高中 數學 科考試卷 ____年____班 座號：_____ 姓名：__________

一、單選題：每題 3 分、共 15 分

(　　)1. 請問下列哪一個數的值最大？

(A)$0.9^{-\pi}$ (B)$0.9^{-\sqrt{3}}$ (C)$0.9^{1.5}$ (D)0.9^{2}

答案：(A)

解析：$\because 2>1.5>-\sqrt{3}>-\pi$

$\Rightarrow 0.9^{2}<0.9^{1.5}<0.9^{-\sqrt{3}}<0.9^{-\pi}$

$\therefore$ 選(A)

(　　)2. 下列選項中哪一個數值最大？

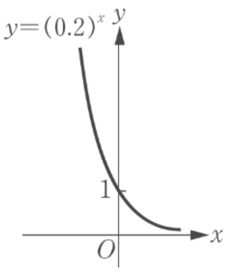
(A)$(0.2)^{0}$ (B)$(0.2)^{-\sqrt{3}}$ (C)$(0.2)^{2}$ (D)$(0.2)^{0.2}$ (E)$(0.2)^{-2}$

答案：(E)

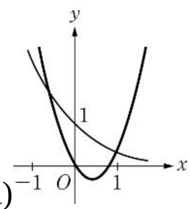
解析：$y=(0.2)^{x}$ 為遞減函數

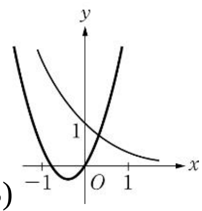
而 $2>0.2>0>-\sqrt{3}>-2$

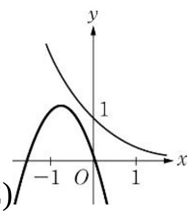
$\Rightarrow (0.2)^{2}<(0.2)^{0.2}<(0.2)^{0}<(0.2)^{-\sqrt{3}}<(0.2)^{-2}$

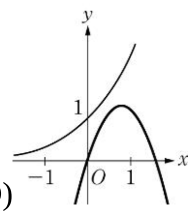


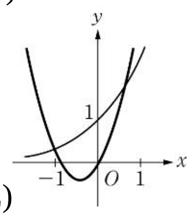
(　　)3. 在下列圖形中，二次函數 $y=ax^2+bx$ 與指數函數 $y=(\frac{b}{a})^{x}$ 之圖形可能是下列何者？

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


答案：(B)

解析：(A) 指數函數的底數滿足 $0<\frac{b}{a}<1$；二次函數之一 x 截距為 $-\frac{b}{a}>0$，矛盾

(B) 指數函數的底數滿足 $0<\frac{b}{a}<1$；二次函數之一 x 截距為 $-\frac{b}{a}$，且 $-1<\frac{b}{a}<0$，即 $0<\frac{b}{a}<1$

故(B)是可能的圖形

(C) 指數函數的底數滿足 $0<\frac{b}{a}<1$；二次函數之一 x 截距為 $-\frac{b}{a}<-1$，即 $\frac{b}{a}>1$，矛盾

(D) 指數函數的底數 $\frac{b}{a}>1$；二次函數之一 x 截距為 $-\frac{b}{a}>1$，即 $\frac{b}{a}<-1$，矛盾。

(E) 指數函數的底數 $\frac{b}{a}>1$；二次函數之一 x 截距滿足 $-1<-\frac{b}{a}<0$，即 $0<\frac{b}{a}<1$，矛盾

故選(B)

(　　)4. 若函數 $y=a^{x}+m-1$ 的圖形通過第一、三、四象限，則下列何者為真？

(A)$0<a<1$ 且 $m<0$　(B)$0<a<1$ 且 $m>0$　(C)$0<a<1$ 且 $m>0$　(D)$a>1$ 且 $m<0$　(E)$a>1$ 且 $m>1$

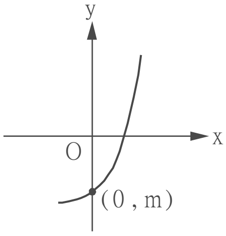
答案：(D)

解析：$\because y=a^x+m-1$ 為指數函數，又通過第一、三、四象限

$\therefore$圖形如附圖，為嚴格遞增函數

$\therefore$ $a>1$，且令 $x=0$ 得 $y=a^0+m-1<0 \Rightarrow m<0$

故選(D)



(　　)5.　設 $a=\log_3 5$，$b=\log_5 14$，$c=\log_9 21$，請選出正確的大小關係。

(A)$a>b>c$　(B)$a>c>b$　(C)$b>a>c$　(D)$b>c>a$　(E)$c>b>a$

答案：(C)

解析：$c=\dfrac{1}{2}\log_3 21=\log_3\sqrt{21}<\log_3\sqrt{25}=a$

$a=\log_3 5=\dfrac{\log 5}{\log 3}\approx\dfrac{0.699}{0.4771}\approx 1.46$

$b=\log_5 14=\dfrac{\log 14}{\log 5}=\dfrac{\log 2+\log 7}{\log 5}\approx\dfrac{0.301+0.8451}{0.699}\approx 1.63$

故 $b>a>c$

二、多重選擇題：每題 3 分、共 15 分

(　　)1.　以下哪些 m 值可以使得方程式 $3\cdot 9^x-2m\cdot 3^x-m+6=0$ 有兩相異實根？

(A)3　(B)4　(C)4.5　(D)$\sqrt{10}$　(E)5

答案：(B)(C)(D)(E)

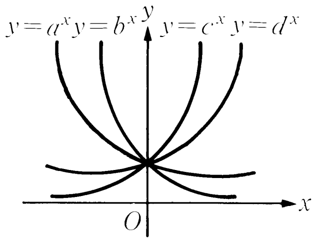
解析：令 $3^x=t$，原式 $\Rightarrow 3t^2-2mt-m+6=0$

原式有兩相異實根，亦即 t 的方程式有兩正根

$$\begin{cases}(-2m)^2-4\cdot 3\cdot(6-m)>0\\ \dfrac{2m}{3}>0\\ \dfrac{6-m}{3}>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m<-6\text{或}m>3\\ m>0\\ m<6\end{cases}\quad\Rightarrow 3<m<6$$

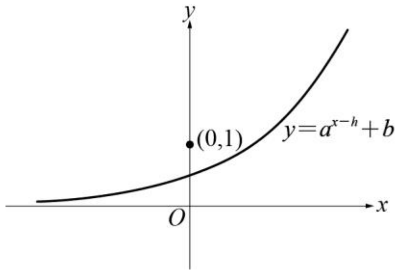
(　　)2.　如附圖，各指數函數的底數，分別為 a，b，c，d，試問下列各不等式哪些正確？



(A)$a>b>0$　(B)$d>c>1$　(C)$c>b>1$　(D)$1>b>a$　(E)$c>d>1$

答案：(A)(E)

解析：由圖知 $c>d>1$，
$1>a>b>0$
故選(A)(E)
(　　)3.　附圖為 $y=a^{x-h}+b$ 的部分圖形，其中 x 軸為圖形的漸近線，則下列哪些選項正確？



(A)$a>1$　(B)$0<a<1$　(C)$b<0$　(D)$b=0$　(E)$h>0$
答案：(A)(D)(E)
解析：∵圖形以 x 軸為漸近線　∴$b=0$
將函數 $y=a^x\,(a>1)$，右移 $h\,(h>0)$ 單位，
即可得題目圖，故選(A)(D)(E)。
(　　)4.　關於 $y=a^x\,(a>0，a\neq1)$ 的圖形，試問下列哪些選項正確？
(A)圖形必通過點 $(1,0)$　(B)圖形必和任一條鉛直線交於一點　(C)圖形必和任一條水平線交於一點　(D)$\dfrac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}\geq a^{\frac{x_1+x_2}{2}}$，其中 x_1,x_2 為任意實數　(E)若 $x_1>x_2$，則 $a^{x_1}>a^{x_2}$
答案：(B)(D)
解析：(A)×：圖形必過點 $(0,1)$，x 軸為其漸近線。
(B)○：當 x 為任意實數，則 a^x 恆有意義。
(C)×：x 軸下方的水平線與 $y=a^x$ 的圖形沒有交點。
(D)○：因 $a^{x_1},a^{x_2}>0$，由算幾不等式知 $\dfrac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}\geq\sqrt{a^{x_1}a^{x_2}}=a^{\frac{x_1+x_2}{2}}$。
(E)×：(i) 當 $a>1$ 時，$x_1>x_2\Rightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$；(ii) 當 $0<a<1$ 時，$x_1>x_2\Rightarrow a^{x_1}<a^{x_2}$。
故選(B)(D)。
(　　)5.　請選出正確的選項？
(A)$\log_{-2}1=0$　(B)$\dfrac{\log 8}{\log 2}=4$　(C)$\log_4\dfrac{\sqrt{2}}{4}=-\dfrac{3}{4}$　(D)$\log_a 5=2$，則 $a=\pm\sqrt{5}$　(E)$\log_{0.2}\dfrac{5}{2}=\log_5 0.4$
答案：(C)(E)
解析：(A) 錯　∵$-2<0$
(B) 錯　∵ $\dfrac{\log 8}{\log 2}=\log_2 8=3$
(C) 對　∵ $\log_4\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\log_{2^2}\dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{2^2}=\log_{2^2}2^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{-\frac{3}{2}}{2}\log_2 2=\dfrac{-3}{4}$
(D) 錯　∵ $a>0$　∴ $a=\sqrt{5}$　$(-\sqrt{5}$ 不合$)$
(E) 對　∵ $\log_{0.2}\dfrac{5}{2}=\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{5}{2}=\log_{5^{-1}}\dfrac{5}{2}=-\log_5\dfrac{5}{2}=\log_5\left(\dfrac{5}{2}\right)^{-1}$
$=\log_5\dfrac{2}{5}=\log_5 0.4$
故選(C)(E)
三、非選題：每題 7 分、共 21 分

1. 設 x 為實數，若 $(\sqrt{0.1})^{3x-1}=10^{-2x+\frac{3}{2}}$，求 x 之值。

答案：2

解析：$(\sqrt{0.1})^{3x-1}=10^{-2x+\frac{3}{2}}$

$(10^{-1})^{\frac{3x-1}{2}}=10^{-2x+\frac{3}{2}}$，$10^{\frac{-3x+1}{2}}=10^{-2x+\frac{3}{2}}$

故 $\dfrac{-3x+1}{2}=-2x+\dfrac{3}{2}$，$-3x+1=-4x+3$，得 $x=2$

2. 放射物的質量變為原來的一半所需的時間，稱為該物質的半衰期。鐳 (Radium) 是一種放射性物質，最穩定的同位素為鐳-226，半衰期為 1600 年。假設剛開始鐳的質量為 10 公克，試求：
(1) 6400 年後的質量為幾公克？
(2) 衰變到剩下 8 公克時，需要幾年？(四捨五入至整數位) (已知 $\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$)

答案：(1) $\dfrac{5}{8}$ 公克；(2) 516 年

解析：(1) 所求為 $10\times(\dfrac{1}{2})^{\frac{6400}{1600}}=10\times(\dfrac{1}{2})^4=\dfrac{5}{8}$ (公克)

(2) 衰變到剩下 8 公克，需要 n 年

$10\times(\dfrac{1}{2})^{\frac{n}{1600}}=8\Rightarrow(\dfrac{1}{2})^{\frac{n}{1600}}=\dfrac{8}{10}$

取 log，$\dfrac{n}{1600}\log\dfrac{1}{2}=\log\dfrac{8}{10}$

$n=1600\cdot\dfrac{3\log 2-1}{-\log 2}=1600\cdot\dfrac{-0.097}{-0.3010}\doteqdot 515.6$

$\therefore$需要 516 年

3. 設 $f(x)=2(9^x+9^{-x})-4(3^x+3^{-x})$，試求 $f(x)$ 的最小值，並求此時 x 值為何？

答案：最小值：-4，x 值$=0$

解析：令 $3^x+3^{-x}=A$ ($\because$ 算幾不等式 $A\geq 2$)

$\Rightarrow f(A)=2(A^2-2)-4A=2A^2-4A-4$

$=2(A-1)^2-6$ (頂點不在定義域內，所以選邊界)

$\therefore$當 $A=2$ 時，有最小值-4

此時 $3^x+3^{-x}=2\Rightarrow 3^{2x}-2\cdot 3^x+1=0\Rightarrow(3^x-1)^2=0$ 即 $3^x=1\Rightarrow x=0$

四、填充題：每題 7 分、共 49 分

1. 放射性物質衰變為原來質量一半所需的時間，稱為物質的半衰期。現有 A、B 兩種放射性物質，其中 A 的質量與 B 的質量之比例為 100：49，而 90 個月前 A 的質量與 B 的質量之比例為 25：49。若物質 B 的半衰期為 18 個月，則物質 A 的半衰期為________個月。

答案：30

解析：$\dfrac{25\times(\frac{1}{2})^{\frac{90}{T}}}{49\times(\frac{1}{2})^{\frac{90}{18}}}=\dfrac{100}{49}$　$(\dfrac{1}{2})^{\frac{90}{T}-5}=4$

$\therefore\dfrac{90}{T}-5=-2$

$\therefore T=30$

2. 設 $f(x)=2^{x+2}-3\times 4^x+1$，$-1\leq x\leq 0$，則 $f(x)$的最大值為 ________，最小值為________。

答案：$\dfrac{7}{3}$；2

解析：$f(x)=-3\times4^x+4\times2^x+1=-3\,(\,2^x-\frac{2}{3}\,)^2+\frac{7}{3}$

$-1\le x\le 0\Rightarrow\frac{1}{2}\le 2^x\le 1$

當 $2^x=\frac{2}{3}$ 時，有最大值 $=\frac{7}{3}$；

當 $2^x=1$ 時，有最小值 $f(0)=-3+4+1=2$

3. 設 k 為實數，若 α、β 為方程式 $4^x+k\cdot2^x+32=0$ 的兩根，求 α＋β 之值為______。

答案：5

解析：$4^x+k\cdot2^x+32=0$ 化為 $(\,2^x\,)^2+k\cdot2^x+32=0$

因 α，β 為 $(\,2^x\,)^2+k\cdot2^x+32=0$ 的兩根，

故 2^α，2^β 為 $t^2+kt+32=0$ 的兩根

於是 $2^\alpha\cdot2^\beta=32$，即 $2^{\alpha+\beta}=2^5$，得 $\alpha+\beta=5$

4. 不等式 $(\,0.1\,)^{x^2-5x+1}>1000$ 之解為________。

答案：$1<x<4$

解析：$10^{-x^2+5x-1}>10^3\Rightarrow-(\,x^2-5x+1\,)>3\Rightarrow x^2-5x+4=(\,x-1\,)\,(\,x-4\,)<0$

$\therefore\ 1<x<4$

5. 方程式 $2^{x-4}=7^{x-4}$ 之解為________。

答案：$x=4$

解析：$2^{x-4}=7^{x-4}\Rightarrow(\frac{2}{7})^{x-4}=1\Rightarrow x-4=0$

6. $x>0$，$x^{2x^2-5x+3}>x$ 之解為______。

答案：$x>2$ 或 $\frac{1}{2}<x<1$

解析：$x>0$，$x^{2x^2-5x+3}>x$

$x=1$ 時，此式不成立

若 $x>1$，則 $2x^2-5x+3>1\Rightarrow2x^2-5x+2>0\Rightarrow(\,2x-1\,)\,(\,x-2\,)>0\Rightarrow x>2$ 或 $x<\frac{1}{2}\xrightarrow{x>1}x>2$

若 $0<x<1$ 時，則 $2x^2-5x+3<1\Rightarrow2x^2-5x+2<0\Rightarrow(\,2x-1\,)\,(\,x-2\,)<0$

$\Rightarrow\frac{1}{2}<x<2\xrightarrow{0<x<1}\frac{1}{2}<x<1$

由以上討論知 $x>2$ 或 $\frac{1}{2}<x<1$

7. 將函數 $f(x)=(\frac{1}{10})^{x^2-3x-7}$ 的圖形向下平移 0.001，試求平移後的圖形與 x 軸的交點坐標為________。

答案：$(-2\,,0\,)$ 與 $(\,5\,,0\,)$

解析：向下平移後 $y=(\frac{1}{10})^{x^2-3x-7}-0.001$

令 $y=0$：$(\frac{1}{10})^{x^2-3x-7}=(\frac{1}{10})^3$

$\Rightarrow x^2-3x-7=3\Rightarrow x=5$ 或 -2

∴與 x 軸交點為 $(-2\,,0\,)$ 與 $(\,5\,,0\,)$