

# 第一學期普高數學

分數欄

老師：\_\_\_\_\_ 班級：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

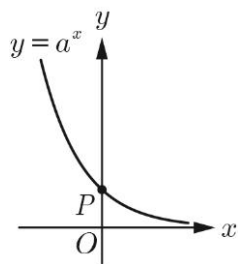
|     |
|-----|
| 分數欄 |
|-----|

## 一、單一選擇題(共 0 分,每題 0 分)

1. ( ) 已知  $a, b$  為實數, 且滿足  $(\frac{1}{2})^a = (\frac{1}{3})^b$ , 則下列 5 個式子 ①  $a > b > 0$ , ②  $0 > b > a$ , ③  $b > a > 0$ , ④  $0 > a > b$ , ⑤  $a = b$ , 其中可能成立的有幾個? (A) 1 個 (B) 2 個 (C) 3 個 (D) 4 個 (E) 5 個
2. ( ) 關於函數  $y = 2^{-x}$  與  $y = -(\frac{1}{2})^x$  的圖形, 試問下列敘述何者正確? (A) 對稱於  $x$  軸 (B) 對稱於  $y$  軸 (C) 對稱於原點 (D) 對稱於  $y = x$  (E) 對稱於  $y = -x$
3. ( ) 已知  $a = 3^{\frac{1}{2}}, b = 4^{\frac{1}{3}}, c = 5^{\frac{1}{4}}$ , 則  $a, b, c$  的大小關係為何? (A)  $c < b < a$  (B)  $a < b < c$  (C)  $b < c < a$  (D)  $a < c < b$  (E)  $c < a < b$
4. ( )  $a = \sqrt[6]{\frac{8}{81}}, b = \sqrt[5]{\frac{4}{27}}, c = \sqrt[4]{\frac{2}{9}}, d = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 則此四數中, 最大者為何? (A)  $a$  (B)  $b$  (C)  $c$  (D)  $d$  (E) 無法比較
5. ( ) 函數  $f(x) = x^2$  與  $g(x) = 2^x$  交於  $A, B, C$  三點, 且  $A, B, C$  的  $x$  坐標分別為  $\alpha, \beta, \gamma$ ,  $\alpha < \beta < \gamma$ , 則下列敘述何者正確? (A)  $-2 < \alpha < -1$  (B)  $-1 < \alpha < 0$  (C)  $0 < \alpha < 1$  (D)  $1 < \alpha < 2$  (E)  $2 < \alpha < 3$

## 二、多重選擇題(共 0 分,每題 0 分)

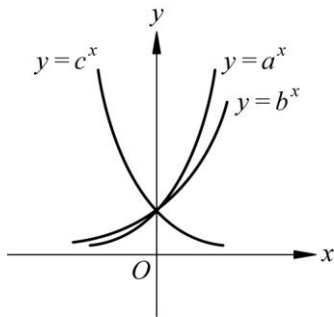
1. ( ) 若  $a > 0, b > 0$ , 則下列選項何者正確? (A)  $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[6]{a} = a$  (B)  $\sqrt{a^3} \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{12}}$  (C)  $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} \div \sqrt{a\sqrt{a}} \times \sqrt[4]{a} = 1$  (D)  $(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) = a - b$  (E)  $(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) = a + b$
2. ( ) 右圖為函數  $y = a^x$  的部分圖形, 試選出正確的選項。



- (A)  $0 < a < 1$  (B) 若  $(\frac{1}{3}, k)$  為函數  $y = a^x$  圖形上一點, 則  $k > 1$
- (C) 若  $(h, \frac{1}{\sqrt{a}})$  為函數  $y = a^x$  圖形上一點, 則  $h < 0$  (D)  $a + a^3 > 2a^2$  (E)  $y = a^x$  的圖形會與任一條水平線交於一點
3. ( ) 設  $y = 2^x$  的圖形為  $S$ ,  $y = 3^x$  的圖形為  $T$ , 則 (A)  $S, T$  兩圖形恰交於一點 (B)  $S$  恆在  $T$  的下方 (C)  $S$  恆在  $T$  的上方 (D)  $S, T$  均為凹口向上 (E)  $S, T$  與任一條水平線皆相交

### 三、填充題(共 0 分,每題 0 分)

- 根據過去長期統計資料顯示，保險業務員的年資  $x$  (年) 與推銷成功的機率  $y(x)$  有以下關係式： $y(x) = \frac{2^{-5+x}}{1+2^{-5+x}}$ ，若某金融機構推出一保險方案，希望推銷成功的機率至少有 95% 時，則需要派出至少年資\_\_\_\_\_ (取整數) 年的業務員。
- $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$ ，化簡下列各式：
  - $(1) \sqrt{\frac{a^2}{b}} \sqrt{\frac{b^3}{a}} \sqrt[4]{\frac{a}{b^3}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
  - $(2) (a^3 + a^{-3})(a^3 - a^{-3}) \div [(a^4 + a^{-4} + 1)(a - a^{-1})] = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- 試比較： $a = 5^{\frac{1}{2}}, b = 10^{\frac{1}{3}}, c = 22^{0.25}$  之大小為\_\_\_\_\_。
- 設  $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$ ， $x$  為任意實數， $x \neq 0$ ，若  $f(\alpha) = 4, f(\beta) = 3$ ，則  $f(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 函數  $y = \frac{2^x - 2}{2^x + 1}$  的值域為\_\_\_\_\_。
- 若  $3^x - 3^{-x} = 2$ ，求  $27^x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 若  $2^x + 2^{-x} = 5$ ，則  $4^x + 4^{-x} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $8^x + 8^{-x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 若  $a > 0, a \neq 1$ ，若  $a^x + a^{-x} = 7$ ，則  $a^{\frac{x}{2}} + a^{-\frac{x}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 指數函數  $y = a^x, y = b^x, y = c^x$  圖形如下，則  $a、b、c$  的大小關係為\_\_\_\_\_。



- 若  $2^{3x} + \frac{1}{2^{3x}} = 2$ ，求  $2^x + \frac{1}{2^x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 方程組  $\begin{cases} 2^{x-1} + 3^{y+1} = 11 \\ 2^{x+2} - 3^{y-1} = 15 \end{cases}$  之解為  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 不等式  $(\frac{1}{2})^{2x-1} + 4 < 9 \cdot (\frac{1}{2})^x$  的解為\_\_\_\_\_。

### 四、計算與證明題(共 0 分,每題 0 分)

- 試解方程式  $9^{x+1} - 244 \cdot 3^x + 27 = 0$ 。
- 試解下列指數方程式：
  - $(1) 2^{3-\frac{x}{4}} + 31 \cdot 2^{-\frac{x}{8}} - 4 = 0$ 。
  - $(2) 2^{3x} = 4(2^x - 2^{-x})$ 。

3. 若  $x$ 、 $y$ 、 $z$  表  $\triangle ABC$  之三邊長，且  $2^{x+y} + 2^{y+z} + 2^{z+x} = 4^x + 4^y + 4^z$ ，試判斷  $\triangle ABC$  之形狀.
4. 若  $x$ 、 $y$ 、 $z$  表  $\triangle ABC$  之三邊長，且  $2^{x+y} + 2^{y+z} + 2^{z+x} = 4^x + 4^y + 4^z$ ，試判斷  $\triangle ABC$  之形狀.
5. 若  $a > 0$ ，且  $a^{\frac{1}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} = 3$ ，求下列各值：
- (1)  $a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{3}{4}}$ . (2)  $a + a^{-1}$ .