第一學期普高數學

老師：________ 班級：________ 座號：______ 姓名：__________

分數欄

一、單一選擇題(共 0 分,每題 0 分)

1. (B)設 $a=\sqrt{5}, b=\sqrt[4]{24}, c=\sqrt[3]{11}$ ，則下列何者為真？ (A) $a>b>c$ (B) $a>c>b$ (C) $c>b>a$ (D) $c>a>b$ (E) $b>c>a$

解析： $a=\sqrt{5}=\sqrt[4]{25}>\sqrt[4]{24}=b$

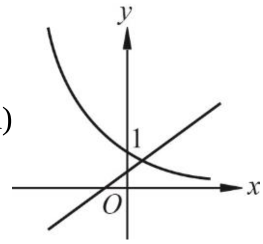
$a=\sqrt{5}=\sqrt[6]{125}>\sqrt[6]{121}=\sqrt[3]{11}=c$

$b=\sqrt[4]{24}=\sqrt[12]{24^3}=\sqrt[12]{13824}$

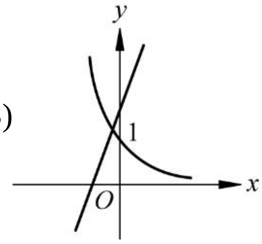
$c=\sqrt[3]{11}=\sqrt[12]{11^4}=\sqrt[12]{14641}$

$\therefore a>c>b$ ，故選(B)

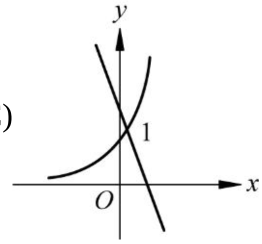
2. (A)當 $a\neq 0$ ，函數 $y=ax+b$ 與 $y=b^{ax}$ 的圖形為 (A)



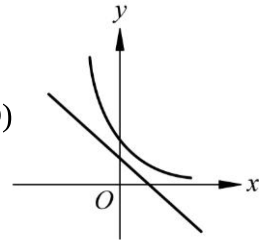
(B)



(C)

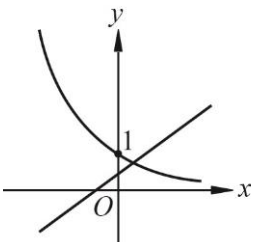


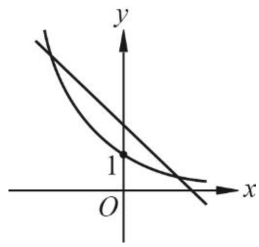
(D)



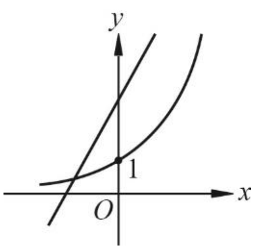
解析：先判斷直線的斜率與截距，再判斷指數的圖形

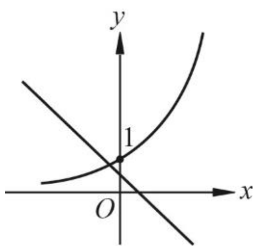
1° $a>0, 0<b<1$ 3° $a<\ 0b,>$





2° $a>0, b>1$ 4° $a<0, 0<b<1$





故選(A)

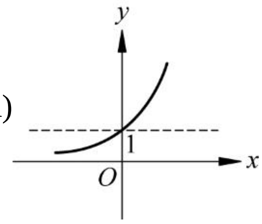
3. (D)若 $a=(0.5)^{0.5}$ ，下列何者正確？ (A) $a<0.5$ (B) $0.5\le a<0.6$ (C) $0.6\le a<0.7$ (D) $0.7\le a<0.8$ (E) $a\ge 0.8$

解析：$a=(0.5)^{0.5}=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$

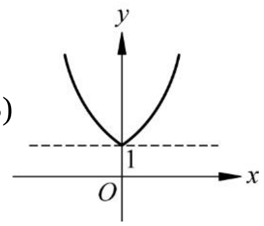
$=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\doteq\frac{1.414}{2}=0.707$

$\therefore 0.7\le a<0.8$，故選(D)

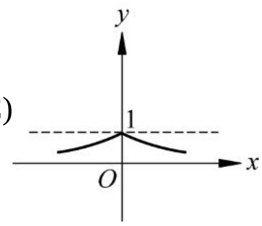
4. (B) 函數 $y=2^{|x|}$ 的圖形是圖中的哪一個？ (A)



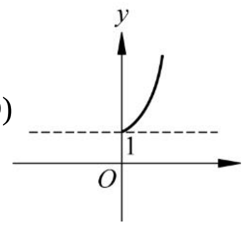
(B)



(C)



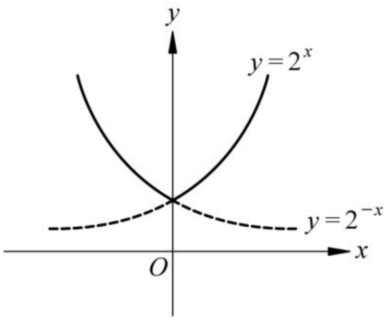
(D)



解析：$1^\circ\ x\ge 0\Rightarrow y=2^x$

$2^\circ\ x<0\Rightarrow y=2^{-x}$

如圖，故選(B)



5. (D) 已知 $a>0,\ a\ne 1,\ b>0,\ b\ne 1$，若函數 $y=a^x$ 的圖形與函數 $y=b^x$ 的圖形對稱於 y 軸，則下列何者正確？ (A) $a>b$ (B) $a=b$ (C) $a<b$ (D) $ab=1$ (E)無法判斷

解析：$\because y=a^x$ 和 $y=b^x$ 之圖形對稱於 y 軸

$\therefore a^x=b^{-x}\Rightarrow a^x=\frac{1}{b^x}$

$\Rightarrow (ab)^x=1$

$\Rightarrow ab=1$

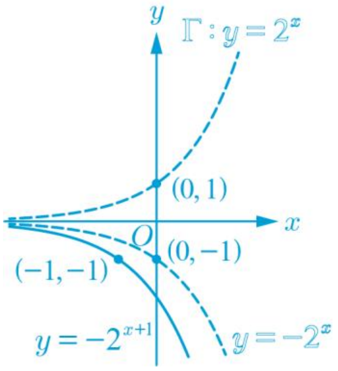
故選(D)

二、多重選擇題(共 0 分,每題 0 分)

1. (ABC)若 $y=2^x$ 之圖形為 Γ，$y=-2^{x+1}$ 之圖形為 A，$y=8\cdot 2^x-1$ 之圖形為 B，$y=\frac{1}{4}\cdot 2^x+1$ 之圖形為 C，$y=(\frac{1}{2})^{x-2}$ 之圖形為 D，$y=-\frac{1}{2}\cdot 2^x$ 的圖形為 E，試選出正確的選項。 (A)A 之圖形為 Γ 之圖形對 x 軸對稱，再向左平移 1 單位 (B)B 之圖形為 Γ 之圖形向左平移 3 單位，向下平移 1 單位 (C)C 之圖形為 Γ 之圖形向右平移 2 單位，向上平移 1

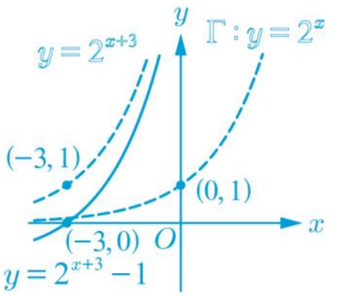
單位　(D)D 之圖形為 Γ 之圖形對 x 軸對稱，再向右平移 2 單位　(E)E 之圖形為 Γ 之圖形對 x 軸對稱，再向左平移 1 單位

解析：(A)○：由 $y=2^x$ 對 x 軸對稱到 $y=-2^x$，再向左平移 1 單位到 $y=-2^{x+1}$



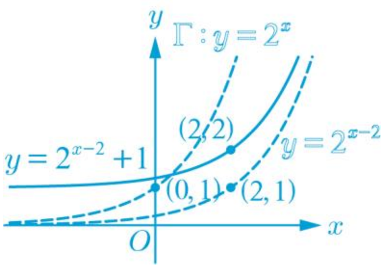
(B)○：$y=8\cdot 2^x-1=2^{x+3}-1$

由 $y=2^x$ 向左平移 3 單位到 $y=2^{x+3}$，再向下平移 1 單位到 $y=2^{x+3}-1$



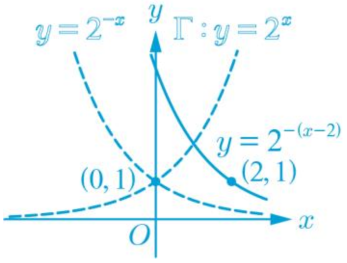
(C)○：$y=\frac{1}{4}\cdot 2^x+1=2^{x-2}+1$

由 $y=2^x$ 向右平移 2 單位到 $y=2^{x-2}$，再向上平移 1 單位到 $y=2^{x-2}+1$



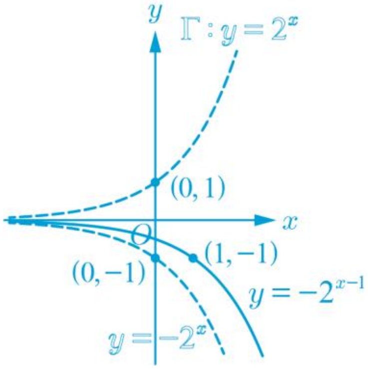
(D)×：$y=(\frac{1}{2})^{x-2}=2^{-(x-2)}$

由 $y=2^x$ 對 y 軸對稱到 $y=2^{-x}$，再向右平移 2 單位到 $y=2^{-(x-2)}$



(E)×：$y=-\frac{1}{2}\cdot 2^x=-2^{x-1}$

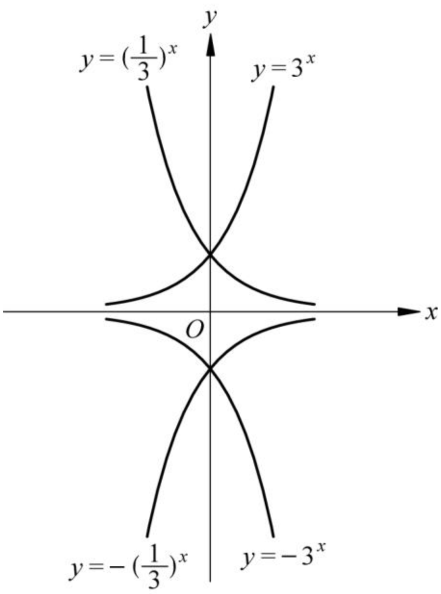
由 $y=2^x$ 對 x 軸對稱到 $y=-2^x$，再向右平移 1 單位到 $y=-2^{x-1}$



故選(A)(B)(C)

2. (AB CD)下列敘述何者正確？ (A) $y=3^x$ 與 $y=(\frac{1}{3})^x$ 的圖形對稱於 y 軸 (B) $y=3^x$ 與 $y=-3^x$ 的圖形對稱於 x 軸 (C) $y=3^x$ 與 $y=-(\frac{1}{3})^x$ 的圖形對稱於原點 (D)若 $a>0, a\neq 1$，則 $y=a^x$ 的圖形都是凹口向上 (E)若 $a>0, a\neq 1$，則 $y=a^x$ 的圖形恆過(1, 0)

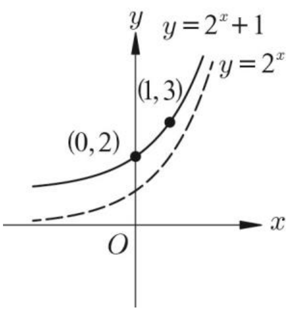
解析：



(E)×：應過(0,1)

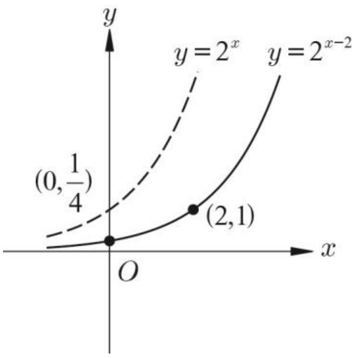
3. (BC D)下列何者為真？ (A) $y=2^x+1$ 的圖形是 $y=2^x$ 的圖形向下平移 1 單位 (B) $y=\frac{1}{4}\cdot 2^x$ 的圖形是 $y=2^x$ 的圖形向右平移 2 單位 (C) $y=2^{x-2}+1$ 的圖形是 $y=\frac{1}{4}\cdot 2^x$ 的圖形向上平移 1 單位 (D) $y=(\frac{1}{2})^x$ 的圖形與 $y=2^x$ 的圖形對稱於 y 軸 (E) $y=4\cdot 2^x-1$ 的圖形是 $y=2^x$ 的圖形向右平移 2 單位，向下平移 1 單位所得

解析：(A)

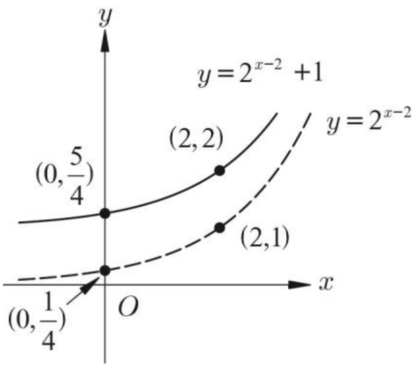


應為向上

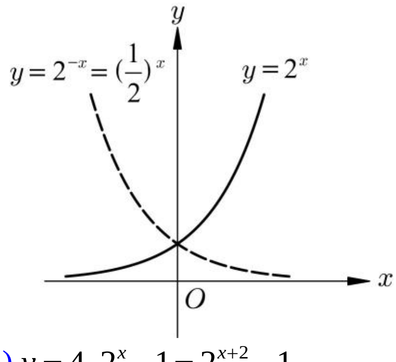
(B) $y=\dfrac{1}{4}\cdot 2^{x}=2^{x-2}$



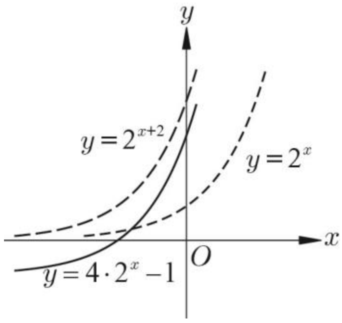
(C) $y=\dfrac{1}{4}\cdot 2^{x}=2^{-2}\cdot 2^{x}=2^{x-2}$



(D)



(E) $y=4\cdot 2^{x}-1=2^{x+2}-1$



$y=4\cdot 2^x-1$的圖形應為$y=2^x$向左平移 2 單位，向下平移 1 單位
故選(B)(C)(D)

三、填充題(共 0 分,每題 0 分)

1. $9^{-\frac{5}{2}}\times 8^{\frac{1}{3}}\div\sqrt{81^{-3}}=$________.

答案：6

解析：原式$=3^{-5}\times 2\div 9^{-3}$

$=3^{-5}\times 2\times 3^{6}$

$=3\times 2$

$=6$

2. 方程式$9^x-24\cdot 3^{x-1}-9=0$之解為________.

答案：2

解析：$(3^x)^2-8\cdot 3^x-9=0\Rightarrow(3^x-9)(3^x+1)=0$

$\Rightarrow 3^x=9,\ -1$(-1不合)

$\therefore x=2$

3. 試解：$2^{x+2}-2^{-x}=-3$，則$x=$________.

答案：-2

解析：$2^2\cdot 2^x+3-2^{-x}=0$

$\Rightarrow 4\cdot(2^x)^2+3\cdot 2^x-1=0$

$\Rightarrow(4\cdot 2^x-1)(2^x+1)=0$

$\Rightarrow 2^x=\dfrac{1}{4}$($-1$不合)

$\Rightarrow x=-2$

4. 函數$y=2^{3-x}+2^{1+x}$的最小值為________，又此時x之值為________.

答案：8, 1

解析：$\because\ \dfrac{2^{3-x}+2^{1+x}}{2}\geq\sqrt{2^{3-x}\cdot 2^{1+x}}\Rightarrow\dfrac{y}{2}\geq\sqrt{2^4}=4\Rightarrow y\geq 8$

$\therefore$ y之最小值為 8

$2^{3-x}=2^{1+x}\Rightarrow\dfrac{8}{2^x}=2\cdot 2^x\Rightarrow(2^x)^2=4\Rightarrow 2^x=2\Rightarrow x=1$

5. 化簡：$\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b-b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=$________.

答案：$a+b$

解析：原式$=\dfrac{(a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}})-(ab^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}b)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$

$=\dfrac{(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b)-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$

$=a+b+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$

$=a+b$

6. $\sqrt{3}\times\sqrt[4]{6}\times\dfrac{1}{\sqrt[4]{540}}\times\sqrt[4]{10}=$________.

答案：1

解析：原式$=\sqrt[4]{9}\times\sqrt[4]{\dfrac{6\times10}{540}}=\sqrt[4]{9}\times\dfrac{1}{\sqrt[4]{9}}=1$

7. (1)不等式$5(\sqrt{5})^x<\sqrt[3]{25}$之解為________.

(2)不等式$4^x-17\cdot2^{x-1}+4<0$之解為________.

答案：(1) $x<-\dfrac{2}{3}$　(2) $-1<x<3$

解析：(1) $5(5^{\frac{1}{2}})^x<5^{\frac{2}{3}}\Rightarrow5^{1+\frac{x}{2}}<5^{\frac{2}{3}}$

$\therefore1+\dfrac{x}{2}<\dfrac{2}{3}\Rightarrow\dfrac{x}{2}<-\dfrac{1}{3}\Rightarrow x<-\dfrac{2}{3}$

(2) $(2^x)^2-\dfrac{17}{2}2^x+4<0\Rightarrow2(2^x)^2-17\cdot2^x+8<0$

$\Rightarrow(2\cdot2^x-1)(2^x-8)<0$

$\Rightarrow\dfrac{1}{2}<2^x<8$

$\Rightarrow2^{-1}<2^x<2^3$

$\therefore-1<x<3$

8. 不等式$(\sqrt[3]{9})^x-12(\sqrt[3]{3}^x)+27\le0$之解為________.

答案：$3\le x\le6$

解析：原式$=(\sqrt[3]{3}^x)^2-12(\sqrt[3]{3}^x)+27\le0$

$\Rightarrow(\sqrt[3]{3}^x-3)(\sqrt[3]{3}^x-9)\le0$

$\Rightarrow3\le\sqrt[3]{3}^x\le9$

$\Rightarrow3\le(3^x)^{\frac{1}{3}}\le9$

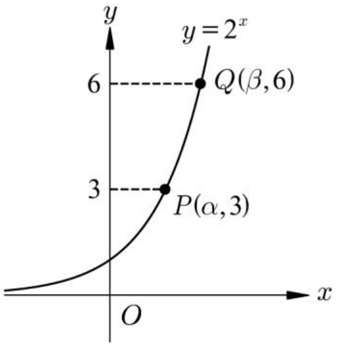
$\Rightarrow3^3\le3^x\le3^6$

$\Rightarrow3\le x\le6$

9. 二直線$y=3$與$y=6$分別交函數$y=2^x$於P, Q二點，則$\overline{PQ}$之斜率為________.

答案：3

解析：



設 $P(\alpha,3),\ Q(\beta,6)$

即 $\begin{cases} 2^{\alpha}=3\cdots\cdots① \\ 2^{\beta}=6\cdots\cdots② \end{cases}$

$m_{\overline{PQ}}=\dfrac{6-3}{\beta-\alpha}$

又 $\dfrac{②}{①}$ 得 $\dfrac{2^{\beta}}{2^{\alpha}}=\dfrac{6}{3}\Rightarrow 2^{\beta-\alpha}=2\Rightarrow \beta-\alpha=1$

$\therefore m_{\overline{PQ}}=\dfrac{3}{1}=3$

10. 兩函數 $y=8^x$ 與 $y=\dfrac{1}{2}\times 4^x$ 的圖形交點坐標為______。

答案：$(-1,\ \dfrac{1}{8})$

解析：$\begin{cases} y=8^x\cdots\cdots① \\ y=\dfrac{1}{2}\times 4^x\cdots\cdots② \end{cases}$

$\therefore 8^x=\dfrac{1}{2}\times 4^x\Rightarrow 2^{3x}=2^{2x-1}\Rightarrow 3x=2x-1\Rightarrow x=-1, y=\dfrac{1}{8}$

故交點為 $(-1,\ \dfrac{1}{8})$

11. 若 $2^x=7^y=196$，則 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=$________.

答案：$\dfrac{1}{2}$

解析：$\begin{cases} 2^x=196\Rightarrow 196^{\frac{1}{x}}=2\cdots\cdots① \\ 7^y=196\Rightarrow 196^{\frac{1}{y}}=7\cdots\cdots② \end{cases}$

①×②得 $196^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=14=196^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$

12. 試解： $3^{x+2}-3^{2-x}=80$ ，則 $x=$________.

答案：2

解析：$3^2\cdot 3^x-80-3^2\cdot 3^{-x}=0$

等號左右同乘 3^x 得 $9(3^x)^2-80\cdot 3^x-9=0$

$\Rightarrow (9\cdot 3^x+1)(3^x-9)=0$

$\Rightarrow 3^x=9\ (-\frac{1}{9}$ 不合)

故 $x=2$

四、計算與證明題(共 0 分,每題 0 分)

1. 若 x,y 為整數，則 $2^{2x}-3^{2y}=-17$ 之解為何？

答案：$(2^x)^2-(3^y)^2=-17$

$\Rightarrow (2^x+3^y)(2^x-3^y)=-17$

$\Rightarrow$

2^x+3^y	17	1
2^x-3^y	-1	-17

$\Rightarrow$

2^x	8	-8
3^y	9	9

，$\begin{cases}2^x=-8\\ 3^y=9\end{cases}$(不合)

$\therefore x=3, y=2$

2. 試化簡下列各式：

(1) $(x^{-1}-y)\div(x^{-\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})$.

(2) $(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-1+a^{-\frac{2}{3}})$.

(3) $(a^{\frac{x}{2}}+a^{-\frac{x}{2}})^2-(a^{\frac{x}{2}}-a^{-\frac{x}{2}})^2$.

答案：(1) $\dfrac{x^{-1}-y}{x^{-\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{(x^{-\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{-\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})}{x^{-\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}=x^{-\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$

(2)原式 $=(a^{\frac{1}{3}})^3+(a^{-\frac{1}{3}})^3=a+a^{-1}$

(3)原式 $=(a^x+2\cdot a^{\frac{x}{2}}\cdot a^{-\frac{x}{2}}+a^{-x})-(a^x-2\cdot a^{\frac{x}{2}}\cdot a^{-\frac{x}{2}}+a^{-x})$

$=4a^{\frac{x}{2}}\cdot a^{-\frac{x}{2}}$

$=4\cdot 1=4$

3. (1) $a=0.5^3,\ b=0.5^{-1},\ c=0.5^{\frac{5}{2}},\ d=2^{-\frac{10}{3}}$，試比較 a, b, c, d 之大小.

(2) $a=1.2^2,\ b=1.2^{\frac{7}{2}},\ c=(\frac{5}{6})^{\frac{-7}{3}},\ d=1.2^{-\frac{1}{3}},\ e=1.2^{-3}$，試比較 a, b, c, d, e 之大小.

答案：(1)當 $0<u<1$ 時，$y=a^x$ 為遞減

$a=0.5^3$

$b=0.5^{-1}$

$c=0.5^{2.5}$

$d=2^{-\frac{10}{3}}=(2^{-1})^{\frac{10}{3}}=0.5^{\frac{10}{3}}$

$\because -1<2.5<3<\dfrac{10}{3}$

$\therefore b>c>a>d$

(2)當 $u>1$ 時，$y=u^x$ 為遞增

$a=1.2^2$

$b=1.2^{3.5}$

$c=1.2^{\frac{7}{3}}$

$d=1.2^{-\frac{1}{3}}$

$e=1.2^{-3}$

$\because 3.5>\dfrac{7}{3}>2>-\dfrac{1}{3}>-3$

$\therefore b>c>a>d>e$

4. 若 $a^{2x}=\sqrt{2}+1$，試求：(1) $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$；(2) $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$.

答案：(1) $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{(a^x)^3+(a^{-x})^3}{a^x+a^{-x}}$

$$=\frac{(a^x+a^{-x})[(a^x)^2-a^xa^{-x}+(a^{-x})^2]}{a^x+a^{-x}}$$

$$=a^{2x}-1+a^{-2x}$$

$$=(\sqrt{2}+1)-1+\frac{1}{(\sqrt{2}+1)}$$

$$=\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)$$

$$=2\sqrt{2}-1$$

(2)原式 $=\dfrac{a^{3x}+\dfrac{1}{a^{3x}}}{a^x-\dfrac{1}{a^x}}$

$$=\frac{a^{6x}+1}{a^{4x}-a^{2x}}$$

$$=\frac{(a^{2x})^3+1}{a^{2x}(a^{2x}-1)}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+1)^3+1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1-1)}$$

$$=\frac{8+5\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(8+5\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{6+2\sqrt{2}}{2}$$

$$=3+\sqrt{2}$$

5. 試解方程式 $9^{x+1}-244\cdot 3^x+27=0$.

答案：令 $3^x = Y(>0)$

則 $9Y^2 - 244Y + 27 = 0$

$\Rightarrow (Y-27)(9Y-1) = 0$

$\Rightarrow Y = 27$ 或 $\frac{1}{9}$

$\therefore 3^x = 27$ 或 $\frac{1}{9}$

即 $3^x = 3^3$ 或 3^{-2}

故 $x = 3$ 或 -2