

第 1 回 1-1 指數函數

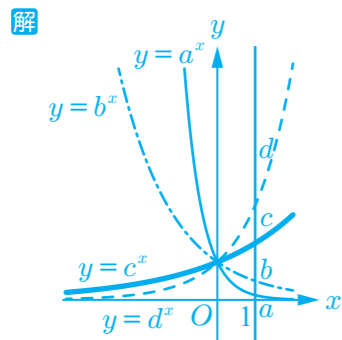
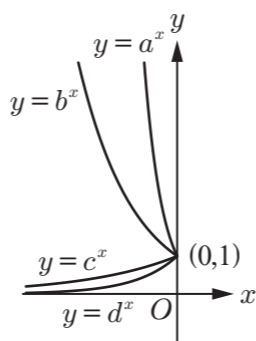
班級：_____年_____班 座號：_____ 姓名：_____

一、單選題 (每題 8 分)

(A) 1. 右圖為 $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$, $y=d^x$ 分別在 xy 平面上的部分圖形，則

a, b, c, d 四個數之間的大小關係為何？

- (A) $a < b < c < d$ (B) $a < b < d < c$ (C) $d < c < b < a$
 (D) $b < a < c < d$ (E) $c < d < b < a$



還原圖形並畫出 $x=1$ ，可看出 $a < b < c < d$ ，故選(A)

(C) 2. 將函數 $y=0.2^x$ 的圖形向左平移 2 單位，再向上平移 1 單位後，會與哪一個函數的圖形重合？

- (A) $y=25 \times 0.2^x + 1$ (B) $y=0.2^{x+2} - 1$ (C) $y=\frac{0.2^x + 25}{25}$
 (D) $y=\frac{0.2^x + 1}{25}$ (E) $y=\frac{0.2^x}{25} - 1$

解 將函數 $y=0.2^x$ 的圖形向左平移 2 單位，再向上平移 1 單位後可得函數為

$$y=0.2^{x+2} + 1 = 0.2^2 \times 0.2^x + 1 = \frac{0.2^x}{25} + 1 = \frac{0.2^x + 25}{25}, \text{ 故選(C)}$$

(A) 3. 已知 $a=3^{\frac{1}{2}}$, $b=4^{\frac{1}{3}}$, $c=5^{\frac{1}{4}}$ ，則 a, b, c 的大小關係為何？

- (A) $c < b < a$ (B) $a < b < c$ (C) $b < c < a$ (D) $a < c < b$ (E) $c < a < b$

解 $a=3^{\frac{1}{2}}=(3^6)^{\frac{1}{12}}=729^{\frac{1}{12}}$, $b=4^{\frac{1}{3}}=(4^4)^{\frac{1}{12}}=256^{\frac{1}{12}}$, $c=5^{\frac{1}{4}}=(5^3)^{\frac{1}{12}}=125^{\frac{1}{12}}$

$\therefore 125 < 256 < 729, \therefore 125^{\frac{1}{12}} < 256^{\frac{1}{12}} < 729^{\frac{1}{12}} \Rightarrow c < b < a$ ，故選(A)

(B) 4. 滿足不等式 $2^{x^2-3x-12} < (0.5)^{2x+6}$ 的整數解共有幾個？

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

解 $2^{x^2-3x-12} < (0.5)^{2x+6} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x-12} < 2^{-(2x+6)} \Leftrightarrow x^2-3x-12 < -2x-6$

$$\Leftrightarrow x^2-x-6 < 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 3$$

$\therefore x$ 為整數， $\therefore x=-1, 0, 1, 2$ ，即共有 4 個整數解，故選(B)

二、多選題 (每題 10 分，錯一個得 6 分，錯二個得 2 分，其餘不給分)

(AE) 5. 已知函數 $y=a^x+b$ 的部分圖形如圖所示，試選出正確的選項。

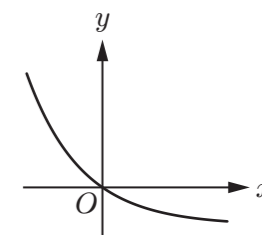
- (A) $0 < a < 1$ (B) $a > 1$ (C) $b = 1$
 (D) $0 < b < 1$ (E) 函數 $y=a^x+b$ 圖形有漸近線 $y=-1$

解 (A) (B) \because 函數圖形嚴格遞減， $\therefore 0 < a < 1$

(C) (D) \because 函數 $y=a^x+b$ 圖形通過 $(0, 0)$ ， $\therefore b=-1$

(E) \because 函數 $y=a^x+b$ 圖形有漸近線 $y=-1$

故選(A)(E)



(ABDE) 6. 若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，關於 $y=a^x$ 的函數圖形，試選出正確的選項。

- (A) 凹口必向上 (B) 必通過點 $(0, 1)$ (C) 與直線 $y=-\sqrt{2}$ 恰有一個交點
 (D) 與直線 $x=-\sqrt{2}$ 恰有一個交點 (E) 與 $y=(\frac{1}{a})^x$ 的函數圖形必對稱於 y 軸

解 (A) (B) $y=f(x)$ 的圖形凹口必向上，且通過點 $(0, 1)$

(C) \because 圖形恆在 x 軸上方， \therefore 與直線 $y=-\sqrt{2}$ 不會有任何交點

(D) \because 函數 $y=a^x$ 的定義域為所有實數，且圖形必為遞增或遞減
 \therefore 與直線 $x=-\sqrt{2}$ 恰有一個交點

(E) $y=a^x$ 的函數圖形與 $y=(\frac{1}{a})^x$ 的函數圖形必對稱於 y 軸

故選(A)(B)(D)(E)





三、填充題 (每格 8 分)

7. 試解下列指數方程式：

(1) 若 $25^x = 5\sqrt{5}$ ，則 $x = \underline{\frac{3}{4}}$ 。

(2) 若 $9^x - 6 \times 3^x - 27 = 0$ ，則 $x = \underline{2}$ 。

解 (1) $25^x = 5\sqrt{5} \Rightarrow (5^2)^x = 5 \times 5^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 5^{2x} = 5^{1+\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

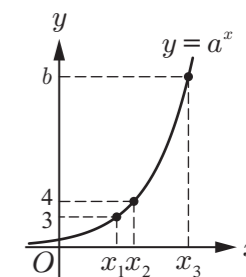
(2) $(3^x)^2 - 6 \times 3^x - 27 = 0 \Rightarrow (3^x + 3)(3^x - 9) = 0 \Rightarrow 3^x = -3$ 或 9 (負不合)，故 $x = 2$

8. 不等式 $3^x + 3^{2-x} - 10 < 0$ 的實數解為 $\underline{0 < x < 2}$ 。

解 $3^x + 3^{2-x} - 10 < 0 \Leftrightarrow (3^x + 3^{2-x} - 10) \times 3^x < 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 10 \times (3^x) + 9 < 0$
 $\Leftrightarrow (3^x - 9)(3^x - 1) < 0 \Leftrightarrow 1 < 3^x < 9 \Leftrightarrow 0 < x < 2$

9. 已知函數 $y = a^x$ 圖形如圖所示，若 $x_3 = 2x_1 + x_2$ ，則 $b = \underline{36}$ 。

解 $b = a^{x_3} = a^{2x_1 + x_2} = (a^{x_1})^2 \times a^{x_2} = 3^2 \times 4 = 36$



10. 曲線 $y = a^x$ 的部分圖形與 x 軸的關係如圖所示，其中 A, B, C 為 x 軸上的相異三點，且 $\overline{AB} = \overline{BC}$ ，過 A, B, C 三點分別作 x 軸的垂線，並交曲線 $y = a^x$ 的圖形於 D, E, F 三點。

(1) 若 B 為原點，則 $\overline{AD} \times \overline{CF} = \underline{1}$ 。

(2) 若 $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$ 且 $\overline{AD} = 4, \overline{CF} = 9$ ，則 $a = \underline{\frac{3}{2}}$ 。

解 (1) 設 $A(-d), B(0), C(d)$ ， $\overline{AD} \times \overline{CF} = a^{-d} \times a^d = a^0 = 1$

(2) 設 $A(k-1), B(k), C(k+1)$

可知 $a^{k-1} = 4$ 且 $a^{k+1} = 9 \Rightarrow \frac{a^{k+1}}{a^{k-1}} = \frac{9}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{3}{2}$ (負不合)

