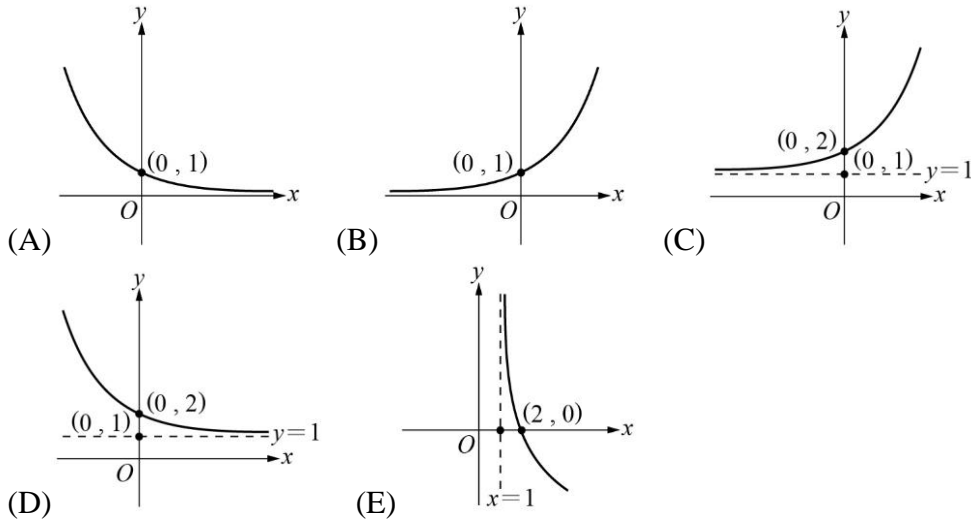


一、單選題：每題3分、共15分

() 1. 函數 $y = (\frac{3}{5})^x + 1$ 的圖形為下列何者？



答案：(D)

解析： $\because y = (\frac{3}{5})^x + 1$ 的圖形是將

$y = (\frac{3}{5})^x$ 的圖形往上平移1單位

\therefore 選(D)

() 2. $\log_{32} 27 \times \log_{81} 16$ 為？

- (A) $\log_{32 \times 81} 27 \times 16$ (B) $\log_6 1$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{3}{5}$

答案：(D)

解析： $\log_{32} 27 \times \log_{81} 16 = (\log_{2^5} 3^3) \times (\log_{3^4} 2^4)$

$$= (\frac{3}{5} \log_2 3) \times (\log_3 2) = \frac{3}{5}$$

\therefore 選(D)

() 3. 設 $x^2 - 3xy - 4y^2 = 0$ 且 $x > y > 0$ ，試求 $\log(2x^2 - 3xy + 10y^2) - \log(x^2 + xy - 17y^2)$ 之值為何？

- (A) 1 (B) $\frac{1}{10}$ (C) 0 (D) 10 (E) $\sqrt{10}$

答案：(A)

解析： $\because x^2 - 3xy - 4y^2 = 0 \Rightarrow (x - 4y)(x + y) = 0$

$\therefore x = 4y$ 或 $x = -y$

又： $x > y > 0 \therefore x = 4y$

$$\Rightarrow \text{原式} = \log \frac{2x^2 - 3xy + 10y^2}{x^2 + xy - 17y^2} = \log \frac{2(4y)^2 - 3(4y) \cdot y + 10y^2}{(4y)^2 + (4y) \cdot y - 17y^2} = \log \frac{30y^2}{3y^2} = \log 10 = 1, \text{ 故選(A)}$$

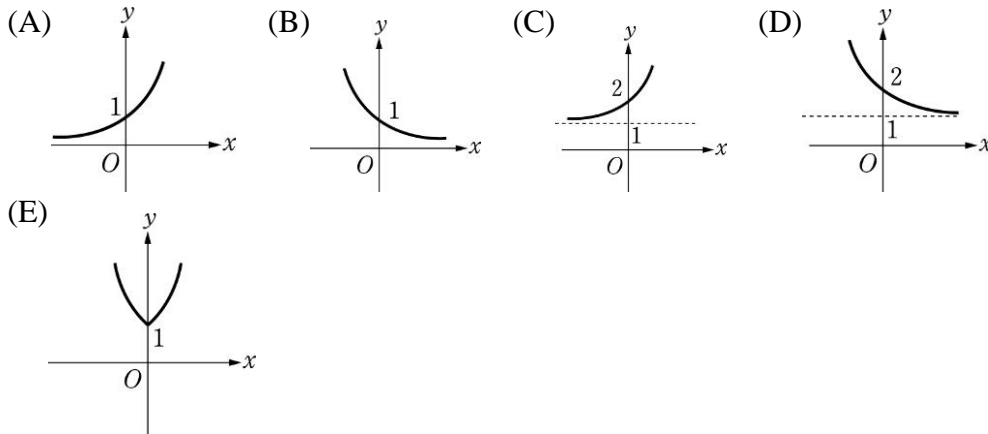
() 4. 設 $\log_2 3 = a$ ， $\log_3 7 = b$ ，則 $\log_{42} \frac{56}{9} =$

- (A) $\frac{ab + 2a - 3}{ab + a + 1}$ (B) $\frac{ab - 2a + 3}{ab + a + 1}$ (C) $\frac{ab + 2a - 3}{ab - a + 1}$
 (D) $\frac{ab - 2a + 3}{ab - a + 1}$ (E) 以上皆非

答案：(B)

解析：原式 = $\frac{\log_2 \frac{56}{9}}{\log_2 42} = \frac{\log_2 (2^3 \times 7) - \log_2 3^2}{\log_2 (2 \times 3 \times 7)} = \frac{3 + \log_2 7 - 2 \log_2 3}{1 + \log_2 3 + \log_2 7} = \frac{3 + \log_2 3 \times \log_3 7 - 2a}{1 + a + \log_2 3 \times \log_3 7} = \frac{ab - 2a + 3}{ab + a + 1}$

() 5. 下列何者是 $y = 1 + (\frac{1}{2})^x$ 的略圖？



答案：(D)

解析： $y = 1 + (\frac{1}{2})^x$ 之圖形係由 $y = (\frac{1}{2})^x$ 之圖形沿 y 軸向上平移 1 單位而得

二、多重選擇題：每題 3 分、共 15 分

() 1. 假設點 (a, b) 為函數 $y = 3^x$ 圖形上之一點，請選出下列正確的選項？

- (A) $a < b$ (B) $(-a, b)$ 為函數 $y = (\frac{1}{3})^{-x}$ 圖形上之一點 (C) $(a-5, 9b)$ 為函數 $y = 3^{x+7}$ 圖形上之一點 (D) $(\frac{1}{b}, a)$ 為函數 $y = \log_3 x^{-1}$ 圖形上之一點 (E) $(b+2, a)$ 為函數 $y = \log_3 x - 2$ 圖形上之一點

答案：(A)(C)(D)

解析：(A) ○：由題意知， $b = 3^a$ ，由於 $y = x$ 之圖形必在 $y = 3^x$ 下方，可知 $a < 3^a = b$ 。

(B) ×：若 $(-a, b)$ 為函數 $y = (\frac{1}{3})^{-x}$ 圖形上之一點，則 $b = (\frac{1}{3})^a = 3^{-a}$ ，此與 $b = 3^a$ 不合。

(C) ○：因 $b = 3^a$ ，故 $9b = 9 \cdot 3^a = 3^{a+2} = 3^{(a-5)+7}$ ，故 $(a-5, 9b)$ 在函數 $y = 3^{x+7}$ 圖形上。

(D) ○：因 $b = 3^a$ ，故 $a = \log_3 b = \log_3 (\frac{1}{b})^{-1}$ ，故 $(\frac{1}{b}, a)$ 在函數 $y = \log_3 x^{-1}$ 圖形上。

(E) ×：因 $b = 3^a$ ，故 $b+2 = 3^a + 2 \neq 3^{a+2}$ ，於是 $a+2 \neq \log_3 (b+2)$ ，

即 $a \neq \log_3 (b+2) - 2$ ，所以 $(b+2, a)$ 不在函數 $y = \log_3 x - 2$ 圖形上。

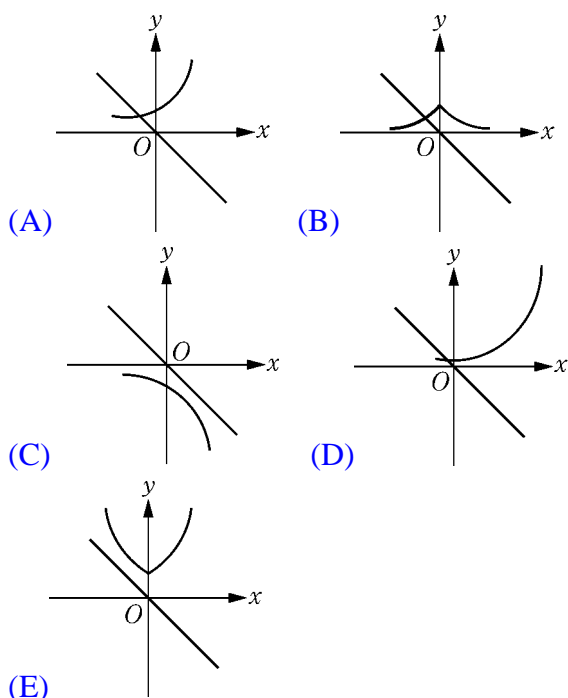
故選(A)(C)(D)。

() 2. 下列哪一個函數的圖形與 $x+y=0$ 恰有一交點？

- (A) $y = 2^x$ (B) $y = 2^{-|x|}$ (C) $y = -2^x$ (D) $y = 2^{x-2}$ (E) $y = 2|x|$

答案：(A)(B)(D)

解析：作函數圖形，由圖形判斷其相交情況，故選(A)(B)(D)



- () 3. 一種注射藥劑在病人血液中的量須維持在 600 mg 以上，否則病人就會有生命危險。現給某病人注射這種藥劑 2400 mg，如果藥在血液中以每 2 小時 20% 的比例衰減，試問下列選項哪些正確？
- (A) 注射後 4 小時，此病人血液中的藥量約為 1536 mg (B) 注射後 4 小時，此病人血液中的藥量約為 1920 mg (C) 注射後大約經過 6 小時，病人需補打下一劑 (D) 注射後大約經過 9 小時，病人需補打下一劑 (E) 注射後大約經過 12 小時，病人需補打下一劑

答案：(A)(E)

解析：注射後的 n 小時，藥劑剩下 $2400 \cdot (1 - 20\%)^{\frac{n}{2}} = 2400 \left(\frac{8}{10}\right)^{\frac{n}{2}}$

(1)(2) $n=4$: $2400 \left(\frac{8}{10}\right)^2 = 1536$ (mg)

(3)(4)(5) $n=6$: $2400 \left(\frac{8}{10}\right)^3 = 1228.8$

$n=9$: $2400 \left(\frac{8}{10}\right)^{\frac{9}{2}} = 938 \times (0.8)^{\frac{1}{2}} \approx 938 \times 0.9 = 844$

$n=12$: $2400 \left(\frac{8}{10}\right)^6 = 2400 \times 0.262 = 628.8$

故選(A)(E)

- () 4. 設 $a > 0$, $a \neq 1$ 時， x_1 與 x_2 為相異實數， $f(x) = a^x$ ，下列選項何者真確？

(A) 存在實數 c ，使 $f(c) = 0$ (B) $y = f(x)$ 的圖形與 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的圖形對稱於 y 軸 (C) $f(x_1)$

$+ f(x_2) > 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ (D) 當 $x_1 < x_2$ 時， $f(x_1) < f(x_2)$ (E) $f(x_1)f(x_2) = f(x_1 + x_2)$

答案：(B)(C)(E)

解析：(A) 對於任意實數 x ， $f(x) > 0$ 恆成立

(B) $y = a^x$ 與 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ 圖形對稱於 y 軸

(C) $f(x_1) + f(x_2) = a^{x_1} + a^{x_2} > 2\sqrt{a^{x_1} \cdot a^{x_2}} = 2 \cdot a^{\frac{x_1 + x_2}{2}} = 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

(D) $a > 1$ 時， $f(x)$ 為遞增； $0 < a < 1$ 時， $f(x)$ 為遞減

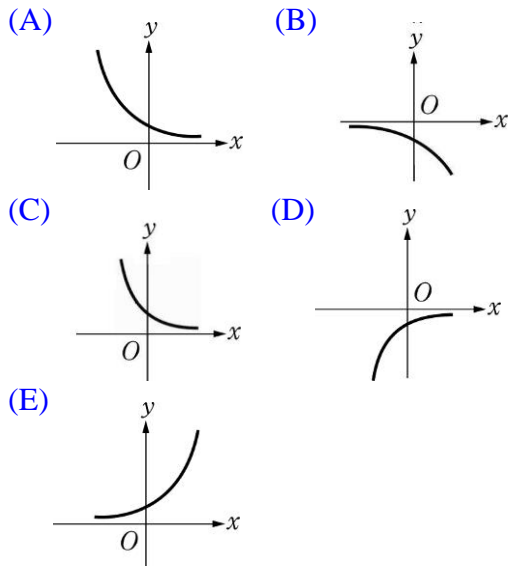
$$(E) f(x_1)f(x_2) = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2} = f(x_1+x_2)$$

() 5. 下列哪一個函數具有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$ 之性質？

(A) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (B) $f(x) = -2^x$ (C) $f(x) = 3^{-x}$ (D) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (E) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

答案：(A)(C)(E)

解析：函數 $f(x)$ 具有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$ ，即具有凹口向上性，由作圖



三、非選題：每題 7 分、共 21 分

1. 解不等式 $\frac{1}{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} < 4$ 。

答案： $0 < x < 3$

解析： $\left(\frac{1}{2}\right)^1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Rightarrow 1 > x-2 > -2 \Rightarrow 0 < x < 3$

2. (1) $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ 恆過一個定點，求此定點坐標。
 (2) 求 $y = 2^x$ 與 $y = 1$ 是否相交？如果相交，求其交點坐標。

答案：(1) $(0, 1)$ ；(2) 是， $(0, 1)$

解析：(1) $\because f(x) = a^x$, $a > 0$ 且 $a \neq 1 \therefore f(0) = a^0 = 1$ ，故恆過 $(0, 1)$ 這一點

(2) $\begin{cases} y = 2^x \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = 2^x \Rightarrow 2^0 = 2^x \Rightarrow x = 0 \therefore y = 2^x$ 與 $y = 1$ 交於 $(0, 1)$

3. $\left(\frac{1}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x > 12$ ，則 x 之範圍為何？

答案： $x < -1$

解析：令 $3^{-x} = t$ ，則 $t^2 + t - 12 > 0$, $(t+4)(t-3) > 0$
 $t > 3$ 或 $t < -4$, $3^{-x} > 3 \Rightarrow x < -1$

四、填充題：每題 7 分、共 49 分

1. 設 $y = -64^x + 8^{x+1} + 2$, $-1 \leq x \leq 1$ ，若 y 之最大值為 M ，最小值為 m ，則 $M+m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案：20

解析： $y = -64^x + 8^{x+1} + 2 = -8^{2x} + 8 \cdot 8^x + 2 = -(8^{2x} - 8 \cdot 8^x) + 2 = -(8^x - 4)^2 + 18$ ，

因 $-1 \leq x \leq 1$ ，故 $\frac{1}{8} \leq 8^x \leq 8$ ，

當 $8^x = 4$ 時， $f(x)$ 有最大值 18；

當 $8^x = 8$ 時， $f(x)$ 有最小值 2，故 $M+m = 20$

2. 指數方程式 $2^{1-2x^2} = (0.5)^{x^2-2x+2}$ 之所有實根的乘積為_____。

答案：-3

解析：原式化為 $2^{1-2x^2} = (2^{-1})^{x^2-2x+2}$ ，即 $2^{1-2x^2} = 2^{-x^2+2x-2}$ ，
故 $1-2x^2 = -x^2+2x-2$ ，整理得 $x^2+2x-3=0$ ，分解為 $(x+3)(x-1)=0$ ，
得 $x=-3$ 或 1 ，於是所有實根的乘積為-3。

3. 解下列方程式：

(1) $3^{2x+2} - 28 \times 3^x + 3 = 0$ ，得 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $2^{2x-1} - 3 \times 2^x - 8 = 0$ ，得 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案：(1) $x = -2$ 或 1 ；(2) 3

解析：(1) $9 \times 3^{2x} - 28 \times 3^x + 3 = 0 \Rightarrow (9 \times 3^x - 1)(3^x - 3) = 0 \Rightarrow 3^x = \frac{1}{9}$ 或 3 ，得 $x = -2$ 或 1

(2) $\frac{1}{2} \times 2^{2x} - 3 \times 2^x - 8 = 0 \Rightarrow 2^{2x} - 6 \times 2^x - 16 = 0 \Rightarrow (2^x - 8)(2^x + 2) = 0$

但 $2^x > 0 \Rightarrow 2^x - 8 = 0$ ，得 $x = 3$

4. 試求不等式 $(\frac{\pi}{3})^{2x^2+x+1} \geq (\frac{3}{\pi})^{2x-1}$ 之解為_____。

答案： $x \geq 0$ 或 $x \leq -\frac{3}{2}$

解析： $(\frac{\pi}{3})^{2x^2+x+1} \geq (\frac{3}{\pi})^{2x-1}$

$(\frac{\pi}{3})^{2x^2+x+1} \geq (\frac{\pi}{3})^{-2x+1}$

$\because \frac{\pi}{3} > 1 \quad \therefore 2x^2+x+1 \geq -2x+1$

$\Rightarrow 2x^2+3x \geq 0 \Rightarrow x(2x+3) \geq 0$

$\Rightarrow x \geq 0$ 或 $x \leq -\frac{3}{2}$

5. 不等式 $(\frac{1}{9})^{x-\frac{1}{2}} + 2(\frac{1}{3})^x > 1$ 之解為_____。

答案： $x < 1$

解析： $(\frac{1}{9})^{x-\frac{1}{2}} + 2(\frac{1}{3})^x > 1$

$\Rightarrow 3(3)^{-2x} + 2(3)^{-x} - 1 > 0$

$\Rightarrow (3 \cdot 3^{-x} - 1)(3^{-x} + 1) > 0$

$\Rightarrow 3^{-x} < -1, \frac{1}{3} < 3^{-x} \Rightarrow x < 1 (\because 3^{-x} > 0)$

6. 解不等式 $(\frac{1}{4})^{x^2-\frac{5}{2}x} > 0.125$ ，得其解為_____。

答案： $-\frac{1}{2} < x < 3$

解析：原式： $(\frac{1}{2})^{2x^2-5x} > \frac{1}{8} = (\frac{1}{2})^3 \quad \because 0 < \frac{1}{2} < 1$

$\therefore 2x^2-5x < 3 \Rightarrow (2x+1)(x-3) < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < 3$

7. 將 $y = 2^{x+1} - 1$ 的圖形沿著 x 軸正方向移動 p 單位，再沿著 y 軸正方向移動 q 單位之後的圖形方程式為 $y = 2^{x+3} + 2$ ，則數對 $(p, q) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案： $(-2, 3)$

解析： $(x+1)-p=x+3$ ， $(-1)+q=2 \Rightarrow p=-2$ ， $q=3$

$\therefore (p, q)=(-2, 3)$