

第 1 回 1-1 指數函數

班級：_____年_____班 座號：_____ 姓名：_____



一、單選題 (每題 6 分)

(D) 1. 下列哪一個選項的值最大?

- (A) $(\sqrt{3})^0$ (B) $(\frac{5}{2})^{-\sqrt{2}}$ (C) $(\frac{2}{5})^3$ (D) $(2.5)^{0.2}$ (E) $(0.4)^{2.5}$

解 $\because \frac{5}{2} = (\frac{5}{2})^{-1}$, \therefore 全部換成以 $\frac{5}{2}$ 為底數

- (A) $(\sqrt{3})^0 = 1 = (\frac{5}{2})^0$ (B) $(\frac{5}{2})^{-\sqrt{2}}$ (C) $(\frac{2}{5})^3 = (\frac{5}{2})^{-3}$ (D) $(2.5)^{0.2} = (\frac{5}{2})^{0.2}$ (E) $(0.4)^{2.5} = (\frac{2}{5})^{\frac{5}{2}} = (\frac{5}{2})^{-\frac{5}{2}}$

$\because \frac{5}{2} > 1$, $\therefore y = (\frac{5}{2})^x$ 遞增, 亦即指數越大值就越大, 故選(D)

(D) 2. 放射性物質重量變為原來的一半所需經過的時間, 稱為該物質的半衰期。今有一放射性物質, 在 1 年後剩下 256 公克, 而 100 年後剩下 32 公克, 則此放射性物質的半衰期為何?

- (A) 55 (B) 44 (C) 35 (D) 33 (E) 22 年

解 設此物質原本重 x 公克, 半衰期為 t 年

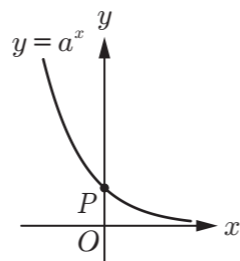
$$\text{則 } \begin{cases} x(\frac{1}{2})^{\frac{1}{t}} = 256 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x(\frac{1}{2})^{\frac{100}{t}} = 32 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}, \textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{ 得 } \frac{x(\frac{1}{2})^{\frac{1}{t}}}{x(\frac{1}{2})^{\frac{100}{t}}} = \frac{256}{32} \Rightarrow (\frac{1}{2})^{\frac{-99}{t}} = 8 \Rightarrow 2^{\frac{99}{t}} = 2^3 \Rightarrow \frac{99}{t} = 3 \Rightarrow t = 33, \text{ 故選(D)}$$



二、多選題 (每題 10 分, 錯一個得 6 分, 錯二個得 2 分, 其餘不給分)

(ACD) 3. 右圖為函數 $y = a^x$ 的部分圖形, 試選出正確的選項。

- (A) $0 < a < 1$ (B) 若 $(\frac{1}{3}, k)$ 為函數 $y = a^x$ 圖形上一點, 則 $k > 1$
 (C) 若 $(h, \frac{1}{\sqrt{a}})$ 為函數 $y = a^x$ 圖形上一點, 則 $h < 0$ (D) $a + a^3 > 2a^2$
 (E) $y = a^x$ 的圖形會與任一條水平線交於一點



解 (A) \circ : \because 函數 $y = a^x$ 的圖形為嚴格遞減, $\therefore 0 < a < 1$

(B) \times : \because 函數 $y = a^x$ 的圖形為嚴格遞減且 $\frac{1}{3} > 0$, $\therefore k = a^{\frac{1}{3}} < a^0 = 1$, 即 $k < 1$

(C) \circ : 將點 $(h, \frac{1}{\sqrt{a}})$ 代入函數 $y = a^x$, 得 $\frac{1}{\sqrt{a}} = a^h$, 即 $a^{-\frac{1}{2}} = a^h$, 因此 $h = -\frac{1}{2} < 0$

(D) \circ : 由凹口向上的性質得知, $\frac{a^1 + a^3}{2} > a^{\frac{1+3}{2}} = a^2$, $\therefore a + a^3 > 2a^2$

(E) \times : $\because y = a^x$ 的圖形恆在 x 軸上方, 若考慮水平線 $y = -1$, 則 $y = a^x$ 的圖形與該水平線沒有交點
 故選(A)(C)(D)

(ABC) 4. 若 $y = 2^x$ 之圖形為 Γ , $y = -2^{x+1}$ 之圖形為 A , $y = 8 \cdot 2^x - 1$ 之圖形為 B , $y = \frac{1}{4} \cdot 2^x + 1$ 之圖形為 C , $y = (\frac{1}{2})^{x-2}$ 之圖形為 D , $y = -\frac{1}{2} \cdot 2^x$ 的圖形為 E , 試選出正確的選項。

- (A) A 之圖形為 Γ 之圖形對 x 軸對稱, 再向左平移 1 單位
 (B) B 之圖形為 Γ 之圖形向左平移 3 單位, 向下平移 1 單位
 (C) C 之圖形為 Γ 之圖形向右平移 2 單位, 向上平移 1 單位
 (D) D 之圖形為 Γ 之圖形對 x 軸對稱, 再向右平移 2 單位
 (E) E 之圖形為 Γ 之圖形對 x 軸對稱, 再向左平移 1 單位

解 (A) \circ : 由 $y = 2^x$ 對 x 軸對稱到 $y = -2^x$, 再向左平移 1 單位到 $y = -2^{x+1}$

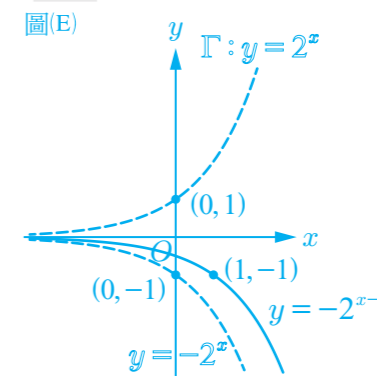
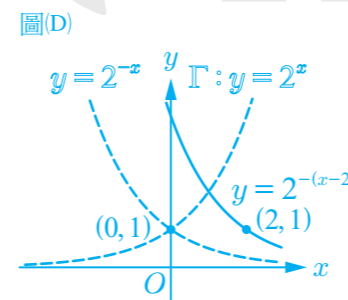
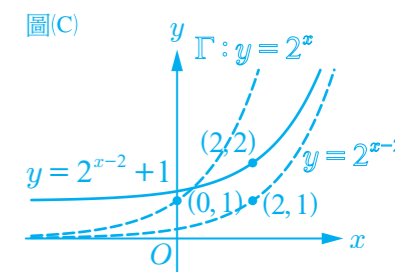
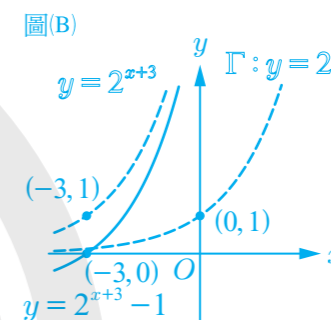
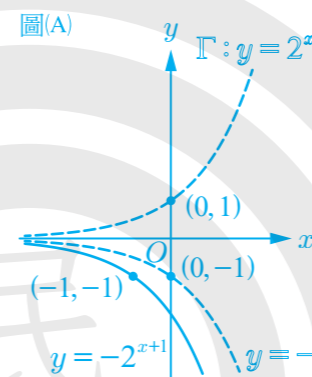
(B) \circ : $y = 8 \cdot 2^x - 1 = 2^{x+3} - 1$, 由 $y = 2^x$ 向左平移 3 單位到 $y = 2^{x+3}$, 再向下平移 1 單位到 $y = 2^{x+3} - 1$

(C) \circ : $y = \frac{1}{4} \cdot 2^x + 1 = 2^{x-2} + 1$, 由 $y = 2^x$ 向右平移 2 單位到 $y = 2^{x-2}$, 再向上平移 1 單位到 $y = 2^{x-2} + 1$

(D) \times : $y = (\frac{1}{2})^{x-2} = 2^{-(x-2)}$, 由 $y = 2^x$ 對 y 軸對稱到 $y = 2^{-x}$, 再向右平移 2 單位到 $y = 2^{-(x-2)}$

(E) \times : $y = -\frac{1}{2} \cdot 2^x = -2^{x-1}$, 由 $y = 2^x$ 對 x 軸對稱到 $y = -2^x$, 再向右平移 1 單位到 $y = -2^{x-1}$

故選(A)(B)(C)



(DE) 5. 設 x, y 皆為正數且 $x + y = 2$, 試選出 $3^x + 3^y$ 的可能值。

- (A) 14 (B) 12 (C) 10 (D) 8 (E) 6

解 $\because 3^x > 0, 3^y > 0$, 利用算幾不等式 $\frac{3^x + 3^y}{2} \geq \sqrt{3^x \cdot 3^y} = \sqrt{3^{x+y}} = \sqrt{3^2} = 3$, $\therefore 3^x + 3^y \geq 6$

又 $\because x > 0, y > 0$, $\therefore 3^x > 1, 3^y > 1$

$(3^x - 1)(3^y - 1) > 0 \Rightarrow 3^{x+y} - (3^x + 3^y) + 1 > 0 \Rightarrow 3^2 - (3^x + 3^y) + 1 > 0 \Rightarrow 3^x + 3^y < 10$

由前面得知 $6 \leq 3^x + 3^y < 10$

故選(D)(E)





三、填充題 (每格 7 分)

6. 方程式 $9^x + 9^{-x} = \frac{10}{3}$ 之解為 $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$ 。

解 將原式同乘 9^x 得 $(9^x)^2 + 1 = \frac{10}{3} \cdot 9^x \Rightarrow 3 \cdot (9^x)^2 - 10 \cdot 9^x + 3 = 0 \Rightarrow (3 \cdot 9^x - 1)(9^x - 3) = 0 \Rightarrow 9^x = \frac{1}{3}$ 或 $9^x = 3$

故 $x = -\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$

7. 姍姍將一百萬元存入銀行，年利率為 1.2% 的定期存款並以複利的方式計算。若一年複利計息一次，則一年後本利和為 P_1 ；半年複利計息一次，則一年後本利和為 P_2 ；四個月複利計息一次，則一年後本利和為 P_3 。那麼 P_1 、 P_2 及 P_3 的大小順序為 $P_1 < P_2 < P_3$ 。

解 由複利公式得知

$$P_1 = 10^6 \times (1 + 1.2\%) = 10^6 \times 1.012 = 1012000$$

$$P_2 = 10^6 \times (1 + \frac{1}{2} \times 1.2\%)^2 = 10^6 \times (1 + 0.006)^2 = 1012036$$

$$P_3 = 10^6 \times (1 + \frac{1}{3} \times 1.2\%)^3 = 10^6 \times (1 + 0.004)^3 \approx 1012048$$

$$\therefore P_1 < P_2 < P_3$$

8. 解 $2 \cdot 4^x - 17 \cdot 2^x + 8 \leq 0$ 。答： $-1 \leq x \leq 3$ 。

解 原式 $\Rightarrow 2 \cdot (2^x)^2 - 17 \cdot 2^x + 8 \leq 0 \Rightarrow (2 \cdot 2^x - 1)(2^x - 8) \leq 0$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq 2^x \leq 8 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$$

9. 兩函數 $y = 8^x$ 與 $y = \frac{1}{2} \times 4^x$ 的圖形交點坐標為 $(-1, \frac{1}{8})$ 。

解 $\begin{cases} y = 8^x \cdots \cdots \textcircled{1} \\ y = \frac{1}{2} \times 4^x \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

$$\therefore 8^x = \frac{1}{2} \times 4^x \Rightarrow 2^{3x} = 2^{2x-1} \Rightarrow 3x = 2x - 1 \Rightarrow x = -1, y = \frac{1}{8}$$

故交點為 $(-1, \frac{1}{8})$

10. 根據牛頓冷卻定律可知：如果物體的初始溫度為攝氏 a 度，當時的環境溫度為攝氏 b 度，設經過 t 小時後，物體的溫度為攝氏 $f(t)$ 度，則 $f(t) - b = (a - b) \cdot e^{-rt}$ ，其中 r 為與物體有關的一個常數， e 為自然常數。若將魚從冰箱冷凍庫 (-5°C) 拿出來在室溫 27°C 下解凍，過了一個小時後，其溫度約為 11°C ，則兩個小時後，魚的溫度大約為 19 $^\circ\text{C}$ 。

解 依題意，魚的初始溫度為攝氏 -5 度， $\therefore a = -5$ ；當時的室溫為攝氏 27 度， $\therefore b = 27$

$$f(1) - 27 = (-5 - 27) \cdot e^{-r} \Rightarrow 11 - 27 = (-5 - 27) \cdot e^{-r} \Rightarrow e^{-r} = \frac{1}{2}$$

$$f(2) - 27 = (-5 - 27) \cdot e^{-2r} \Rightarrow f(2) - 27 = (-32) \cdot (e^{-r})^2 \Rightarrow f(2) = 27 + (-32) \cdot (\frac{1}{2})^2 = 19$$

11. 根據過去長期統計資料顯示，保險業務員的年資 x (年) 與推銷成功的機率 $y(x)$ 有以下關係式：

$$y(x) = \frac{2^{-5+x}}{1 + 2^{-5+x}}$$

若某金融機構推出一保險方案，希望推銷成功的機率至少有 95% 時，則需要派出至少年資 10 (取整數) 年的業務員。

解 設需要派出至少年資 n 年的業務員

$$\text{依題意, } \frac{2^{-5+n}}{1 + 2^{-5+n}} \geq \frac{95}{100} \Rightarrow 100 \cdot 2^{-5+n} \geq 95 \cdot (1 + 2^{-5+n}) \Rightarrow 2^{-5+n} \geq 19$$

$$\therefore -5 + n \geq 5 \Rightarrow n \geq 10, \text{ 故所求為 } 10 \text{ 年}$$



四、混合題 (共 16 分)

12. 高雄市某公司下游有甲、乙兩個工廠，2011 年該公司從甲工廠獲得利潤 50 萬元，從乙工廠獲得利潤 800 萬元，根據市場調查預計以後每年上繳的利潤，甲工廠以翻一倍的速度遞增，而乙工廠則減為原來的一半，據估算該公司年收入達到 3000 萬元可維持生產，年收入達到 25000 萬元可以進行擴大再生產，試回答下列問題。

(1) 若以 2011 年為第一年，該公司從上述兩個工廠獲得利潤最少的一年是哪一年？(6 分)

(A) 2012 (B) 2013 (C) 2014 (D) 2015 (E) 2016

答：(B)。

(2) 承上題，該年該公司從這兩個工廠所獲利潤需另外籌集 2600 萬元才能維持生產。(4 分)

(3) 到 2020 年該公司能否依靠這兩個工廠進行擴大再生產？(6 分)

解 (1) 設該公司第 n 年從這兩個工廠獲得利潤為 $y_n = 50 \times 2^{n-1} + 800 \times (\frac{1}{2})^{n-1}$ ($n \geq 1$)

$$\text{由算幾不等式得知 } y_n \geq 2 \times \sqrt{50 \times 2^{n-1} \times 800 \times (\frac{1}{2})^{n-1}} = 400 \text{ (萬元)}$$

$$\text{當 } 50 \times 2^{n-1} = 800 \times (\frac{1}{2})^{n-1} \text{ 時, 即 } n = 3 \text{ 時, 等式成立}$$

\therefore 兩個工廠獲得利潤最少的一年是 2013 年，故選(B)

(2) 該年該公司從這兩個工廠所獲利潤需另外籌集 $3000 - 400 = 2600$ 萬元才能維持生產

(3) 2020 年為該公司第 10 年， $y_{10} = 50 \times 2^{10-1} + 800 \times (\frac{1}{2})^{10-1} > 50 \times 2^{10-1} = 25600 > 25000$ (萬元)

因此能依靠這兩個工廠進行擴大再生產