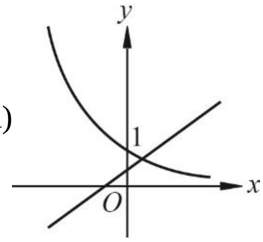
第一學期普高數學

老師：________ 班級：________ 座號：______ 姓名：__________

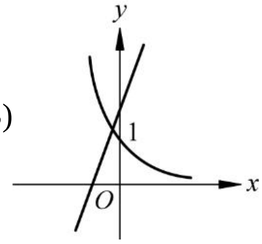
分數欄

一、單一選擇題(共 0 分,每題 0 分)

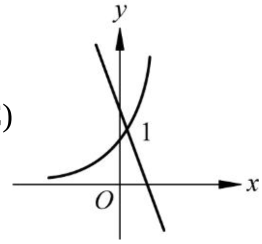
1. (A) 當 $a \neq 0$，函數 $y = ax + b$ 與 $y = b^{ax}$ 的圖形為 (A)



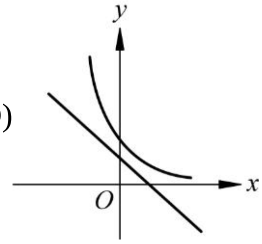
(B)



(C)

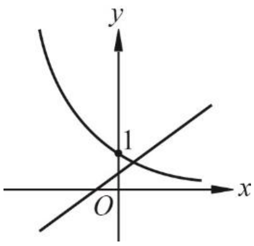


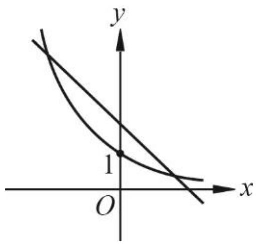
(D)



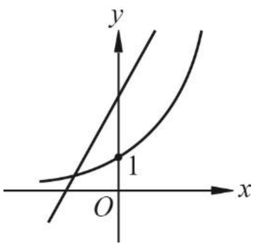
解析：先判斷直線的斜率與截距，再判斷指數的圖形

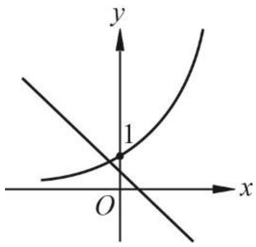
1° $a > 0, 0 < b < 1$ 3° $a < \ 0b, >$





2° $a > 0, b > 1$ 4° $a < 0, 0 < b < 1$





故選(A)

2. (B) $(\sqrt[3]{\sqrt[6]{a^9}})^4 \cdot (\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^9}})^4 =$? (A) a^2 (B) a^4 (C) a^8 (D) a^{16} (E) a^{32}

解析：原式 $= (((a^9)^{\frac{1}{6}})^{\frac{1}{3}})^4 \cdot (((a^9)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{6}})^4$

$= a^2 \cdot a^2$

$= a^4$

故選(B)

3. (C) 若函數 $y = (a^2 - 1)^x$ 在實數上為遞減函數，則 a 之範圍為何？ (A) $|a| < 1$ (B) $1 < |a| < 2$ (C) $1 < |a| < \sqrt{2}$ (D) $1 < a < \sqrt{2}$ (E) $-1 < a < \sqrt{2}$

解析：$0 < a^2 - 1 < 1$

$\Rightarrow 1 < a^2 < 2$

$\Rightarrow 1 < |a| < \sqrt{2}$

故選(C)

4. (B) 滿足不等式 $2^{x^2-3x-12} < (0.5)^{2x+6}$ 的整數解共有幾個？ (A)3 (B)4 (C)5 (D)6 (E)7

解析：$2^{x^2-3x-12} < (0.5)^{2x+6} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x-12} < 2^{-(2x+6)} \Leftrightarrow x^2-3x-12 < -2x-6$

$\Leftrightarrow x^2-x-6<0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2)<0 \Leftrightarrow -2<x<3$

$\because x$ 為整數，$\therefore x=-1,0,1,2$，即共有 4 個整數解，故選(B)

5. (E) 下列不等式中，何者正確？ (A) $(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} < (\frac{1}{5})^{\frac{2}{3}} < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$ (B) $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} < (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} < (\frac{1}{5})^{\frac{2}{3}}$ (C) $(\frac{1}{5})^{\frac{2}{3}} < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} < (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}$ (D) $(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} < (\frac{1}{5})^{\frac{2}{3}}$ (E) $(\frac{1}{5})^{\frac{2}{3}} < (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$

解析：$\because y=(\frac{1}{2})^x$ 在實數上遞減

$\therefore (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} > (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}$

又 $\dfrac{(\frac{1}{5})^{\frac{2}{3}}}{(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}} = (\frac{2}{5})^{\frac{2}{3}} < 1$，$\therefore (\frac{1}{5})^{\frac{2}{3}} < (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}$

則 $(\frac{1}{5})^{\frac{2}{3}} < (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$

故選(E)

二、多重選擇題(共 0 分,每題 0 分)

1. (AC) 若 $a>0$，則下列何者正確？ (A) $\dfrac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}} = a^{\frac{3}{4}}$ (B) $\sqrt{\dfrac{a\sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{a}}} = a$ (C) $(\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^5}})^3 = a^{-2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^3\sqrt{a}}} = a^{\frac{5}{4}}$ (E) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{a\sqrt{a}}}} = a^{\frac{3}{8}}$

解析：(A)○：原式 $= \dfrac{\sqrt{a\sqrt{a\cdot a^{\frac{1}{2}}}}}{\sqrt[8]{a}} = \dfrac{[a\cdot\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}]^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{8}}} = \dfrac{[a\cdot a^{\frac{3}{4}}]^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{8}}} = \dfrac{(a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{8}}} = a^{\frac{7}{8}-\frac{1}{8}} = a^{\frac{3}{4}}$

(B)×：原式 $= \sqrt{\dfrac{a\cdot a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}} = [\dfrac{a^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}]^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{15-2}{6}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{13}{12}}$

(C)○：原式$=(\frac{a}{a^{\frac{5}{3}}})^3=(a^{-\frac{2}{3}})^3=a^{-2}$

(D)×：原式$=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^3\cdot a^{\frac{1}{2}}}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}}{(a^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{2}}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{7}{4}}}=a^{\frac{2-7}{4}}=a^{-\frac{5}{4}}$

(E)×：原式$=\frac{1}{[\sqrt{a\cdot a^{\frac{1}{2}}}]^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{4}}}=a^{-\frac{3}{8}}$

故選(A)(C)

2. (DE)設x,y皆為正數且$x+y=2$，試選出3^x+3^y的可能值。 (A)14 (B)12 (C)10 (D)8 (E)6

解析：$\because 3^x>0,3^y>0$，利用算幾不等式$\frac{3^x+3^y}{2}\geq\sqrt{3^x\cdot 3^y}=\sqrt{3^{x+y}}=\sqrt{3^2}=3$，$\therefore 3^x+3^y\geq 6$

又$\because x>0,y>0$，$\therefore 3^x>1,3^y>1$

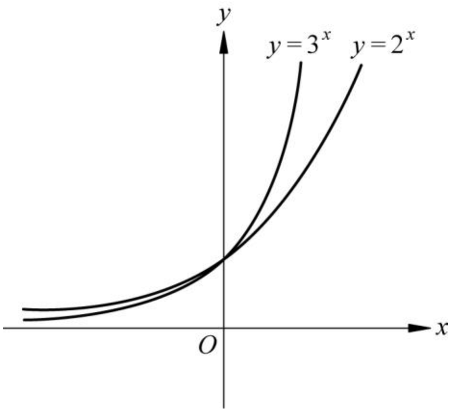
$(3^x-1)(3^y-1)>0\Rightarrow 3^{x+y}-(3^x+3^y)+1>0\Rightarrow 3^2-(3^x+3^y)+1>0\Rightarrow 3^x+3^y<10$

由前面得知$6\leq 3^x+3^y<10$

故選(D)(E)

3. (AD)設$y=2^x$的圖形為S，$y=3^x$的圖形為T，則 (A)S、T兩圖形恰交於一點 (B)S恆在T的下方 (C)S恆在T的上方 (D)S、T均為凹口向上 (E)S、T與任一條水平線皆相交

解析：如圖：



故選(A)(D)

三、填充題(共 0 分,每題 0 分)

1. 若$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$，則$\frac{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+2}{a^2+a^{-2}+3}=$________.

答案：$\frac{2}{5}$

解析：$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=a+2\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1}$

$\Rightarrow 9=a+2+a^{-1}$

$\Rightarrow a+a^{-1}=7$

$(a+a^{-1})^2=a^2+2aa^{-1}+a^{-2}$

$\Rightarrow 49=a^2+2+a^{-2}$

$\Rightarrow a^2+a^{-2}=47$

$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^3=a^{\frac{3}{2}}+3a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})+a^{-\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow 27=a^{\frac{3}{2}}+3\cdot 1\cdot 3+a^{-\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=27-9=18$

所求$=\dfrac{18+2}{47+3}=\dfrac{20}{50}=\dfrac{2}{5}$

2. 姍姍將一百萬元存入銀行，年利率為 1.2%的定期存款並以複利的方式計算。若一年複利計息一次，則一年後本利和為 P_1；半年複利計息一次，則一年後本利和為 P_2；四個月複利計息一次，則一年後本利和為 P_3。那麼 P_1、P_2 及 P_3 的大小順序為______。

答案：$P_1<P_2<P_3$

解析：由複利公式得知

$P_1=10^6\times(1+1.2\%)=10^6\times 1.012=1012000$

$P_2=10^6\times(1+\dfrac{1}{2}\times 1.2\%)^2=10^6\times(1+0.006)^2=1012036$

$P_3=10^6\times(1+\dfrac{1}{3}\times 1.2\%)^3=10^6\times(1+0.004)^3\approx 1012048$

$\therefore P_1<P_2<P_3$

3. 若 $-1\le x\le 0,\ y=2^{x+2}-3\cdot 4^x$，則 y 之最大值為________，最小值為________.

答案：$\dfrac{4}{3}$, 1

解析：$y=4\cdot 2^x-3\cdot(2^x)^2$

$=-3[(2^x)^2-\dfrac{4}{3}\cdot(2^x)]$

$=-3[(2^x)^2-\dfrac{4}{3}(2^x)+\dfrac{4}{9}]+\dfrac{4}{3}$

$=-3(2^x-\dfrac{2}{3})^2+\dfrac{4}{3}$

當 $2^x=\dfrac{2}{3}$, y 有最大值 $\dfrac{4}{3}$

$-1\le x\le 0\Rightarrow 2^{-1}\le 2^x\le 2^0\Rightarrow \frac{1}{2}\le 2^x\le 1$

$x=0$時，$y=2^2-3\cdot 4^0=4-3=1$

$x=-1$時，$y=2-3\cdot 4^{-1}=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

$\therefore$當 $x=0$，y 有最小值 1

4. $4^x-7\cdot 2^{x+2}-128=0$，則 $x=$________.

答案：5

解析：$(2^x)^2-28\cdot 2^x-128=0\Rightarrow (2^x-32)(2^x+4)=0$

得 $2^x=32$ (-4不合)

$\therefore x=5$

5. 化簡下列各式：

(1) $\dfrac{(a^{\frac{2}{3}}b^{-1})^{-\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{ab^5}}=$________.

(2) $(\frac{1}{2})^{-1}-4\times(-2)^{-3}+(\frac{1}{4})^0-9^{-\frac{1}{2}}=$________.

(3) $\dfrac{a+a^{-1}}{a-a^{-1}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}=$________.

答案：(1) a^{-1}　(2) $\frac{19}{6}$　(3) $\frac{-2a}{a^2-1}$

解析：(1)原式$=\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}}=a^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}=a^{-1}$

(2)原式$=2+4\times\frac{1}{8}+1-\frac{1}{3}=3+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{19}{6}$

(3)原式$=\dfrac{a+a^{-1}}{a-a^{-1}}-\dfrac{(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2}{(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})}$

$=\dfrac{a+a^{-1}-(a+2+a^{-1})}{a-a^{-1}}$

$=\dfrac{-2}{a-a^{-1}}=\dfrac{-2a}{a^2-1}$

6. 將 $y=-2^{x+3}-1$的圖形沿著 x 軸方向移動-2個單位，y 軸方向移動 5 個單位，新的圖形方程式為________.

答案：$y=-2^{x+5}+4$

解析：沿 x 軸方向移動-2單位

得 $y=-2^{(x+2)+3}-1\Rightarrow y=-2^{x+5}-1$

再沿 y 軸方向移動 5 單位

得 $y=(-2^{x+5}-1)+5\Rightarrow y=-2^{x+5}+4$

7. 試解：$(\frac{4}{9})^x\cdot(\frac{27}{8})^{x-1}=\frac{16}{81}$，則 $x=$________.

答案：-1

解析：$(\frac{2^{2x}}{3^{2x}})\cdot(\frac{3^{3x-3}}{2^{3x-3}})=\frac{2^{2x-(3x-3)}}{3^{2x-(3x-3)}}=(\frac{2}{3})^{3-x}=(\frac{2}{3})^{4}$

$\therefore 3-x=4$

故 $x=-1$

8. 設兩曲線 Γ_1: $y=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$ 與 Γ_2: $y=\frac{a}{2^x+2^{-x}}$ 相交於兩點 A、B，且 $\overline{AB}=1$，則 $a=$________.

答案：$\frac{9}{4}$

解析：$\because \Gamma_1$ 與 Γ_2 之圖形皆對稱於 y 軸，且 $\overline{AB}=1$

$\therefore$ 令 $A(\frac{1}{2},y_1),B(-\frac{1}{2},y_2)$

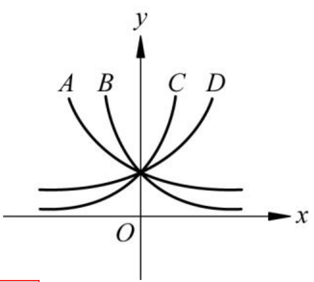
代入 Γ_1 得 $y_1=\frac{2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

代入 Γ_2 得 $y_1=\frac{a}{2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}}=\frac{a}{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{a}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=\frac{2a}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}a}{3}$

$\therefore \frac{\sqrt{2}a}{3}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

故 $a=\frac{9}{4}$

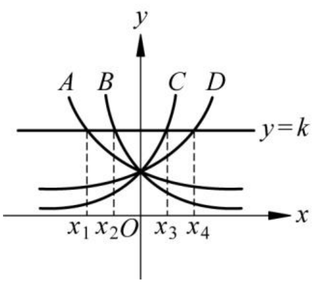
9. 附圖為 $A:y=a^x,B:y=b^x,C:y=c^x,D:y=d^x$，試比較：$a$、$b$、$c$、$d$ 的大小為________.



答案：$c>d>a>b$

解析：作水平線 $y=k$

$\Rightarrow a^{x_1}=b^{x_2}=c^{x_3}=d^{x_4}=k$



$\therefore x_4>x_3>0>x_2>x_1$

故 $c>d>a>b$

10. $(4x^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{3}{2}})(4x^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{3}{2}})-16x^{-\frac{1}{2}}(x-x^{\frac{1}{2}})=$________.

答案：8

解析：原式 $=(16x^{\frac{1}{2}}-2^{3})-16x^{\frac{1}{2}}+16$

$=-8+16$

$=8$

11. 若 $a=2^{\frac{3}{4}}, b=3^{\frac{1}{2}}, c=5^{\frac{1}{3}}$，試比較 a, b, c 之大小為_______.

答案：$b>c>a$

解析：$a^{12}=(2^{\frac{3}{4}})^{12}=2^{9}=512$

$b^{12}=(3^{\frac{1}{2}})^{12}=3^{6}=729$

$c^{12}=(5^{\frac{1}{3}})^{12}=5^{4}=625$

$\because b^{12}>c^{12}>a^{12}$

$\therefore b>c>a$

12. 不等式 $(\frac{1}{3})^{2x-1}-25(\frac{1}{3})^{x}-18>0$ 之解為________.

答案：$x<-2$

解析：原式 $=3(\frac{1}{3^{x}})^{2}-25(\frac{1}{3^{x}})-18>0$

$\Rightarrow (3\cdot\frac{1}{3^{x}}+2)(\frac{1}{3^{x}}-9)>0$，又 $\frac{1}{3^{x}}>0$

$\Rightarrow \frac{1}{3^{x}}-9>0$

$\Rightarrow (\frac{1}{3})^{x}>9=(\frac{1}{3})^{-2}$

$\Rightarrow x<-2$

四、計算與證明題(共 0 分,每題 0 分)

1. 若 $a>0$，且 $a^{x}+a^{-x}=5$，試求：

(1) $a^{\frac{x}{2}}+a^{-\frac{x}{2}}$.　(2) $a^{\frac{3x}{2}}+a^{-\frac{3x}{2}}$.

答案：(1) $(a^{\frac{x}{2}}+a^{-\frac{x}{2}})^{2}=a^{x}+2\cdot1+a^{-x}=5+2=7$

又 $a^{\frac{x}{2}}+a^{-\frac{x}{2}}>0$

$\therefore a^{\frac{x}{2}}+a^{-\frac{x}{2}}=\sqrt{7}$

(2) $a^{\frac{3x}{2}}+a^{-\frac{3x}{2}}=(a^{\frac{x}{2}}+a^{-\frac{x}{2}})^{3}-3\cdot a^{\frac{x}{2}}a^{-\frac{x}{2}}(a^{\frac{x}{2}}+a^{-\frac{x}{2}})$

$=(\sqrt{7})^{3}-3\cdot1\cdot\sqrt{7}$

$=7\sqrt{7}-3\sqrt{7}$

$=4\sqrt{7}$

2. 試解：$\begin{cases} 2^x+2^y=40 \\ 2^{x+y}=256 \end{cases}$，則序對 $(x,y)=?$

答案：$2^{x+y}=256=2^8$

得 $x+y=8$

$\therefore 2^x+2^y=2^x+2^{8-x}=40$

同乘 2^x 得 $(2^x)^2-40\cdot 2^x+256=0$

$\Rightarrow (2^x-32)(2^x-8)=0$

$\therefore 2^x=32,8$

故 $(x,y)=(5,3)$ 或 $(3,5)$

3. 若 w,x,y,z 為異於 0 的實數，且 $(\frac{3}{4})^w=(\frac{5}{3})^x=(\frac{6}{5})^y=(\frac{3}{2})^z$，試證：$\frac{1}{w}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$.

答案：設 $(\frac{3}{4})^w=(\frac{5}{3})^x=(\frac{6}{5})^y=(\frac{3}{2})^z=t$

則 $\begin{cases} t^{\frac{1}{w}}=\frac{3}{4}\cdots\cdots① \\ t^{\frac{1}{x}}=\frac{5}{3}\cdots\cdots② \\ t^{\frac{1}{y}}=\frac{6}{5}\cdots\cdots③ \\ t^{\frac{1}{z}}=\frac{3}{2}\cdots\cdots④ \end{cases}$

①×②×③ 得 $t^{\frac{1}{w}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{3}{2}=t^{\frac{1}{z}}$

所以 $\frac{1}{w}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$

4. 若 $a>0,\ a\neq 1$，將下列各式化簡為 a^x，求 x 值.

(1) $\sqrt[3]{a^2}$.　(2) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$.　(3) $\sqrt[5]{\frac{1}{a^2}}$.　(4) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}}$.

答案：(1) $\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}=a^x \Rightarrow x=\frac{2}{3}$

(2) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}=\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}=a^{-\frac{3}{4}}=a^x \Rightarrow x=-\frac{3}{4}$

(3) $\sqrt[5]{\frac{1}{a^2}}=(a^{-2})^{\frac{1}{5}}=a^{\frac{-2}{5}}=a^x \Rightarrow x=-\frac{2}{5}$

(4) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}}=[(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{5}}=a^{\frac{3}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{5}}=a^{\frac{1}{10}}=a^x \Rightarrow x=\frac{1}{10}$

5. 若點 $P(x,y)$在直線 $L:x+3y=3$上移動，求 2^x+8^y 的最小值，及當時 x,y 之值.

答案：$2^x+8^y=2^x+(2^3)^y=2^x+2^{3y}=2^x+2^{3-x}$

又 $\frac{2^x+2^{3-x}}{2}\geq\sqrt{2^x\cdot 2^{3-x}} \Rightarrow 2^x+2^{3-x}\geq 2\cdot\sqrt{8}=4\sqrt{2}$

$\therefore$最小值為$4\sqrt{2}$

此時$2^x=2^{3y}\Rightarrow x=3y$，又$x+3y=3$

$\therefore x=3y=\dfrac{3}{2}\Rightarrow x=\dfrac{3}{2},\ y=\dfrac{1}{2}$