分數欄

第一學期普高數學

老師：________ 班級：________ 座號：______ 姓名：__________

一、單一選擇題(共 0 分,每題 0 分)

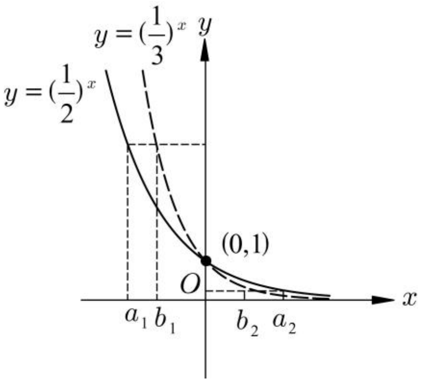
1. (C) 已知 a, b 為實數，且滿足 $(\frac{1}{2})^a=(\frac{1}{3})^b$，則下列 5 個式子① $a>b>0$, ② $0>b>a$, ③ $b>a>0$, ④ $0>a>b$, ⑤ $a=b$，其中可能成立的有幾個？ (A)1 個 (B)2 個 (C)3 個 (D)4 個 (E)5 個

解析：由下圖可知：

$x>0 \Rightarrow a>b>0$

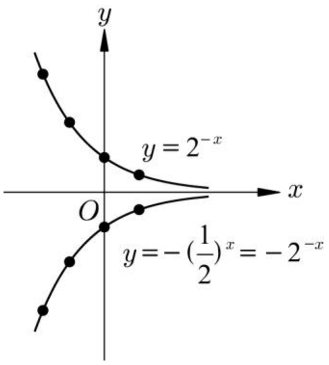
$x=0 \Rightarrow a=b=0$

$x<0 \Rightarrow 0>b>a$，故選(C)



2. (A) 關於函數 $y=2^{-x}$ 與 $y=-(\frac{1}{2})^x$ 的圖形，試問下列敘述何者正確？ (A)對稱於 x 軸 (B)對稱於 y 軸 (C)對稱於原點 (D)對稱於 $y=x$ (E)對稱於 $y=-x$

解析：如圖，故選(A)



3. (A) 已知 $a=3^{\frac{1}{2}}, b=4^{\frac{1}{3}}, c=5^{\frac{1}{4}}$，則 a,b,c 的大小關係為何？ (A) $c<b<a$ (B) $a<b<c$ (C) $b<c<a$ (D) $a<c<b$ (E) $c<a<b$

解析：$a=3^{\frac{1}{2}}=(3^6)^{\frac{1}{12}}=729^{\frac{1}{12}}$, $b=4^{\frac{1}{3}}=(4^4)^{\frac{1}{12}}=256^{\frac{1}{12}}$, $c=5^{\frac{1}{4}}=(5^3)^{\frac{1}{12}}=125^{\frac{1}{12}}$

$\because 125<256<729$，$\therefore 125^{\frac{1}{12}}<256^{\frac{1}{12}}<729^{\frac{1}{12}} \Rightarrow c<b<a$，故選(A)

4. (D) $a=\sqrt[6]{\frac{8}{81}}$, $b=\sqrt[5]{\frac{4}{27}}$, $c=\sqrt[4]{\frac{2}{9}}$, $d=\frac{1}{\sqrt{2}}$，則此四數中，最大者為何？ (A)a (B)b (C)c

(D)d (E)無法比較

解析：$\begin{cases} a^{30}=(\frac{8}{81})^5=\frac{2^{15}}{3^{20}} \\ b^{30}=(\frac{4}{27})^6=\frac{2^{12}}{3^{18}} \end{cases}$

$$\frac{a^{30}}{b^{30}}=\frac{\frac{2^{15}}{3^{20}}}{\frac{2^{12}}{3^{18}}}=\frac{2^3}{3^2}=\frac{8}{9}<1 \Rightarrow a<b$$

$$\begin{cases} b^{20}=(\frac{4}{27})^4=\frac{2^8}{3^{12}} \\ c^{20}=(\frac{2}{9})^5=\frac{2^5}{3^{10}} \end{cases}$$

$$\frac{b^{20}}{c^{20}}=\frac{\frac{2^8}{3^{12}}}{\frac{2^5}{3^{10}}}=\frac{2^3}{3^2}=\frac{8}{9}<1 \Rightarrow b<c$$

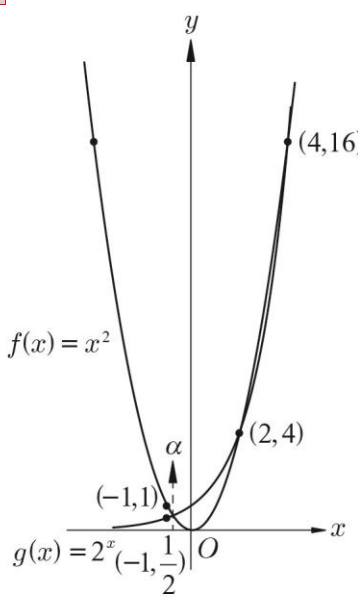
$$\begin{cases} c^4=\frac{2}{9} \\ d^4=\frac{1}{4}=\frac{2}{8} \end{cases} \Rightarrow d>c$$

$\therefore d>c>b>a$

故選(D)

5. (B) 函數 $f(x)=x^2$ 與 $g(x)=2^x$ 交於 A, B, C 三點，且 A, B, C 的 x 坐標分別為 α,β,γ，$\alpha<\beta<\gamma$，則下列敘述何者正確？ (A)$-2<\alpha<-1$ (B)$-1<\alpha<0$ (C)$0<\alpha<1$ (D)$1<\alpha<2$ (E)$2<\alpha<3$

解析：如圖：



故選(B)

二、多重選擇題(共 0 分,每題 0 分)

1. (AC DE)若 $a>0,\ b>0$，則下列選項何者正確？ (A) $\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a}\times\sqrt[6]{a}=a$

(B) $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}=a^{\frac{1}{12}}$ (C) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\div\sqrt{a\sqrt{a}}\times\sqrt[4]{a}=1$

(D) $(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})=a-b$ (E) $(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=a+b$

解析：(A)○：原式 $=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=a$

(B)×：原式 $=[a(a\cdot a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}}=[a(a^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}}=(a\cdot a^{\frac{5}{12}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{17}{12}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{17}{24}}$

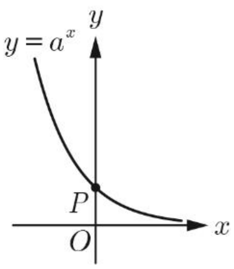
(C)○：原式 $=(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}\div(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{2}}\div a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=a^{0}=1$

(D)○：原式 $=(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})=a-b$

(E)○：原式 $=(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})[(a^{\frac{1}{3}})^{2}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+(b^{\frac{1}{3}})^{2}]=(a^{\frac{1}{3}})^{3}+(b^{\frac{1}{3}})^{3}=a+b$

故選(A)(C)(D)(E)

2. (AC D)右圖為函數 $y=a^{x}$ 的部分圖形，試選出正確的選項。



(A) $0<a<1$ (B)若 $(\frac{1}{3},k)$ 為函數 $y=a^{x}$ 圖形上一點，則 $k>1$

(C)若 $(h,\frac{1}{\sqrt{a}})$ 為函數 $y=a^{x}$ 圖形上一點，則 $h<0$ (D) $a+a^{3}>2a^{2}$ (E) $y=a^{x}$ 的圖形會與任一條水平線交於一點

解析：(A)○：$\because$ 函數 $y=a^{x}$ 的圖形為嚴格遞減，$\therefore 0<a<1$

(B)×：$\because$ 函數 $y=a^{x}$ 的圖形為嚴格遞減且 $\frac{1}{3}>0$，$\therefore k=a^{\frac{1}{3}}<a^{0}=1$，即 $k<1$

(C)○：將點 $(h,\frac{1}{\sqrt{a}})$ 代入函數 $y=a^{x}$，得 $\frac{1}{\sqrt{a}}=a^{h}$，即 $a^{-\frac{1}{2}}=a^{h}$，因此 $h=-\frac{1}{2}<0$

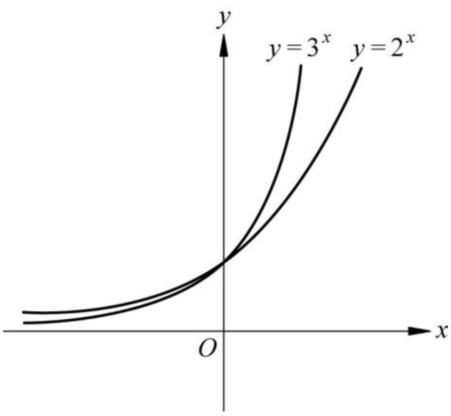
(D)○：由凹口向上的性質得知，$\frac{a^{1}+a^{3}}{2}>a^{\frac{1+3}{2}}=a^{2}$，$\therefore a+a^{3}>2a^{2}$

(E)×：$\because$ $y=a^{x}$ 的圖形恆在 x 軸上方，若考慮水平線 $y=-1$，則 $y=a^{x}$ 的圖形與該水平線沒有交點

故選(A)(C)(D)

3. (AD)設 $y=2^x$ 的圖形為 S， $y=3^x$ 的圖形為 T，則 (A)S、T 兩圖形恰交於一點 (B)S 恆在 T 的下方 (C)S 恆在 T 的上方 (D)S、T 均為凹口向上 (E)S、T 與任一條水平線皆相交

解析：如圖：



故選(A)(D)

三、填充題(共 0 分,每題 0 分)

1. 根據過去長期統計資料顯示，保險業務員的年資 x（年）與推銷成功的機率 $y(x)$ 有以下關係式： $y(x)=\dfrac{2^{-5+x}}{1+2^{-5+x}}$ ，若某金融機構推出一保險方案，希望推銷成功的機率至少有95%時，則需要派出至少年資_____（取整數）年的業務員。

答案：10

解析：設需要派出至少年資 n 年的業務員

依題意， $\dfrac{2^{-5+n}}{1+2^{-5+n}}\geq\dfrac{95}{100}\Rightarrow 100\cdot 2^{-5+n}\geq 95\cdot(1+2^{-5+n})\Rightarrow 2^{-5+n}\geq 19$

$\therefore -5+n\geq 5\Rightarrow n\geq 10$ ，故所求為 10 年

2. $a>0,\ b>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1$ ，化簡下列各式：

(1) $\sqrt{\dfrac{a^2}{b}\sqrt{\dfrac{b^3}{a}\sqrt[4]{\dfrac{a}{b^3}}}}=$________.

(2) $(a^3+a^{-3})(a^3-a^{-3})\div[(a^4+a^{-4}+1)(a-a^{-1})]=$________.

答案：(1) $a^{\frac{7}{8}}b^{-\frac{1}{8}}$ (2) $a+a^{-1}$

解析：(1)原式 $=\sqrt{\dfrac{a^2}{b}\cdot\dfrac{b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{3}{4}}}}=(a^{2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}b^{-1+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{7}{4}}b^{-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{8}}b^{-\frac{1}{8}}$

(2)原式 $=\dfrac{a^6-a^{-6}}{(a^4+a^{-4}+1)(a-a^{-1})}$

$=\dfrac{(a^2-a^{-2})(a^4+1+a^{-4})}{(a^4+1+a^{-4})(a-a^{-1})}$

$=\dfrac{a^2-a^{-2}}{a-a^{-1}}$

$=a+a^{-1}$

3. 試比較：$a=5^{\frac{1}{2}},b=10^{\frac{1}{3}},c=22^{0.25}$ 之大小為______.

答案：$a>c>b$

解析：$a=5^{\frac{1}{2}},b=10^{\frac{1}{3}},c=22^{\frac{1}{4}}$

$\because a=5^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{3}{6}}=(5^3)^{\frac{1}{6}}=125^{\frac{1}{6}}$

$b=10^{\frac{1}{3}}=10^{\frac{2}{6}}=(10^2)^{\frac{1}{6}}=100^{\frac{1}{6}}$

$\therefore a>b$

又 $a=5^{\frac{1}{2}}=(5^2)^{\frac{1}{4}}=25^{\frac{1}{4}}$

$c=22^{\frac{1}{4}}$

$\therefore a>c$

$\because b^{12}=(10^{\frac{1}{3}})^{12}=10^4=10000$

$c^{12}=(22^{\frac{1}{4}})^{12}=22^3=484\times 22=10648$

$\therefore c^{12}>b^{12}\Rightarrow c>b$

故 $a>c>b$

4. 設 $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}$，$x$ 為任意實數，$x\neq 0$，若 $f(\alpha)=4$，$f(\beta)=3$，則 $f(\alpha+\beta)=$________.

答案：$\dfrac{13}{7}$

解析：$f(x)=\dfrac{2^x(2^x+2^{-x})}{2^x(2^x-2^{-x})}=\dfrac{2^{2x}+1}{2^{2x}-1}$

$\because f(\alpha)=\dfrac{2^{2\alpha}+1}{2^{2\alpha}-1}=4$

得 $2^{2\alpha}+1=4\cdot 2^{2\alpha}-4$

$\Rightarrow 3\cdot 2^{2\alpha}=5\Rightarrow 2^{2\alpha}=\dfrac{5}{3}$

$f(\beta)=\dfrac{2^{2\beta}+1}{2^{2\beta}-1}=3$

得 $2^{2\beta}+1=3\cdot 2^{2\beta}-3$

$\Rightarrow 2\cdot 2^{2\beta}=4\Rightarrow 2^{2\beta}=2$

$$\therefore f(\alpha+\beta)=\frac{2^{2(\alpha+\beta)}+1}{2^{2(\alpha+\beta)}-1}=\frac{2^{2\alpha}\cdot 2^{2\beta}+1}{2^{2\alpha}\cdot 2^{2\beta}-1}$$

$$=\frac{\frac{5}{3}\cdot 2+1}{\frac{5}{3}\cdot 2-1}=\frac{\frac{13}{3}}{\frac{7}{3}}=\frac{13}{7}$$

5. 函數 $y=\dfrac{2^x-2}{2^x+1}$ 的值域為________.

答案：$-2<y<1$

解析：$\because\ y=\dfrac{2^x-2}{2^x+1}\Rightarrow y\cdot 2^x+y=2^x-2$

$\Rightarrow y\cdot 2^x-2^x=-y-2$

$\Rightarrow 2^x(y-1)=-y-2$

$\Rightarrow 2^x=\dfrac{-y-2}{y-1}>0$

$\therefore (-y-2)(y-1)>0\Rightarrow (y+2)(y-1)<0$

$\Rightarrow -2<y<1$

6. 若$3^x-3^{-x}=2$，求$27^x=$________.

答案：$7+5\sqrt{2}$

解析：$3^x-2-\dfrac{1}{3^x}=0$

$\Rightarrow (3^x)^2-2\cdot 3^x-1=0$

$\Rightarrow 3^x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=1\pm\sqrt{2}>0$

$\therefore 3^x=\sqrt{2}+1$

$27^x=(3^x)^3=(\sqrt{2}+1)^3=2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1=7+5\sqrt{2}$

7. 若$2^x+2^{-x}=5$，則$4^x+4^{-x}=$________, $8^x+8^{-x}=$________.

答案：23, 110

解析：$(2^x+2^{-x})^2=25\Rightarrow (2^x)^2+2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}+(2^{-x})^2=25$

$\Rightarrow 2^{2x}+2+2^{-2x}=25$

$\Rightarrow 4^x+4^{-x}=23$

$(2^x+2^{-x})^3=125\Rightarrow (2^x)^3+3\cdot 2^x\cdot 2^{-x}(2^x+2^{-x})+(2^{-x})^3=125$

$\Rightarrow 2^{3x}+3\times 5+2^{-3x}=125$

$\Rightarrow 8^x+8^{-x}=125-15=110$

8. 若$a>0,\ a\neq 1$，若$a^x+a^{-x}=7$，則$a^{\frac{x}{2}}+a^{-\frac{x}{2}}=$________.

答案：3

解析：$(a^{\frac{x}{2}}+a^{-\frac{x}{2}})^2=(a^{\frac{x}{2}})^2+2\cdot a^{\frac{x}{2}}\cdot a^{-\frac{x}{2}}+(a^{-\frac{x}{2}})^2$

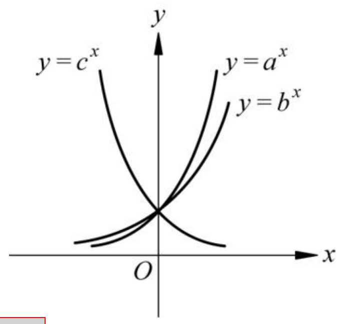
$=a^x+2\cdot 1+a^{-x}$

$=7+2$

$=9$

$\therefore a^{\frac{x}{2}}+a^{-\frac{x}{2}}=3$

9. 指數函數$y=a^x, y=b^x, y=c^x$圖形如下，則 a、b、c 的大小關係為________.



答案：$a>b>c$

解析：由圖形知：$a>b>1>c>0$

$\therefore a>b>c$

10. 若$2^{3x}+\dfrac{1}{2^{3x}}=2$，求$2^x+\dfrac{1}{2^x}=$________.

答案：2

解析：設$t=2^x+\dfrac{1}{2^x}$

則$\dfrac{2^x+\dfrac{1}{2^x}}{2}\geq\sqrt{2^x\cdot\dfrac{1}{2^x}}=1\Rightarrow t=2^x+\dfrac{1}{2^x}\geq 2$

$(2^x+\dfrac{1}{2^x})^3=2^{3x}+3\cdot(2^x+\dfrac{1}{2^x})+\dfrac{1}{2^{3x}}$

$\Rightarrow t^3=2+3t$

$\Rightarrow t^3-3t-2=0$

$\Rightarrow (t-2)(t^2+2t+1)=0$

$\Rightarrow (t-2)(t+1)^2=0$

$\Rightarrow t=2$

$\therefore 2^x+\dfrac{1}{2^x}=2$

11. 方程組$\begin{cases}2^{x-1}+3^{y+1}=11\\2^{x+2}-3^{y-1}=15\end{cases}$之解為$x=$________, $y=$________.

答案：$x=2,\ y=1$

解析：設$2^x=a>0,\ 3^y=b>0$

則$\begin{cases}\dfrac{1}{2}a+3b=11\\4a-\dfrac{b}{3}=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a+24b=88\\4a-\dfrac{b}{3}=15\end{cases}\Rightarrow b=3,\ a=4$

$\therefore 2^x=4,\ 3^y=3\Rightarrow x=2,\ y=1$

12. 不等式$(\dfrac{1}{2})^{2x-1}+4<9\cdot(\dfrac{1}{2})^x$的解為______.

答案：$-2<x<1$

解析：$(\dfrac{1}{2})^{2x}\cdot(\dfrac{1}{2})^{-1}-9\cdot(\dfrac{1}{2})^x+4<0$

$\Rightarrow 2[(\frac{1}{2})^x]^2 - 9\cdot(\frac{1}{2})^x + 4 < 0$

$\Rightarrow [2(\frac{1}{2})^x - 1][(\frac{1}{2})^x - 4] < 0$

得 $\frac{1}{2} < (\frac{1}{2})^x < 4$

$\Rightarrow (\frac{1}{2})^1 < (\frac{1}{2})^x < (\frac{1}{2})^{-2}$

$\therefore -2 < x < 1$

四、計算與證明題(共 0 分,每題 0 分)

1. 試解方程式 $9^{x+1} - 244\cdot 3^x + 27 = 0$.

答案：令 $3^x = Y(>0)$

則 $9Y^2 - 244Y + 27 = 0$

$\Rightarrow (Y-27)(9Y-1) = 0$

$\Rightarrow Y = 27$ 或 $\frac{1}{9}$

$\therefore 3^x = 27$ 或 $\frac{1}{9}$

即 $3^x = 3^3$ 或 3^{-2}

故 $x = 3$ 或 -2

2. 試解下列指數方程式：

(1) $2^{3-\frac{x}{4}} + 31\cdot 2^{-\frac{x}{8}} - 4 = 0$.

(2) $2^{3x} = 4(2^x - 2^{-x})$.

答案：(1) $8\cdot(2^{-\frac{x}{8}})^2 + 31\cdot 2^{-\frac{x}{8}} - 4 = 0 \Rightarrow (8\cdot 2^{-\frac{x}{8}} - 1)(2^{-\frac{x}{8}} + 4) = 0$

$\Rightarrow 2^{-\frac{x}{8}} = \frac{1}{8}, -4$ (-4 不合)

$\Rightarrow 2^{-\frac{x}{8}} = 2^{-3}$

$\therefore -\frac{x}{8} = -3 \Rightarrow x = 24$

(2) $(2^x)^3 - 4\cdot 2^x + 4\cdot 2^{-x} = 0 \Rightarrow (2^x)^4 - 4\cdot(2^x)^2 + 4 = 0$

$\Rightarrow (2^{2x})^2 - 4\cdot 2^{2x} + 4 = 0$

$\Rightarrow (2^{2x} - 2)^2 = 0$

$\Rightarrow 2^{2x} = 2$

$\therefore 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

3. 若 x、y、z 表△ABC 之三邊長，且 $2^{x+y} + 2^{y+z} + 2^{z+x} = 4^x + 4^y + 4^z$ ，試判斷△ABC 之形狀.

答案：$2^{x+y} + 2^{y+z} + 2^{z+x} = 4^x + 4^y + 4^z$

$\Rightarrow 2^x\cdot 2^y + 2^y\cdot 2^z + 2^z\cdot 2^x = (2^x)^2 + (2^y)^2 + (2^z)^2$

令 $X = 2^x$ 、 $Y = 2^y$ 、 $Z = 2^z$

$\Rightarrow X^2 + Y^2 + Z^2 - XY - YZ - ZX = 0$

$\Rightarrow 2X^2+2Y^2+2Z^2-2XY-2YZ-2ZX=0$

$\Rightarrow (X^2-2XY+Y^2)+(Y^2-2YZ+Z^2)+(Z^2-2ZX+X^2)=0$

$\Rightarrow (X-Y)^2+(Y-Z)^2+(Z-X)^2=0$

$\Rightarrow X=Y$ 且 $Y=Z$ 且 $Z=X$

$\therefore X=Y=Z$

故△ABC 為正△

4. 若 x、y、z 表△ABC 之三邊長，且 $2^{x+y}+2^{y+z}+2^{z+x}=4^x+4^y+4^z$，試判斷△$ABC$ 之形狀.

答案：$2^{x+y}+2^{y+z}+2^{z+x}=4^x+4^y+4^z$

$\Rightarrow 2^x\cdot 2^y+2^y\cdot 2^z+2^z\cdot 2^x=(2^x)^2+(2^y)^2+(2^z)^2$

令 $X=2^x$ 、 $Y=2^y$ 、 $Z=2^z$

$\Rightarrow X^2+Y^2+Z^2-XY-YZ-ZX=0$

$\Rightarrow 2X^2+2Y^2+2Z^2-2XY-2YZ-2ZX=0$

$\Rightarrow (X^2-2XY+Y^2)+(Y^2-2YZ+Z^2)+(Z^2-2ZX+X^2)=0$

$\Rightarrow (X-Y)^2+(Y-Z)^2+(Z-X)^2=0$

$\Rightarrow X=Y$ 且 $Y=Z$ 且 $Z=X$

$\therefore X=Y=Z$

故△ABC 為正△

5. 若 $a>0$，且 $a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}=3$，求下列各值：

(1) $a^{\frac{3}{4}}+a^{-\frac{3}{4}}$. (2) $a+a^{-1}$.

答案：(1) $a^{\frac{3}{4}}+a^{-\frac{3}{4}}=(a^{\frac{1}{4}})^3+(a^{-\frac{1}{4}})^3$

$=(a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}})^3-3a^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}})$

$=3^3-3\cdot 1\cdot 3$

$=27-9$

$=18$

(2) $(a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}})^2=9 \Rightarrow a^{\frac{1}{2}}+2\cdot 1+a^{-\frac{1}{2}}=9 \Rightarrow a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=7$

$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=49 \Rightarrow a+2\cdot 1+a^{-1}=49 \Rightarrow a+a^{-1}=47$