac{28}{15}-\log(\frac{3}{14})^2+\log(\frac{6}{7})^3-\log(\frac{2}{5})^4=\log\frac{\frac{28}{15}\cdot\frac{216}{343}}{\frac{9}{196}\cdot\frac{16}{625}}=\log 1000=\log 10^3=3$

7. 化簡 $\log 2+2\log\sqrt{5}+\log_4 64$ 。

[解] 所求 $=\log 2+\log 5+\frac{\log 64}{\log 4}=1+\frac{6\log 2}{2\log 2}=4$

8. 化簡 $\log_9 27+11^{\log_{11}6}$ 。

[解] 所求 $=\frac{\log 27}{\log 9}+6=\frac{3\log 3}{2\log 3}+6=\frac{3}{2}+6=\frac{15}{2}$

9. 化簡 $(\log_3 2+\log_9 8)\times(\log_2 9+\log_4 3)$ 。

[解] 所求 $=(\frac{\log 2}{\log 3}+\frac{\log 8}{\log 9})\times(\frac{\log 9}{\log 2}+\frac{\log 3}{\log 4})$

$=(\frac{\log 2}{\log 3}+\frac{3\log 2}{2\log 3})\times(\frac{2\log 3}{\log 2}+\frac{\log 3}{2\log 2})$

$=(1+\frac{3}{2})\frac{\log 2}{\log 3}\times(2+\frac{1}{2})\frac{\log 3}{\log 2}$

$=\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{25}{4}$

10. 方程式 $(2^x+1)(3^x-2)(5^x-1)=0$ 的解為何？

[解] $(2^x+1)(3^x-2)(5^x-1)=0$

$\Rightarrow(3^x-2)(5^x-1)=0$（$\because 2^x+1$ 恆大於 0）

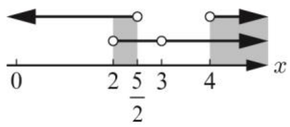
$\Rightarrow 3^x=2$ 或 $5^x=1$

$\Rightarrow x=\log_3 2$ 或 0

11. 對數 $\log_{(x-2)}(2x^2-13x+20)$ 有意義，則 x 的範圍為何？

[解] $\because\log_{(x-2)}(2x^2-13x+20)$ 有意義

$\therefore\begin{cases}x-2>0 \text{ 且 } x-2\neq 1\\ 2x^2-13x+20>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>2 \text{ 且 } x\neq 3\\ (x-4)(2x-5)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>2 \text{ 且 } x\neq 3\\ x>4 \text{ 或 } x<\frac{5}{2}\end{cases}$



整理可得 $2<x<\frac{5}{2}$ 或 $x>4$

12. 已知 $\log 2\approx 0.3010,\log 3\approx 0.4771$，則 $2^x=3$ 的根最接近下列哪個數？
(A) 1.4 (B) 1.5 (C) 1.6 (D) 1.7 (E) 1.8

[解] $2^x=3\Rightarrow x=\log_2 3=\dfrac{\log 3}{\log 2}\approx\dfrac{0.4771}{0.3010}\approx 1.585\approx 1.6$ ，故選(C)

13. 設 $\log 3=a,\log 7=b$ ，試以 a,b 表示 $\log_{210}63$ 。

[解] $\log_{210}63=\dfrac{\log 63}{\log 210}=\dfrac{\log(3^2\cdot 7)}{\log(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7)}=\dfrac{2\log 3+\log 7}{\log 2+\log 3+\log 5+\log 7}=\dfrac{2a+b}{1+a+b}$

14. pH 值是衡量溶液酸鹼程度的標準，它的定義為：pH 值 $=-\log[H^+]$，其中 $[H^+]$ 為氫離子的濃度（莫耳／升）。今有 pH 值分別為 3 與 4 的甲、乙兩種酸性溶液，試問：
(1) 甲溶液氫離子濃度是乙溶液氫離子濃度的多少倍？
(2) 若將甲、乙兩種酸性溶液依體積 5 比 4 的比例混合，則混合溶液的 pH 值為何？（答案請四捨五入至小數點後第二位。已知 $\log 2\approx 0.3010,\log 3\approx 0.4771$）

[解] (1) 設甲、乙兩種溶液的氫離子濃度分別為 x 與 y（莫耳／升）

則 $3=-\log x\Rightarrow x=10^{-3}$（莫耳／升）

$4=-\log y\Rightarrow y=10^{-4}$（莫耳／升）

因此，所求 $=\dfrac{10^{-3}}{10^{-4}}=10$（倍）

(2) 混合溶液的氫離子濃度為 $\dfrac{5\ell\times 10^{-3}+4\ell\times 10^{-4}}{5\ell+4\ell}=6\times 10^{-4}$（莫耳／升）

$\therefore$ 其 pH 值為 $-\log(6\times 10^{-4})=-(\log 2+\log 3+\log 10^{-4})\approx-(0.3010+0.4771-4)=3.2219\approx 3.22$

15. 已知 $\log 2\approx 0.3010,\log 3\approx 0.4771,\log 7\approx 0.8451$ ，試問：
(1) 126^{35} 乘開後是幾位數？
(2) $(\frac{6}{7})^{60}$ 表成小數時，在小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？

[解] (1) $\log 126^{35}=35\log 126=35\log(2\times 3^2\times 7)=35(\log 2+2\log 3+\log 7)$

$\approx 35(0.3010+0.9542+0.8451)=35\times 2.1003=73.5105$

因此，126^{35} 是 74 位數

(2) $\log(\frac{6}{7})^{60}=60\log\frac{6}{7}=60(\log 6-\log 7)\approx 60(0.7781-0.8451)=60\times(-0.067)=-4.02=-5+0.98$

即小數點後第 5 位開始出現不為 0 的數字

進階題

16. 已知 $\log 2\approx 0.3010$，試求 $5^{0.3010}$ 最接近下列哪一個數字？
(A) $2^{0.6}$ (B) $2^{0.7}$ (C) $2^{0.8}$ (D) $2^{0.9}$ (E) 2

[解] 令 $x=5^{0.301}$ ，則 $\log x=\log 5^{0.301}=0.301\times\log 5\approx\log 2\times 0.6990=\log 2^{0.6990}\Rightarrow x\approx 2^{0.6990}\approx 2^{0.7}$ ，故選(B)

17. 已知 $a,b,c>1$ 且 $x>0$ 。若 $\log_a x=2,\log_b x=3,\log_c x=6$ ，則 $\log_{abc}x$ 之值為何？

[解] $\log_a x=2\Rightarrow a^2=x\Rightarrow a=x^{\frac{1}{2}}$

$\log_b x=3\Rightarrow b^3=x\Rightarrow b=x^{\frac{1}{3}}$

$\log_c x=6\Rightarrow c^6=x\Rightarrow c=x^{\frac{1}{6}}$

$\therefore abc=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=x\Rightarrow\log_{abc}x=1$

18. 設 a,b,c 為三角形的三邊長，$c\neq 1$，且 $\log_{(a+b)}c+\log_{(a-b)}c=2\log_{(a+b)}c\cdot\log_{(a-b)}c$ ，試判斷此三角形為何種三角形？

[解] $\log_{(a+b)} c + \log_{(a-b)} c = 2\log_{(a+b)} c \cdot \log_{(a-b)} c$

$\Rightarrow \dfrac{\log c}{\log(a+b)} + \dfrac{\log c}{\log(a-b)} = 2\dfrac{\log c}{\log(a+b)} \cdot \dfrac{\log c}{\log(a-b)}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\log(a+b)} + \dfrac{1}{\log(a-b)} = \dfrac{2\log c}{\log(a+b)\cdot\log(a-b)}$ ($\because c \neq 1$，$\therefore \log c \neq 0$)

$\Rightarrow \log(a-b) + \log(a+b) = 2\log c$

$\Rightarrow \log[(a-b)(a+b)] = \log c^2$

$\Rightarrow \log(a^2 - b^2) = \log c^2$

$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$

$\therefore$此三角形為直角三角形