高中 數學 科考試卷　____年____班　座號：_____　姓名：__________

一、單選題：每題 3 分、共 15 分

(　　)1.　設 $\log 2=a$，$\log 3=b$，則 $\log\sqrt{15}=$？

(A)$\sqrt{1+b-a}$　(B)$\frac{1}{2}(1+b-a)$　(C)$\sqrt{a+b-1}$　(D)$\frac{1}{2}(a+b-1)$　(E)$\frac{1}{2}(1+a-b)$

答案：(B)

解析：$\log\sqrt{15}=\log(15)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log 15=\frac{1}{2}(\log 3+\log 5)$

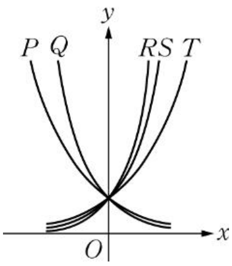
$=\frac{1}{2}(\log 3+\log\frac{10}{2})=\frac{1}{2}(\log 3+\log 10-\log 2)$

$=\frac{1}{2}(\log 3+1-\log 2)=\frac{1}{2}(1+\log 3-\log 2)=\frac{1}{2}(1+b-a)$，

故選(B)。

(　　)2.　設 $y=4^x$，$y=3^x$，$y=2^x$，$y=(\frac{1}{2})^x$，

$y=(\frac{1}{3})^x$ 的圖形分別為圖中的五條曲線，則 $y=2^x$ 的圖形為



(A)P　(B)Q　(C)R　(D)S　(E)T

答案：(E)

解析：$y=2^x$ 底數大於 1，為左下到右上的曲線

即 R，S，T 的其中之一

而 $4>3>2 \Rightarrow 4^x>3^x>2^x$，表示 $y=2^x$ 為上升較慢的曲線

其圖形為 T，故選(E)

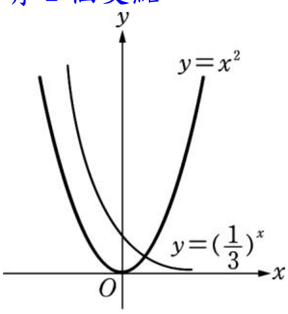
(　　)3.　方程式 $x^2=(\frac{1}{3})^x$ 有多少個實數解？

(A)0 個　(B)1 個　(C)2 個　(D)3 個　(E)4 個

答案：(B)

解析：作 $y=x^2$ 與 $y=(\frac{1}{3})^x$ 的圖形

有 1 個交點



(　　)4.　請搭配計算機回答問題：

有一詐騙集團宣稱投資某商品，固定每年的年報酬率為 100%，並以每日複利計算。若投資此商品 1 萬元，經過 10 年後可得到的本利和最接近下列哪個選項？

(A)1 千萬　(B)5 千萬　(C)1 億　(D)2 億　(E)3 億

答案：(D)

解析：本利和＝(1 萬元)$\left(1+\dfrac{100}{365}\%\right)^{365\times10}$≒21727.3 萬元

故選(D)

(　　)5.　方程式 $3^x+2x-1=0$ 有幾個實數解？

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3　(E)4

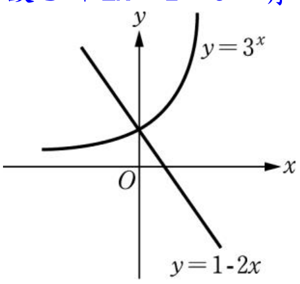
答案：(B)

解析：$3^x+2x-1=0$ 的實數解

$\Rightarrow 3^x=1-2x$ 的實數解

$\Rightarrow y=3^x$ 與 $y=1-2x$ 的交點個數

故 $3^x+2x-1=0$　有 1 個實數解



二、多重選擇題：每題 3 分、共 15 分

(　　)1.　若 $a=\log_2 3$，$b=\log_3 5$，$c=\log_5 7$，請選出正確的選項？

(A)$\log_2 12=2+a$　(B)$\log_2 50=1+2b$　(C)$\log_3 21=1+bc$　(D)$\log_{21} 15=\dfrac{1+b}{1+bc}$　(E)$\log 4=\dfrac{2}{1+ab}$

答案：(A)(C)(D)(E)

解析：$\because a=\log_2 3$，$b=\log_3 5$，$c=\log_5 7 \Rightarrow \log_2 5=ab$，$\log_3 7=bc$

(A) 對　$\because \log_2 12=\log_2(2^2\times3)=2+\log_2 3=2+a$

(B) 錯　$\because \log_2 50=\log_2(2\times5^2)=1+2\log_2 5=1+2ab$

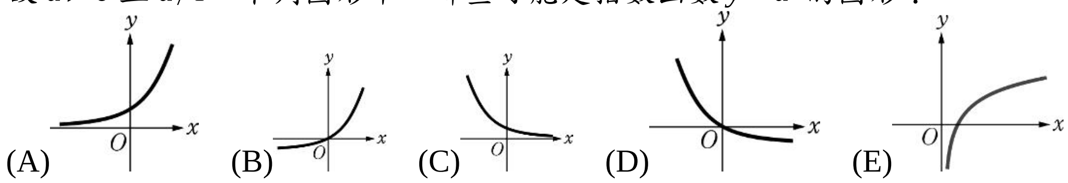
(C) 對　$\because \log_3 21=\log_3(3\times7)=1+\log_3 7=1+bc$

(D) 對　$\because \log_{21}15=\dfrac{\log_3(3\times5)}{\log_3(3\times7)}=\dfrac{1+\log_3 5}{1+\log_3 7}=\dfrac{1+b}{1+bc}$

(E) 對　$\because \log 4=\dfrac{\log_2 4}{\log_2 10}=\dfrac{2}{1+\log_2 5}=\dfrac{2}{1+ab}$

故選(A)(C)(D)(E)

(　　)2.　設 $a>0$ 且 $a\neq1$，下列圖形中，哪些可能是指數函數 $y=a^x$ 的圖形？



答案：(A)(C)

解析：當 $a>1$ 時，圖形為(A)；當 $0<a<1$ 時，圖形為(C)。

故選(A)(C)。

(　　)3.　下列敘述哪些正確？

(A)$y=2^x$ 與 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的圖形對稱於 y 軸　(B)$y=2^x$ 與 $y=-2^x$ 的圖形對稱於 x 軸　(C)$y=2^x$ 與 $y=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的圖形對稱於原點　(D)若 a 不為 1 的正實數，則 $y=a^x$ 的圖形是凹口向上　(E)若 a 不為 1 的正實數，則 $y=a^x$ 的圖形恆過一個定點

答案：(A)(B)(C)(D)(E)

解析：(A) 點 (m , n) 在 $y=2^x$ 上 $\Leftrightarrow n=2^m \Leftrightarrow$ 點 ($-m$, n) 在 $y=(\frac{1}{2})^x=2^{-x}$ 上

∴ 兩圖形對稱於 y 軸

(B) 點 (m , n) 在 $y=2^x$ 上 $\Leftrightarrow n=2^m \Leftrightarrow$ 點 (m , $-n$) 在 $y=-2^x$ 上

∴ 兩圖形對稱於 x 軸

(C) 點 (m , n) 在 $y=2^x$ 上 $\Leftrightarrow n=2^m \Leftrightarrow$ 點 ($-m$, $-n$) 在 $y=-(\frac{1}{2})^x$ 上

∴ 兩圖形對稱於原點

(D) 指數函數 $y=a^x$ 圖形都是凹口向上

(E) 指數函數 $y=a^x$ 圖形恆過定點 (0 , 1)

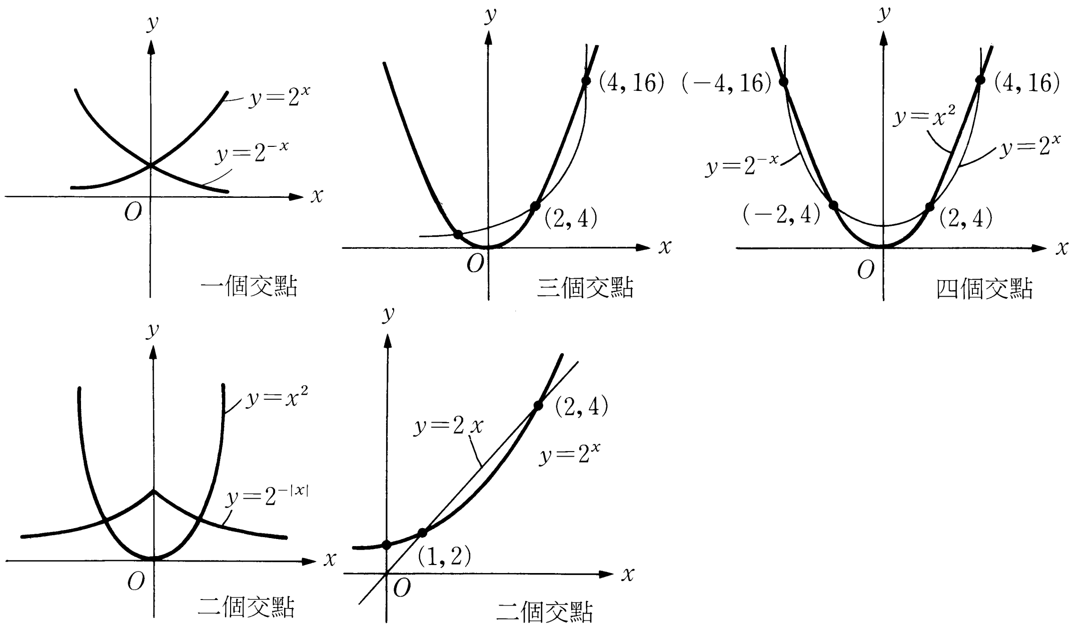
※本題亦可做 $y=2^x$ 與 $y=(\frac{1}{2})^x$ 兩圖形來判斷答案

(　　)4. 若 x 為實數，則下列何者正確？

(A) $2^x=2^{-x}$ 恰有一實根　(B) $2^x=x^2$ 之實根有 2 個　(C) $2^{|x|}=x^2$ 之實根有 4 個　(D) $2^{-|x|}=x^2$ 之實根有 2 個　(E) $2^x=2x$ 恰有一實根

答案：(A)(C)(D)

解析：(A)一個交點；(B)三個交點；(C)四個交點；(D)二個交點；(E)二個交點

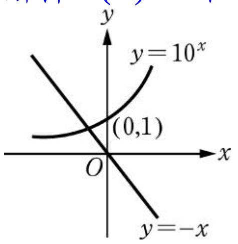


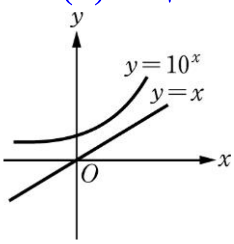
(　　)5. 下列何者為真？

(A) $10^x+x=0$ 有實數解　(B) $10^x>x$ 恆成立　(C) $10^x-x=0$ 有實數解　(D) $10^x-x^2=0$ 有實數解　(E) $10^x>x^2$ 恆成立

答案：(A)(B)(D)

解析：(A) 正確　(B) 正確　(C) 不正確



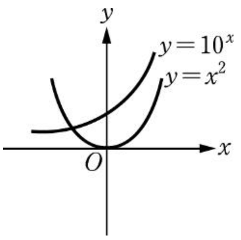


∵ $10^x>x$

∴ $10^x-x=0$

沒有實根

(D) 正確　(E) 不正確



$\because\ 10^x-x^2=0$有實根

$\therefore\ 10^x>x^2$不恆成立

三、非選題：每題 7 分、共 21 分

1. 試解下列方程式：

(1) $(\sqrt{3})^{2x-3}=27^{x+1}$。

(2) $9^x-2\cdot 3^{x+1}-27=0$。

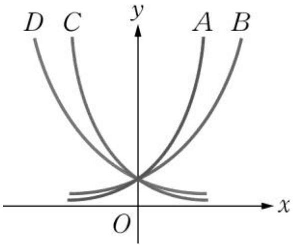
答案：(1)$-\dfrac{9}{4}$；(2)2

解析：(1) $(3^{\frac{1}{2}})^{2x-3}=(3^3)^{x+1}$，$3^{x-\frac{3}{2}}=3^{3x+3}$，$x-\dfrac{3}{2}=3x+3$，$2x=-\dfrac{9}{2}$，

故 $x=-\dfrac{9}{4}$。

(2) $9^x-6\cdot 3^x-27=0$，$(3^x)^2-6\cdot(3^x)-27=0$，$(3^x-9)(3^x+3)=0$，$\because 3^x+3\neq 0$ $\therefore 3^x-9=0$，故 $x=2$。

2. 如附圖，設四個指數函數 $y=a^x$，$y=b^x$，$y=c^x$，$y=d^x$ 的圖形，依序為 A，B，C，D。試將它們的"底數"與 1 按大小排序。(用不等號"<")



答案：$c<d<1<b<a$

解析：A，B 兩圖形由左而右上升，故 $a>b>1$；

C，D 兩圖形由左而右下降，故 $0<c<d<1$。

所以 $a>b>1>d>c$。

3. 試解下列各方程式：

(1) $21^x-7^x-3^x+1=0$。

(2) $3^{2x}-7\cdot 3^x-18=0$。

答案：(1) $x=0$；(2) $x=2$

解析：(1) 原式化為$(7\cdot 3)^x-7^x-3^x+1=0$

$\Rightarrow 7^x\cdot 3^x-7^x-3^x+1=0$

$\Rightarrow (3^x-1)(7^x-1)=0$

$\Rightarrow 3^x=1$ 或 $7^x=1$，得 $x=0$

(2) 原式化為$(3^x)^2-7\cdot 3^x-18=0$

令 $t=3^x$，則 $t^2-7t-18=0$，$(t+2)(t-9)=0$

解得 $t=-2$ 或 $t=9$，即 $3^x=-2$ 或 $3^x=9$

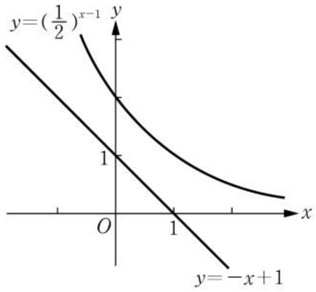
但 $3^x=-2$ 不合，故 $x=2$

四、填充題：每題 7 分、共 49 分

1. 方程式 $(\dfrac{1}{2})^{x-1}=-x+1$ 有________個相異的實根。

答案：0

解析：$\because \begin{cases} y=(\dfrac{1}{2})^{x-1} \\ y=-x+1 \end{cases}$ 的圖形沒有交點　$\therefore (\dfrac{1}{2})^{x-1}=-x+1$ 沒有相異實根



2.　不等式 $4^{x^2+6x+3}<8\cdot 2^{10x+7}$ 之解為______。

答案：$-2<x<1$

解析：變形為 $2^{2(x^2+6x+3)}<2^{10x+7+3}$

$\Rightarrow 2(x^2+6x+3)<10x+7+3$

$\Rightarrow x^2+x-2<0 \Rightarrow (x+2)(x-1)<0$

$\therefore -2<x<1$

3.　設 $a=\log_2 3$，$b=\log_3 7$，試以 a、b 表 $\log_{12} 63=$________。

答案：$\dfrac{2a+ab}{2+a}$

解析：$a=\log_2 3$，$b=\log_3 7 \Rightarrow ab=\log_2 7$

$\log_{12} 63=\dfrac{\log_2 63}{\log_2 12}=\dfrac{\log_2 7+\log_2 9}{\log_2 3+\log_2 4}=\dfrac{ab+2a}{a+2}$

4.　不等式 $(0.1)^{-x^2+7}<(0.001)^{x+1}$ 的解為______。

答案：$-4<x<1$

解析：$(0.1)^{-x^2+7}<(0.001)^{x+1} \Rightarrow (0.1)^{-x^2+7}<[(0.1)^3]^{x+1}=(0.1)^{3x+3}$

$\Rightarrow -x^2+7>3x+3$

$\Rightarrow x^2+3x-4<0$

$\Rightarrow (x-1)(x+4)<0$，

故 $-4<x<1$

5.　設 $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$，若 $f(a)=\dfrac{15}{17}$，則 $a=$______。

答案：2

解析：$f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\dfrac{2^{2x}-1}{2^{2x}+1}$，若 $f(a)=\dfrac{15}{17}$，則 $\dfrac{2^{2a}-1}{2^{2a}+1}=\dfrac{15}{17}$

$\Rightarrow 17\cdot 2^{2a}-17=15\cdot 2^{2a}+15 \Rightarrow 2\cdot 2^{2a}=32$，

故 $2^{2a}=16=2^4$，得 $2a=4$，即 $a=2$

6.　設 $a=\log_7 4$，$b=\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{2}} 3$，$c=\log_{\frac{1}{3}} 0.5$，$d=\log_4 7$，試比較 a、b、c、d 之大小順序為____________。

答案：$c<a<d<b$

解析：$a=\log_7 4<\log_7 7=1$，

$c=\log_{\frac{1}{3}} 0.5=\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{2}=\log_3 2<\log_3 3=1$，

$b=\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{2}} 3=\log_2 3>\log_2 2=1$，

$d=\log_4 7>\log_4 4=1$，

又 $a=\log_7 4=\log_{\sqrt{7}} 2>\log_3 2=c$，$b=\log_2 3>\log_2 \sqrt{7}=\log_4 7=d$，

故 $c<a<d<b$

7. 設 α、β 為方程式 $4^x-5\cdot 2^{x+1}+8=0$ 之二根，則 $\alpha+\beta=$________。

答案：3

解析：設 $t=2^x$，則原式為 $t^2-10t+8=0$，且二根為 2^α，2^β

由根與係數關係，$2^\alpha\times 2^\beta=8$

$\Rightarrow 2^{\alpha+\beta}=8$，故 $\alpha+\beta=3$