

指數函數與對數函數

1-1 指數函數

主題 1 指數函數

配合課本 P.2~P.13

1. 指數函數的定義

設 $a > 0$, $a \neq 1$, x 是任意實數，則稱函數 $f(x) = a^x$ 是「以 a 為底的指數函數」。

2. 指數函數的圖形

(1) 當 $a > 1$ 時，指數函數 $y = a^x$ 的圖形如圖一所示。

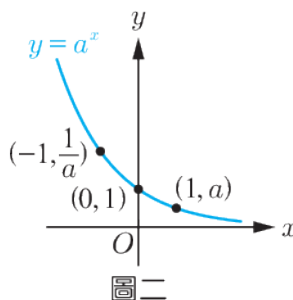
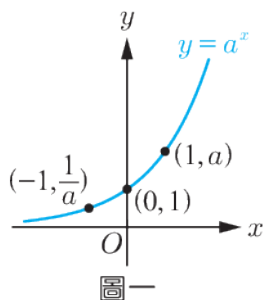
觀察函數 $y = a^x$ ($a > 1$) 的圖形，我們可以看到：

- ① 整個圖形都在 x 軸上方，這是因為對任意實數 x ， $a^x > 0$ 恆成立。
- ② $y = a^x$ 的圖形通過點 $(0, 1)$ ，這是因為當 $x = 0$ 時， $a^x = a^0 = 1$ 。
- ③ $y = a^x$ 的圖形由左向右逐漸上升，為嚴格遞增函數，即 $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ 。
- ④ $y = a^x$ 的圖形越往左邊越接近 x 軸，且要多接近就有多接近，但不會與 x 軸相交，這種情況下，我們稱 x 軸為 $y = a^x$ 圖形的「漸近線」。

(2) 當 $0 < a < 1$ 時，指數函數 $y = a^x$ 的圖形如圖二所示。

觀察函數 $y = a^x$ ($0 < a < 1$) 的圖形，我們可以看到：

- ① 整個圖形都在 x 軸上方，這是因為對任意實數 x ， $a^x > 0$ 恆成立。
- ② $y = a^x$ 的圖形通過點 $(0, 1)$ ，這是因為當 $x = 0$ 時， $a^x = a^0 = 1$ 。
- ③ $y = a^x$ 的圖形由左向右逐漸下降，為嚴格遞減函數，即 $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$ 。
- ④ $y = a^x$ 的圖形越往右邊越接近 x 軸，且要多接近就有多接近，但不會與 x 軸相交，所以 x 軸為 $y = a^x$ 圖形的「漸近線」。



註：當 $a=1$ 時， $f(x)=1^x=1$ 是常數函數，其圖形是一條水平直線，一般討論指數函數時，會將底數 $a=1$ 的情形排除。因此，指數函數只討論 $a>0, a\neq 1$ 的情形。

3. 指數函數的定義域與值域

(1) 定義域與值域

在函數 $y=f(x)$ 中，可使得函數有意義之變數 x 所形成的集合，稱為此函數的定義域；而其對應值 y 所形成的集合，稱為此函數的值域。

(2) 由指數函數 $y=a^x$ 的圖形可知，變數 x 的範圍是整個 x 軸，所以指數函數的定義域是所有實數 \mathbb{R} ，而其對應值 y 的範圍都是正數，所以值域為 $\{y|y>0, y\in\mathbb{R}\}$ 。

4. 指數函數及其圖形的特性

設 $a>0, a\neq 1, f(x)=a^x$ ，

(1) $f(0)=a^0=1$ ，因此， $y=f(x)=a^x$ 的圖形必過點 $(0, 1)$ 。

(2) 對任意實數 x ， $f(x)=a^x>0$ 恆成立，因此， $y=f(x)=a^x$ 的圖形恆在 x 軸上方。

(3) $f(x)=a^x$ 為一對一函數，因此，在 x 軸上方的任一水平線都與 $y=f(x)=a^x$ 的圖形恰相交於一點。

(4) 對於任意兩實數 x_1, x_2 ，恆有 $f(x_1+x_2)=a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\times a^{x_2}=f(x_1)\times f(x_2)$ 。

例如 若 $f(x)=2^x$ ，則 $f(2+3)=2^{2+3}=2^2\times 2^3=f(2)\times f(3)$ 。

(5) 單調性：

① 當 $a>1$ 時， $f(x)=a^x$ 是嚴格遞增函數，即 $x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ ，因此， $y=f(x)=a^x$ 的圖形由左往右逐漸上升。

例如 $2<3\Leftrightarrow 2^2<2^3$ 。

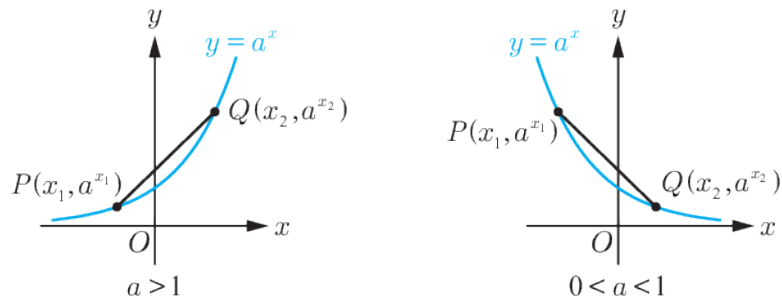
② 當 $0<a<1$ 時， $f(x)=a^x$ 是（嚴格）遞減函數，即 $x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$ ，因此， $y=f(x)=a^x$ 的圖形由左往右逐漸下降。

例如 $2<3\Leftrightarrow (\frac{1}{3})^2>(\frac{1}{3})^3$ 。

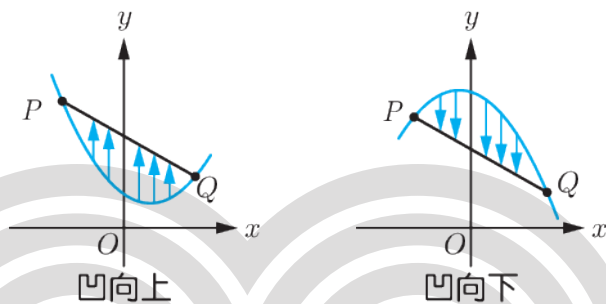
(6) $y=f(x)=a^x$ 的圖形以 x 軸為漸近線。

(7) $y=a^x$ 與 $y=(\frac{1}{a})^x$ 兩函數的圖形對稱於 y 軸。

(8) 圖形凹向上，即在 $y = f(x) = a^x$ 圖形上任取相異兩點 P, Q ， \overline{PQ} 恆在函數圖形的上方。對於任意兩個相異實數 x_1, x_2 ，恆有 $\frac{a^{x_1} + a^{x_2}}{2} > \sqrt{a^{x_1} \times a^{x_2}} = a^{\frac{x_1+x_2}{2}}$ 。



註：在函數圖形上任取相異兩點 P, Q ，若 \overline{PQ} 恆在函數圖形的上方，我們說函數圖形「凹向上」；反之，若 \overline{PQ} 恆在函數圖形的下方，則說函數圖形「凹向下」。



5. 函數的平移

函數 $y = f(x - h) + k$ 的圖形，為函數 $y = f(x)$ 的圖形沿 x 軸方向移動 $|h|$ 單位，再沿 y 軸方向移動 $|k|$ 單位所得，

- (1) 若 $h > 0$ ，則向右平移 h 單位；若 $h < 0$ ，則向左平移 $|h|$ 單位。
- (2) 若 $k > 0$ ，則向上平移 k 單位；若 $k < 0$ ，則向下平移 $|k|$ 單位。

1

例題

指數函數圖形的描繪

練習

- (1) 已知指數函數 $y = 2^x$ ，試將表中的 x 值代入函數，完成下列表格。

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$						

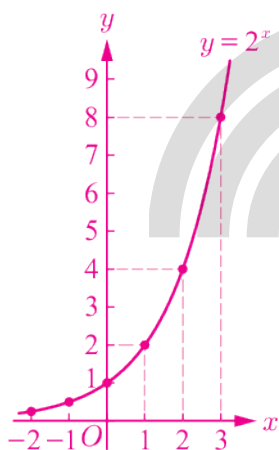
- (2) 試利用描點法，將上表列出的點 (x, y) 畫在坐標平面上，並描繪出 $y = 2^x$ 的圖形。

解

(1)

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

- (2) $y = 2^x$ 的圖形如下所示



- (1) 已知指數函數 $y = 3^x$ ，試將表中的 x 值代入函數，完成下列表格。

x	-2	-1	0	1	2
$y = 3^x$					

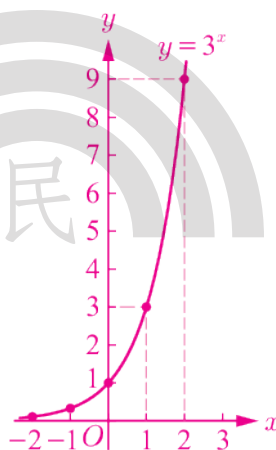
- (2) 試利用描點法，將上表列出的點 (x, y) 畫在坐標平面上，並描繪出 $y = 3^x$ 的圖形。

解

(1)

x	-2	-1	0	1	2
$y = 3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

- (2) $y = 3^x$ 的圖形如下所示



2 例題

指數函數圖形的描繪

配合課本例題 1

練習

- (1) 已知指數函數 $y = (\frac{1}{2})^x$ ，試將表中的 x 值代入函數，完成下列表格。

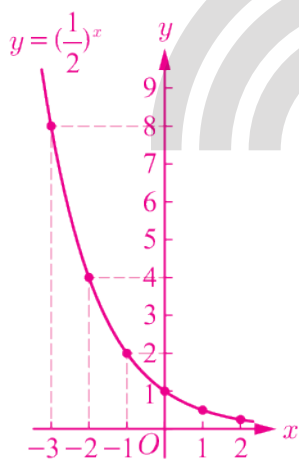
x	-3	-2	-1	0	1	2
$y = (\frac{1}{2})^x$						

- (2) 試利用描點法，將上表列出的點 (x, y) 畫在坐標平面上，並描繪出 $y = (\frac{1}{2})^x$ 的圖形。

解 (1)

x	-3	-2	-1	0	1	2
$y = (\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

- (2) $y = (\frac{1}{2})^x$ 的圖形如下所示



- (1) 已知指數函數 $y = (\frac{1}{3})^x$ ，試將表中的 x 值代入函數，完成下列表格。

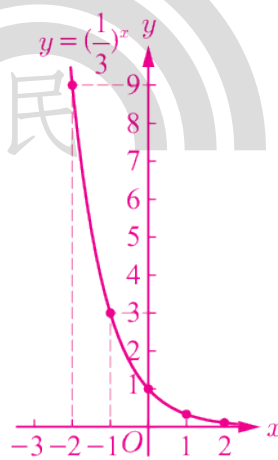
x	-2	-1	0	1	2
$y = (\frac{1}{3})^x$					

- (2) 試利用描點法，將上表列出的點 (x, y) 畫在坐標平面上，並描繪出 $y = (\frac{1}{3})^x$ 的圖形。

解 (1)

x	-2	-1	0	1	2
$y = (\frac{1}{3})^x$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

- (2) $y = (\frac{1}{3})^x$ 的圖形如下所示

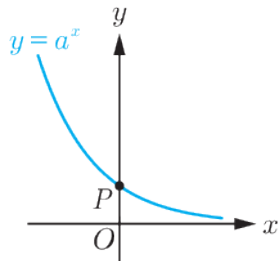


3 例題

指數函數圖形的特性

練習

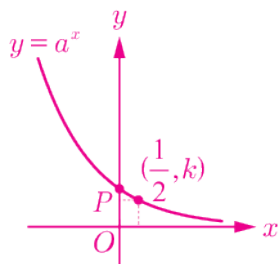
右圖為函數 $y = a^x$ 的部分圖形，試選出正確的選項。



- (A) $0 < a < 1$
 (B) $\overline{OP} = a$
 (C) 若 $(\frac{1}{2}, k)$ 為函數 $y = a^x$ 的圖形上一點，則 $k < 1$
 (D) 若 $(h, \frac{1}{a})$ 為函數 $y = a^x$ 的圖形上一點，則 $h < 0$
 (E) $y = a^x$ 的圖形與水平線 $y = 2020$ 恰交於一點

解 (A) ○：由函數圖形可知，函數 $y = a^x$ 為嚴格遞減函數
 \therefore 其底數 a 滿足 $0 < a < 1$
 (B) ×： \because 函數 $y = a^x$ 的圖形與 y 軸交於點 $(0, 1)$
 $\therefore \overline{OP} = 1$
 (C) ○：如下圖所示

\because 函數 $y = a^x$ 為嚴格遞減且 $\frac{1}{2} > 0$
 $\therefore k = a^{\frac{1}{2}} < a^0 = 1$



(D) ○：將點 $(h, \frac{1}{a})$ 代入函數 $y = a^x$ 得

$$a^h = \frac{1}{a} = a^{-1}$$

$$\therefore h = -1 < 0$$

(E) ○：函數 $y = a^x$ 的圖形與任一水平線 $y = k$ ($k > 0$) 恰交於一點

故選(A)(C)(D)(E)

設 $a > 0, a \neq 1$ ，下列哪些選項是正確的？

- (A) $y = a^x$ 的圖形恆過點 $(1, 0)$
 (B) $y = a^x$ 與 $y = (\frac{1}{a})^x$ 的圖形對稱於 y 軸
 (C) $y = a^x$ 與 $y = -a^x$ 的圖形對稱於 x 軸
 (D) $y = a^x$ 與 $y = -(\frac{1}{a})^x$ 的圖形對稱於原點
 (E) $y = a^x$ 的圖形都是凹向上的

解 (A) ×： $y = a^x$ 的圖形恆過點 $(0, 1)$
 (B) ○： $y = a^x$ 與 $y = (\frac{1}{a})^x$ 的圖形必對稱於 y 軸
 (C) ○：設點 $P(s, t)$ 為 $y = a^x$ 的圖形上任一點
 則 $t = a^s$
 $\therefore -t = -a^s$
 \therefore 點 $(s, -t)$ 在 $y = -a^x$ 的圖形上
 又 $P(s, t)$ 與點 $(s, -t)$ 對稱於 x 軸
 $\therefore y = a^x$ 與 $y = -a^x$ 的圖形對稱於 x 軸
 (D) ○：設點 $P(s, t)$ 為 $y = a^x$ 的圖形上任一點
 則 $t = a^s$
 $\therefore -t = -a^s = -a^{-(s)} = -(a^{-1})^{-s} = -(\frac{1}{a})^{-s}$
 \therefore 點 $(-s, -t)$ 在 $y = -(\frac{1}{a})^x$ 的圖形上
 又 $P(s, t)$ 與點 $(-s, -t)$ 對稱於原點
 $\therefore y = a^x$ 與 $y = -(\frac{1}{a})^x$ 的圖形對稱於原點
 (E) ○： $y = a^x$ 的圖形都是凹向上的
 故選(B)(C)(D)(E)

4 例題

指數函數圖形的單調性

配合課本例題 6

練習

1

試比較下列每一個小題中各數的大小：

$$(1) a=3^{\frac{1}{2}}, b=3^{\frac{2}{3}}, c=3^{-\frac{1}{3}}, d=3^{\frac{1}{3}}, e=1 \circ$$

$$(2) a=\left(\frac{2}{3}\right)^2, b=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}, c=\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}},$$

$$d=\left(\frac{2}{3}\right)^{-\sqrt{3}}, e=1 \circ$$

解 (1) $\because y=3^x$ 為遞增函數且

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > 0 > -\frac{1}{3}$$

$$\therefore 3^{\frac{2}{3}} > 3^{\frac{1}{2}} > 3^{\frac{1}{3}} > 3^0 > 3^{-\frac{1}{3}}$$

即 $b > a > d > e > c$

(2) $\because y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 為遞減函數且

$$2 > \sqrt{2} > 0 > -1 > -\sqrt{3}$$

$$\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^2 < \left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\frac{2}{3}\right)^0 < \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} < \left(\frac{2}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$$

即 $a < c < e < b < d$

試問下列哪一個選項的值最小？

$$(A) 2^{\frac{1}{3}} \quad (B) \left(\frac{1}{8}\right)^{-2} \quad (C) 2^{-\frac{1}{4}} \quad (D) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(E) 8^{-\frac{1}{3}}$$

解 (B) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2} = (2^{-3})^{-2} = 2^6$

$$(D) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = (2^{-1})^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$(E) 8^{-\frac{1}{3}} = (2^3)^{-\frac{1}{3}} = 2^{-1}$$

$$\because y=2^x \text{ 為遞增函數且 } 6 > \frac{1}{3} > -\frac{1}{4} > -\frac{1}{2} > -1$$

$$\therefore 2^6 > 2^{\frac{1}{3}} > 2^{-\frac{1}{4}} > 2^{-\frac{1}{2}} > 2^{-1}$$

故選(E)

三

民

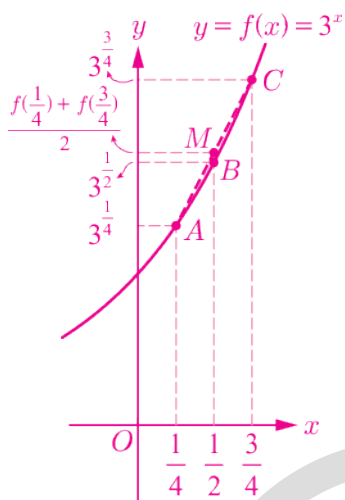
5 例題

指數函數圖形的凹向性

練習

已知函數 $f(x)=3^x$ ，試比較 $f(\frac{1}{2})$ 與 $\frac{f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})}{2}$ 的大小關係。

解



令 $A(\frac{1}{4}, 3^{\frac{1}{4}})$, $B(\frac{1}{2}, 3^{\frac{1}{2}})$, $C(\frac{3}{4}, 3^{\frac{3}{4}})$

\overline{AC} 的中點

$$M(\frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}{2}, \frac{3^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{3}{4}}}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4})}{2})$$

\therefore 函數 $f(x)=3^x$ 圖形為凹向上

$$\therefore \frac{f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4})}{2} = \frac{3^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{3}{4}}}{2} > 3^{\frac{1}{2}} = f(\frac{1}{2})$$

$$\text{即 } \frac{f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4})}{2} > f(\frac{1}{2})$$

<另解>

$$\therefore 3^{\frac{1}{4}} > 0 \text{ 且 } 3^{\frac{3}{4}} > 0, \text{ 又 } 3^{\frac{1}{4}} \neq 3^{\frac{3}{4}}$$

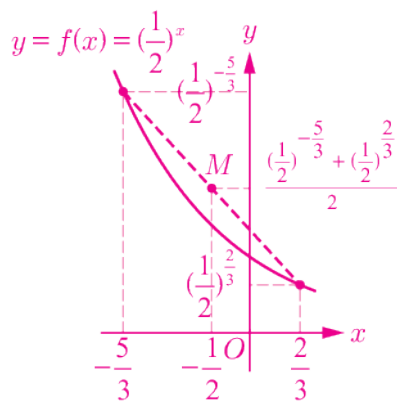
\therefore 由算幾不等式可得

$$\frac{3^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{3}{4}}}{2} > \sqrt{3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{3}{4}}} = 3^{\frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}{2}} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{即 } \frac{f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4})}{2} > f(\frac{1}{2})$$

已知 $a = \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} + (\frac{1}{2})^{-\frac{5}{3}}}{2}$, $b = (\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}$ ，試比較 a, b 的大小關係。

解



令 $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

\therefore 函數 $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ 圖形為凹向上，且

$$\begin{aligned} \frac{\frac{2}{3} + (-\frac{5}{3})}{2} &= -\frac{1}{2} \\ \therefore \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} + (\frac{1}{2})^{-\frac{5}{3}}}{2} &> (\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

即 $a > b$

<另解>

$$\therefore (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} > 0 \text{ 且 } (\frac{1}{2})^{-\frac{5}{3}} > 0, \text{ 又 } (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} \neq (\frac{1}{2})^{-\frac{5}{3}}$$

\therefore 由算幾不等式可得

$$\begin{aligned} \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} + (\frac{1}{2})^{-\frac{5}{3}}}{2} &> \sqrt{(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} \times (\frac{1}{2})^{-\frac{5}{3}}} \\ &= (\frac{1}{2})^{\frac{\frac{2}{3} + (-\frac{5}{3})}{2}} = (\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

即 $a > b$

6 例題

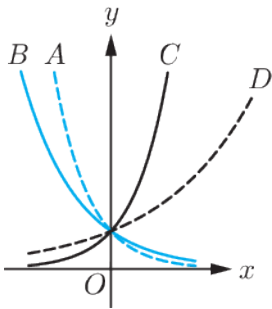
指數函數圖形的判斷

配合課本習題 1-1 第 2 題

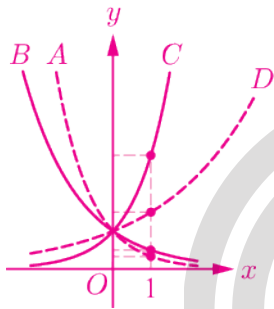
練習

1

下圖中有 A, B, C, D 四條曲線，試問：函數 $y = (\frac{1}{2})^x$, $y = 3^{-x}$, $y = (1.5)^x$, $y = 3^x$ 分別對應的圖形為何？



解



$$y = 3^{-x} = (3^{-1})^x = (\frac{1}{3})^x$$

\therefore 鉛直線 $x=1$ 分別與函數 $y = (\frac{1}{2})^x$, $y = 3^{-x}$

$y = (1.5)^x$, $y = 3^x$ 的圖形交於點

$(1, \frac{1}{2})$, $(1, \frac{1}{3})$, $(1, 1.5)$, $(1, 3)$

且 $3 > 1.5 > 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

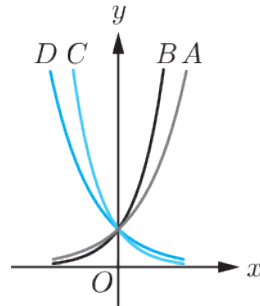
$\therefore A$ 是 $y = (\frac{1}{3})^x = 3^{-x}$ 的圖形

B 是 $y = (\frac{1}{2})^x$ 的圖形

C 是 $y = 3^x$ 的圖形

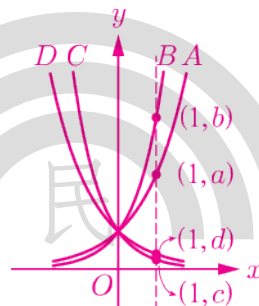
D 是 $y = (1.5)^x$ 的圖形

下圖中有 A, B, C, D 四條曲線，其對應的函數依序為 $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ 與 $y = d^x$ ，試比較 a, b, c, d 的大小關係。



解

作直線 $x=1$ 與 A, B, C, D 四函數圖形分別交於 $(1, a)$, $(1, b)$, $(1, c)$, $(1, d)$



由圖形可知 $b > a > d > c$

7 例題

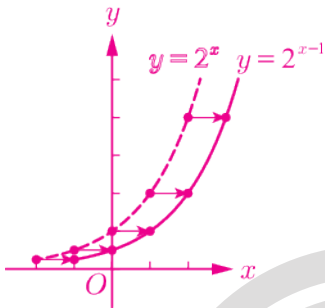
指數函數圖形的平移

練習

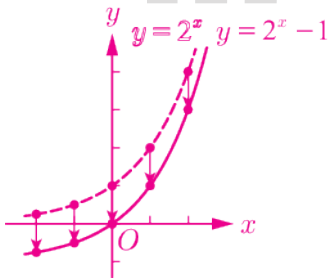
試利用 $y = f(x) = 2^x$ 的圖形，描繪下列各函數的圖形：

- (1) $y = g(x) = 2^{x-1}$ 。
 (2) $y = h(x) = 2^x - 1$ 。

解 (1) $y = 2^{x-1} = f(x-1)$ 的圖形可由 $y = f(x) = 2^x$ 的圖形右移 1 單位而得，如下所示



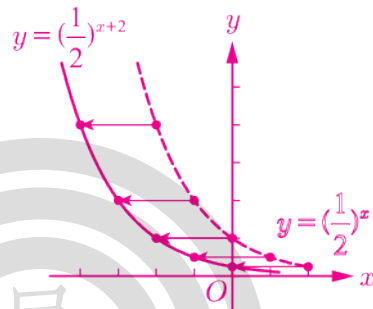
(2) $y = 2^x - 1 = f(x) - 1$ 的圖形可由 $y = f(x) = 2^x$ 的圖形下移 1 單位而得，如下所示



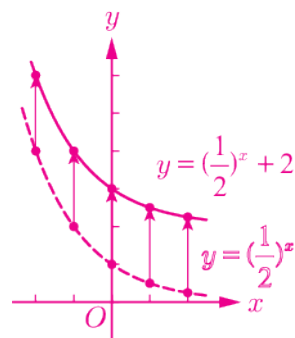
試利用 $y = f(x) = (\frac{1}{2})^x$ 的圖形，描繪下列各函數的圖形：

- (1) $y = g(x) = (\frac{1}{2})^{x+2}$ 。
 (2) $y = h(x) = (\frac{1}{2})^x + 2$ 。

解 (1) $y = (\frac{1}{2})^{x+2} = f(x+2)$ 的圖形可由 $y = f(x) = (\frac{1}{2})^x$ 的圖形左移 2 單位而得，如下所示



(2) $y = (\frac{1}{2})^x + 2 = f(x) + 2$ 的圖形可由 $y = f(x) = (\frac{1}{2})^x$ 的圖形上移 2 單位而得，如下所示



類題

若將指數函數 $y = 3^x$ 的圖形向右平移 1 單位，再向上平移 2 單位後，會與下列哪一個函數的圖形重合？

- (A) $y = 3^{x+1} + 2$ (B) $y = 3^{x-2} + 1$ (C) $y = 3^{x-1} - 2$ (D) $y = 3^{x-1} + 2$ (E) $y = 3^{x-2} - 1$

解 $y = 3^x \xrightarrow[1 \text{ 單位}]{\text{右移}} y = 3^{x-1} \xrightarrow[2 \text{ 單位}]{\text{上移}} y = 3^{x-1} + 2$ ，故選(D)

主題 2 指數方程式與不等式

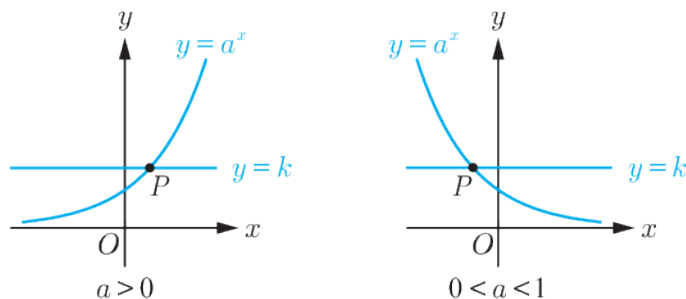
配合課本 P.14~P.16

1. 指數方程式

(1) 未知數出現在指數位置的方程式，稱為指數方程式。

例如 $2^x = 8$ 就是一個指數方程式。

(2) 在指數方程式中因為底數 $a > 0$ ，所以在 x 軸上方的任一水平線 $y = k$ 都與 $y = a^x$ 的圖形恰交於一點 P ，如下圖所示，此時 P 點的 x 坐標即為方程式 $a^x = k$ 的唯一實根。由此可知，當 $a^{x_1} = a^{x_2}$ 時，可得 $x_1 = x_2$ 。



2. 指數不等式

由指數函數 $y = a^x$ 的圖形，可知其遞增或遞減特性：

(1) 當 $a > 1$ 時，若 $x_1 < x_2$ ，則 $a^{x_1} < a^{x_2}$ ；反之，若 $a^{x_1} < a^{x_2}$ ，則 $x_1 < x_2$ 。

(2) 當 $0 < a < 1$ 時，若 $x_1 < x_2$ ，則 $a^{x_1} > a^{x_2}$ ；反之，若 $a^{x_1} > a^{x_2}$ ，則 $x_1 < x_2$ 。

因此，底數相同的指數可以比較大小，**例如** $2^\pi > 2^{\sqrt{2}}$ ， $(0.3)^{\sqrt{2}} < (0.3)^{0.5}$ 。而底數不同的指數則可化成相同底數，也就可以比較大小。

8

例題

解指數方程式



練習

試解下列各指數方程式：

(1) $2^x = 8\sqrt{2}$ 。

(2) $2^{x+12} = 8^x$ 。

(3) $2^{x^2-3x-10} = 3^{x^2-3x-10}$ 。

(4) $2^{2x+1} - 33 \cdot 2^{x-2} + 1 = 0$ 。

解

(1) $2^x = 8\sqrt{2} \Rightarrow 2^x = 2^{\frac{7}{2}}, \therefore x = \frac{7}{2}$

(2) $2^{x+12} = 8^x \Rightarrow 2^{x+12} = 2^{3x}$

$\Rightarrow x + 12 = 3x \Rightarrow 2x = 12, \therefore x = 6$

(3) $2^{x^2-3x-10} = 3^{x^2-3x-10} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x-10} = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-5) = 0$

$\therefore x = -2$ 或 5

(4) $2^{2x+1} - 33 \cdot 2^{x-2} + 1 = 0$

$\Rightarrow 2 \cdot (2^x)^2 - \frac{33}{4} \cdot 2^x + 1 = 0$

$\Rightarrow 8 \cdot (2^x)^2 - 33 \cdot 2^x + 4 = 0$

$\Rightarrow (2^x - 4)(8 \cdot 2^x - 1) = 0$

$\Rightarrow 2^x = 4$ 或 $2^x = \frac{1}{8}$

$\therefore x = 2$ 或 -3

試解下列各指數方程式：

(1) $9^x = 27\sqrt[5]{3}$ 。

(2) $3^{x^2+16x-55} = 9$ 。

(3) $9^{2x^2-50} = 6^{2x^2-50}$ 。

(4) $5^{2x-1} - 126 \cdot 5^{x-2} + 1 = 0$ 。

解

(1) $9^x = 27\sqrt[5]{3} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{3+\frac{1}{5}} = 3^{\frac{16}{5}} \Rightarrow 2x = \frac{16}{5}$

$\therefore x = \frac{8}{5}$

(2) $3^{x^2+16x-55} = 9 = 3^2 \Rightarrow x^2 + 16x - 55 = 2$

$\Rightarrow x^2 + 16x - 57 = 0 \Rightarrow (x+19)(x-3) = 0$

$\therefore x = -19$ 或 3

(3) $9^{2x^2-50} = 6^{2x^2-50} \Rightarrow \left(\frac{6}{9}\right)^{2x^2-50} = 1 = \left(\frac{6}{9}\right)^0$

$\Rightarrow 2x^2 - 50 = 0 \Rightarrow x^2 - 25 = 0$

$\therefore x = \pm 5$

(4) $5^{2x-1} - 126 \cdot 5^{x-2} + 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{5} \cdot (5^x)^2 - \frac{126}{25} \cdot 5^x + 1 = 0$

$\Rightarrow 5 \cdot (5^x)^2 - 126 \cdot 5^x + 25 = 0$

$\Rightarrow (5^x - 25)(5 \cdot 5^x - 1) = 0$

$\Rightarrow 5^x = 25$ 或 $5^x = \frac{1}{5}$

$\therefore x = 2$ 或 -1

9

例題

解指數不等式



試解下列各不等式：

(1) $2^{x^2+x+2} \geq 16^{x+3}$ 。

(2) $(0.25)^{2x^2+6x-12} < 0.125$ 。

(3) $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 \leq 0$ 。

解 (1) $2^{x^2+x+2} \geq 16^{x+3} \Rightarrow 2^{x^2+x+2} \geq (2^4)^{x+3} = 2^{4x+12}$
 $\Rightarrow x^2 + x + 2 \geq 4x + 12 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 \geq 0$
 $\Rightarrow (x+2)(x-5) \geq 0$
 $\therefore x \geq 5$ 或 $x \leq -2$

(2) $(0.25)^{2x^2+6x-12} < 0.125$
 $\Rightarrow [(0.5)^2]^{2x^2+6x-12} < (0.5)^3$
 $\Rightarrow (0.5)^{4x^2+12x-24} < (0.5)^3$
 $\Rightarrow 4x^2 + 12x - 24 > 3$
 $\Rightarrow 4x^2 + 12x - 27 > 0$
 $\Rightarrow (2x+9)(2x-3) > 0$
 $\therefore x > \frac{3}{2}$ 或 $x < -\frac{9}{2}$

(3) $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 \leq 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 8 \cdot 3^x - 9 \leq 0$
 設 $3^x = t > 0$ ，則原式可改寫為 $t^2 - 8t - 9 \leq 0$
 $\Rightarrow (t+1)(t-9) \leq 0$
 $\therefore t+1 > 0, \therefore t-9 \leq 0$
 $\Rightarrow t \leq 9$ ，即 $3^x \leq 9$
 $\therefore x \leq 2$

試解下列各不等式：

(1) $9^{x+2} \geq 3^{2x^2}$ 。

(2) $(0.5)^{x^2-2x-12} > 2^{x+6}$ 。

(3) $9^x - 82 \cdot 3^{x+1} + 729 \leq 0$ 。

解 (1) $9^{x+2} \geq 3^{2x^2} \Rightarrow 3^{2x+4} \geq 3^{2x^2}$
 $\Rightarrow 2x+4 \geq 2x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 \leq 0$
 $\Rightarrow (x+1)(x-2) \leq 0$
 $\therefore -1 \leq x \leq 2$

(2) $(0.5)^{x^2-2x-12} > 2^{x+6}$
 $\Rightarrow (2^{-1})^{x^2-2x-12} > 2^{x+6} \Rightarrow 2^{-x^2+2x+12} > 2^{x+6}$
 $\Rightarrow -x^2 + 2x + 12 > x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 < 0$
 $\Rightarrow (x+2)(x-3) < 0$
 $\therefore -2 < x < 3$

(3) $9^x - 82 \cdot 3^{x+1} + 729 \leq 0$
 $\Rightarrow (3^x)^2 - 246 \cdot 3^x + 729 \leq 0$
 設 $3^x = t > 0$ ，則原式可改寫為
 $t^2 - 246t + 729 \leq 0$
 $\Rightarrow (t-3)(t-243) \leq 0$
 $\Rightarrow 3 \leq t \leq 243$ ，即 $3 \leq 3^x \leq 243$
 $\therefore 1 \leq x \leq 5$

主題 3 指數函數的應用

配合課本 P.18~P.21

1. 複利的本利和

- (1) 將本金 P 存入金融機構 n 年，年利率為 r ，每年以複利計息一次，則 n 年後本金與利息的總和（簡稱「本利和」）為 $P(1+r)^n$ 。
- (2) 將本金 P 存入金融機構 n 年，年利率為 r ，每 $\frac{1}{k}$ 年為一期複利計息一次，則每一期的利率為 $\frac{r}{k}$ ， n 年（共有 kn 期）後的本利和為 $P(1+\frac{r}{k})^{kn}$ 。

2. 連續複利

假設存入的本金為 1 單位，年利率為 100%，並以複利的方式計算：

- (1) 若每一年為一期計息一次，則每一期的利率為 100%，1 年後的本利和為 $(1+1)^1 = 2$ （單位）。
- (2) 若每半年為一期計息一次，則每一期的利率為 $\frac{1}{2} \times 100\%$ ，1 年後的本利和為 $(1+\frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} = 2.25$ （單位）。
- (3) 若每四個月為一期計息一次，則每一期的利率為 $\frac{1}{3} \times 100\%$ ，1 年後的本利和為 $(1+\frac{1}{3})^3 = \frac{64}{27} \approx 2.3704$ （單位）。
- (4) 若每三個月為一期計息一次，則每一期的利率為 $\frac{1}{4} \times 100\%$ ，1 年後的本利和為 $(1+\frac{1}{4})^4 = \frac{625}{256} \approx 2.4414$ （單位）。
- (5) 以此類推，如果一年複利計息 n 次，則每次的利率為 $\frac{1}{n} \times 100\%$ ，1 年後的本利和為 $(1+\frac{1}{n})^n$ 。當 n 趨近於無限大時，這就是連續複利的概念， $(1+\frac{1}{n})^n$ 的值會趨近一個定值 e ， $e \approx 2.71828$ 。

n	10	100	1000	10000	100000	1000000
$(1+\frac{1}{n})^n$ 的近似值	2.59374	2.70481	2.71692	2.71815	2.71827	2.71828

10 例題

指數函數的應用

配合課本例題 8

練習

1

放射性物質的所謂「半衰期」，是指它的放射性原子數量減為原來一半所需要的時間。若某放射性元素在 x 年後的質量為 y 公克，所滿足的指數函數為 $y = f(x) = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{40}}$

($x \geq 0$)，試問：

- (1) 此放射性元素原來的質量為何？
- (2) 它的半衰期有多長？
- (3) 經過幾年後，這個放射性元素質量僅剩 1 公克？

解

(1) 所求 $= f(0) = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{0}{40}} = 32$ (公克)

(2) 設此物質的半衰期為 t 年

$$\text{則 } f(t) = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{40}} = 32 \cdot \frac{1}{2} = 16$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{40}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{t}{40} = 1 \Rightarrow t = 40$$

即所求半衰期為 40 年

(3) 設所求需經過 T 年

$$\text{則 } f(T) = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{T}{40}} = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{T}{40}} = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\Rightarrow \frac{T}{40} = 5 \Rightarrow T = 200$$

即所求需經過 200 年

已知某放射性元素在 3×10^5 年後衰變了 $\frac{31}{32}$ ，即剩下原來的 $\frac{1}{32}$ ，則

- (1) 此元素的半衰期為何？
- (2) 經過 24 萬年後，此元素的質量剩下原來的幾分之幾？

解

(1) 設所求之半衰期為 t 年

$$\text{則 } \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3 \times 10^5}{t}} = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\Rightarrow t = \frac{3 \times 10^5}{5} = 6 \times 10^4$$

即所求半衰期為 6×10^4 年

(2) 所求 $= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24 \times 10^4}{6 \times 10^4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

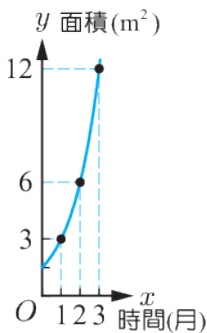
11 例題

指數函數的應用

練習

下圖為某池塘中布袋蓮蔓延的面積 (y 平方公尺) 與時間 (x 個月) 的關係圖, 假設兩者的關係滿足函數 $y = k \cdot a^x$, 其中 k 是一個常數。

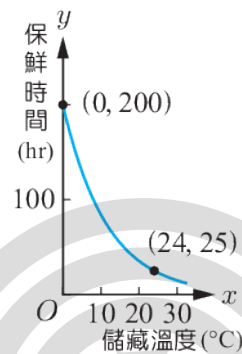
- (1) 試求數對 (k, a) 。
- (2) 試求在第 4 個月時, 布袋蓮的面積為何?
- (3) 布袋蓮從 5 平方公尺蔓延到 20 平方公尺需時多久?



- 解** (1) 由圖形可知, 此函數過 $(1, 3)$, $(2, 6)$ 兩點
- $$\therefore \begin{cases} 3 = k \cdot a^1 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 6 = k \cdot a^2 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$
- 由 $\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 得 $a = 2$, 代入 $\textcircled{1}$ 得 $3 = 2k \Rightarrow k = \frac{3}{2}$
- \therefore 數對 $(k, a) = (\frac{3}{2}, 2)$
- (2) $x = 4$ 代入 $y = \frac{3}{2} \cdot 2^x$ 得 $y = \frac{3}{2} \cdot 2^4 = 24$ (平方公尺)
- (3) 設布袋蓮面積蔓延到 5 平方公尺、20 平方公尺所需的時間分別為 t_1, t_2
- $$\text{則} \begin{cases} 5 = \frac{3}{2} \cdot 2^{t_1} \cdots \cdots \textcircled{3} \\ 20 = \frac{3}{2} \cdot 2^{t_2} \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$
- 由 $\textcircled{4} \div \textcircled{3}$ 得 $2^{t_2 - t_1} = 4 \Rightarrow t_2 - t_1 = 2$
- \therefore 所求即為 $t_2 - t_1 = 2$ (個月)

鮮奶的保鮮時間會因其儲藏的溫度而不同。當儲藏溫度為 $x^\circ\text{C}$ 時, 可保鮮 $f(x) = k \cdot a^x$ 小時, 其中 k, a 是常數。下圖是 $y = f(x)$ 的部分圖形。

- (1) 試求數對 (k, a) 。
- (2) 夏季時室溫常高達 32°C , 此時鮮奶在室溫下的保鮮時間為幾小時?



- 解** (1) 由圖形可知, 此函數過 $(0, 200)$, $(24, 25)$ 兩點
- $$\therefore \begin{cases} 200 = k \cdot a^0 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 25 = k \cdot a^{24} \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$
- 由 $\textcircled{1}$ 得 $k = 200$, 代入 $\textcircled{2}$ 得 $200 \cdot a^{24} = 25$
- $$\Rightarrow a^{24} = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{24}} = (2^{-3})^{\frac{1}{24}} = 2^{-\frac{1}{8}}$$
- \therefore 數對 $(k, a) = (200, 2^{-\frac{1}{8}})$
- (2) $x = 32$ 代入 $y = 200 \cdot (2^{-\frac{1}{8}})^x = 200 \cdot 2^{-\frac{x}{8}}$ 得
- $$y = 200 \cdot 2^{-\frac{32}{8}} = 200 \cdot 2^{-4} = 200 \cdot \frac{1}{16} = 12.5 \text{ (小時)}$$

12 例題

指數函數的應用

配合課本 P.20 隨堂練習、例題 9

練習

1

阿三將 100000 元存入銀行，年利率為 2% 的定期存款，以複利計息，

- (1) 若每年計息一次，則二年後阿三共有多少存款？
- (2) 若每半年計息一次，則二年後阿三共有多少存款？(四捨五入到整數位)

解 (1) 所求 = $100000 \times (1 + 2\%)^2$
 $= 100000 \times 1.0404 = 104040$ (元)

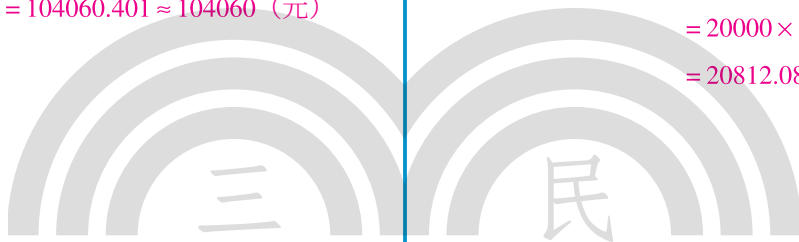
(2) 每半年計息一次，利率變為 $2\% \times \frac{1}{2} = 1\%$
 因此，所求 = $100000 \times (1 + 1\%)^4$
 $= 100000 \times 1.04060401$
 $= 104060.401 \approx 104060$ (元)

小民將 20000 元存入銀行，年利率為 4% 的高利率定期存款，以複利計息，

- (1) 若每半年計息一次，則一年後小民共有多少存款？
- (2) 若每三個月計息一次，則一年後小民共有多少存款？(四捨五入到整數位)

解 (1) 每半年計息一次，利率變為 $4\% \times \frac{1}{2} = 2\%$
 因此，所求 = $20000 \times (1 + 2\%)^2$
 $= 20000 \times 1.0404 = 20808$ (元)

(2) 每三個月計息一次，利率變為 $4\% \times \frac{1}{4} = 1\%$
 因此，所求 = $20000 \times (1 + 1\%)^4$
 $= 20000 \times 1.04060401$
 $= 20812.0802 \approx 20812$ (元)



資優園地

13 例題

含有絕對值的指數函數圖形之描繪

練習

試畫出下列各函數的圖形：

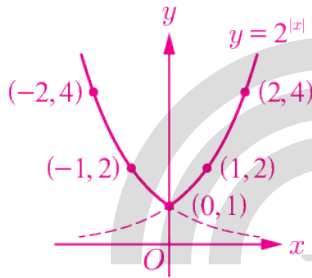
(1) $y = f(x) = 2^{|x|}$ 。 (2) $y = g(x) = (\frac{1}{2})^{|x|}$ 。

解 (1) ① 當 $x \geq 0$ 時, $y = 2^x$

② 當 $x \leq 0$ 時, $y = 2^{-x} = (\frac{1}{2})^x$

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x) = 2^{ x }$	4	2	1	2	4

因此, $y = f(x) = 2^{|x|}$ 的圖形如下

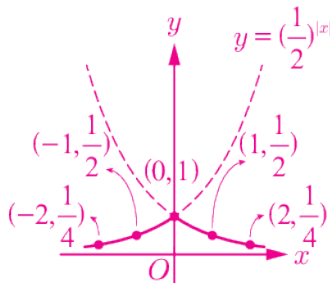


(2) ① 當 $x \geq 0$ 時, $y = (\frac{1}{2})^x$

② 當 $x \leq 0$ 時, $y = (\frac{1}{2})^{-x} = (2^{-1})^{-x} = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2
$y = g(x) = (\frac{1}{2})^{ x }$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

因此, $y = g(x) = (\frac{1}{2})^{|x|}$ 的圖形如下



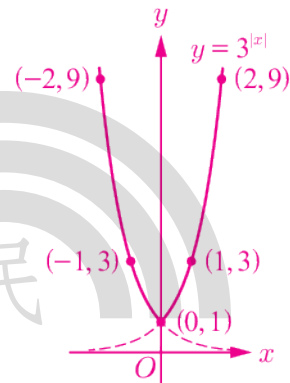
試畫出下列各函數的圖形：

(1) $y = f(x) = 3^{|x|}$ 。 (2) $y = g(x) = (\frac{1}{3})^{|x|}$ 。

解 (1) ① 當 $x \geq 0$ 時, $y = 3^x$

② 當 $x \leq 0$ 時, $y = 3^{-x} = (\frac{1}{3})^x$

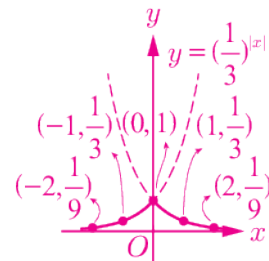
x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x) = 3^{ x }$	9	3	1	3	9



(2) ① 當 $x \geq 0$ 時, $y = (\frac{1}{3})^x$

② 當 $x \leq 0$ 時, $y = (\frac{1}{3})^{-x} = (3^{-1})^{-x} = 3^x$

x	-2	-1	0	1	2
$y = g(x) = (\frac{1}{3})^{ x }$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$



14 例題

不同底數之指數的比較大小

練習

1

試比較下列各數的大小：

(1) $a = 2^{12}$, $b = 3^8$, $c = 5^6$ 。

(2) $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$, $c = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{5}}$ 。

解 (1) $a = 2^{12} = (2^6)^2 = 64^2$
 $b = 3^8 = (3^4)^2 = 81^2$
 $c = 5^6 = (5^3)^2 = 125^2$
 $\therefore 125 > 81 > 64$, $\therefore 125^2 > 81^2 > 64^2$
 即 $c > b > a$

(2) $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{6}}$

$b = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{6}}$

$\therefore a > b$

又 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]^{\frac{1}{10}} = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{10}}$

$c = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{5}} = \left[\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]^{\frac{1}{10}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{10}}$

$\therefore c > a$

故 $c > a > b$

試比較下列各數的大小：

(1) $a = 2^{90}$, $b = 3^{60}$, $c = 5^{40}$ 。

(2) $a = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$, $b = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{5}}$, $c = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}}$ 。

解 (1) $a = 2^{90} = (2^9)^{10} = 512^{10}$
 $b = 3^{60} = (3^6)^{10} = 729^{10}$
 $c = 5^{40} = (5^4)^{10} = 625^{10}$
 $\therefore 729 > 625 > 512$, $\therefore 729^{10} > 625^{10} > 512^{10}$
 即 $b > c > a$

(2) $a = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^5\right]^{\frac{1}{20}} = \left(\frac{1}{1024}\right)^{\frac{1}{20}}$

$b = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{5}} = \left[\left(\frac{1}{5}\right)^4\right]^{\frac{1}{20}} = \left(\frac{1}{625}\right)^{\frac{1}{20}}$

$\therefore b > a$

又 $b = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{5}} = \left[\left(\frac{1}{5}\right)^6\right]^{\frac{1}{30}} = \left(\frac{1}{15625}\right)^{\frac{1}{30}}$

$c = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}} = \left[\left(\frac{1}{6}\right)^5\right]^{\frac{1}{30}} = \left(\frac{1}{7776}\right)^{\frac{1}{30}}$

$\therefore c > b$

故 $c > b > a$

15 例題

指數方程式的實根個數

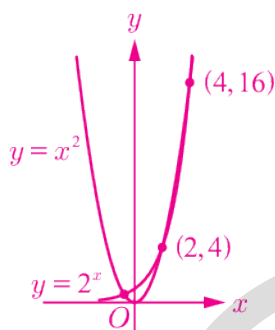
練習

試求下列各方程式的實根個數：

(1) $2^x = x^2$ 。 (2) $2^{-|x|} = x^2$ 。

解 (1) 方程式 $2^x = x^2$ 的實根個數即 $y = 2^x$ 與 $y = x^2$ 兩圖形的交點個數

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32
$y = x^2$	4	1	0	1	4	9	16	25

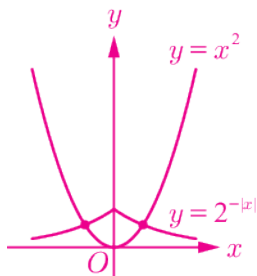


由上圖可知， $y = 2^x$ 與 $y = x^2$ 有 3 個相異的交點

∴ 方程式 $2^x = x^2$ 有 3 個相異實根

(2) 方程式 $2^{-|x|} = x^2$ 的實根個數即 $y = 2^{-|x|}$ 與 $y = x^2$ 兩圖形的交點個數

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2^{- x }$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$y = x^2$	4	1	0	1	4



由上圖可知， $y = 2^{-|x|}$ 與 $y = x^2$ 有 2 個相異的交點

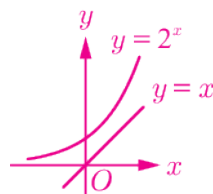
∴ 方程式 $2^{-|x|} = x^2$ 有 2 個相異實根

下列各方程式中，哪些恰有 1 個實根？

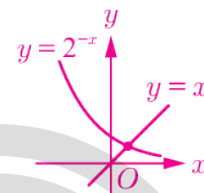
(A) $2^x = x$ (B) $2^{-x} = x$ (C) $2^{|x|} = x$

(D) $-2^x = x$ (E) $2^{-|x|} = x$

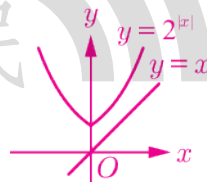
解 (A) ×：由圖形可知，方程式 $2^x = x$ 沒有實根



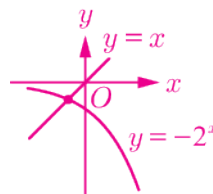
(B) ○：由圖形可知，方程式 $2^{-x} = x$ 恰有 1 個實根



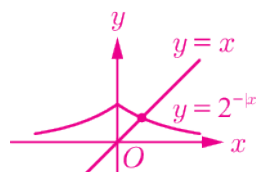
(C) ×：由圖形可知，方程式 $2^{|x|} = x$ 沒有實根



(D) ○：由圖形可知，方程式 $-2^x = x$ 恰有 1 個實根



(E) ○：由圖形可知，方程式 $2^{-|x|} = x$ 恰有 1 個實根



故選(B)(D)(E)

16

例題

含指數形式之函數的最大、最小值

練習

1

設 $f(x) = 4^x - 2^{x+1} - 1$ ，其中 $-1 \leq x \leq 1$ ，試求 $f(x)$ 的最大值與最小值。

解 $f(x) = 4^x - 2^{x+1} - 1 = (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 1$
 設 $2^x = t$
 $\because -1 \leq x \leq 1, \therefore 2^{-1} \leq 2^x \leq 2^1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq 2$
 $f(x) = t^2 - 2t - 1 = (t-1)^2 - 2$
 因此，當 $t=1$ 時，即 $2^x = 1 \Rightarrow x=0$
 $f(x)$ 有最小值 -2
 當 $t=2$ 時，即 $2^x = 2 \Rightarrow x=1$
 $f(x)$ 有最大值 $=(2-1)^2 - 2 = -1$

設 $f(x) = 25^x - 6 \times 5^x - 1$ ，其中 $-1 \leq x \leq 1$ ，試求 $f(x)$ 的最大值與最小值。

解 $f(x) = 25^x - 6 \times 5^x - 1 = (5^x)^2 - 6 \times 5^x - 1$
 設 $5^x = t$
 $\because -1 \leq x \leq 1, \therefore 5^{-1} \leq 5^x \leq 5^1 \Rightarrow \frac{1}{5} \leq t \leq 5$
 $f(x) = t^2 - 6t - 1 = (t-3)^2 - 10$
 因此，當 $t=3$ 時， $f(x)$ 有最小值 -10
 當 $t = \frac{1}{5}$ 時，即 $5^x = \frac{1}{5} \Rightarrow x = -1$
 $f(x)$ 有最大值 $=(\frac{1}{5}-3)^2 - 10 = -\frac{54}{25}$





1-1 自我評量

基礎題

1. 已知 $a = \sqrt[3]{4}$, $b = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{6}}$, $c = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}$, 則 a, b, c 的大小關係為何?

解 $a < c < b$

2. 已知 $a = (0.99)^{-3.5}$, $b = (0.99)^{-2.5}$, $c = (0.99)^{-1.5}$, $d = (0.99)^{-0.5}$, 則 a, b, c, d 的大小關係為何?

解 $a > b > c > d$

3. 解下列各方程式：

(1) $3^{x^2} = 3^{2x}$ 。

(2) $4^{3x^2} = 2^{10x+4}$ 。

(3) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$ 。

解 (1) 0 或 2 (2) $-\frac{1}{3}$ 或 2 (3) 0 或 1

4. 解下列指數不等式：

(1) $5^{x^2+x} < 5^2$ 。

(2) $(0.3)^{x^2-3x-2} > 0.09$ 。

(3) $5^{6x^2-7x+6} < 625$ 。

解 (1) $-2 < x < 1$ (2) $-1 < x < 4$ (3) $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$

5. 方程式 $5^x - 6 \times 5^{1+\frac{x}{2}} + 125 = 0$ 之解為何?

解 $x = 2$ 或 4

6. 方程式 $2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}$ 之解為何?

解 $x = -1$ 或 1

7. 不等式 $4^x - 3 \times 2^{x+2} + 32 < 0$ 之解為何?

解 $2 < x < 3$

8. 不等式 $(2^x + 5)(2^x - 1)(2^x - 8) \leq 0$ 之解為何?

解 $0 \leq x \leq 3$

9. (1) 下列哪些函數滿足「若 $x_1 < x_2$ ，則 $f(x_1) < f(x_2)$ 」？

(A) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ (B) $f(x) = 2^{-x}$ (C) $f(x) = (\frac{3}{2})^x$ (D) $f(x) = (\frac{1}{3})^{-x}$

(E) $f(x) = \pi^x$ (π 是圓周率)

(2) 設 $a > 0$, $f(x) = a^x$ ，對任意實數 x ，若 x 增加 4 時， $f(x)$ 的值變為原來的 $\frac{1}{16}$ 倍，則 a 之值為何？

解 (1) (C)(D)(E) (2) $\frac{1}{2}$

10. 某池塘中的布袋蓮現在的面積為 30 平方公尺，經過 6 個月之後，它會蔓延到 240 平方公尺的範圍。若蔓延範圍增加的倍數一定，試問 8 個月後布袋蓮蔓延的範圍是多少平方公尺？

解 480

11. 設 A 元素之半衰期為 45 天， B 元素之半衰期為 30 天，現一礦石中 A, B 兩元素質量比為 6:7，則 90 天前，礦石中 A, B 兩元素質量比為何？(註：半衰期為元素質量由 m 衰變為 $\frac{m}{2}$ 所需的時間)

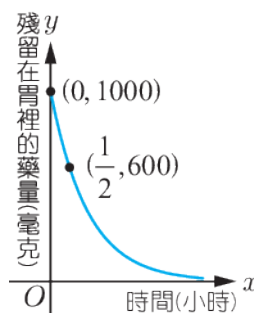
解 3:7

12. 假設阿三服用某種藥品，服藥 x 小時後，殘留在胃裡的藥量有 $f(x) = M \cdot a^x$ (毫克)，其關係圖如右。

(1) 試求 M, a 之值。

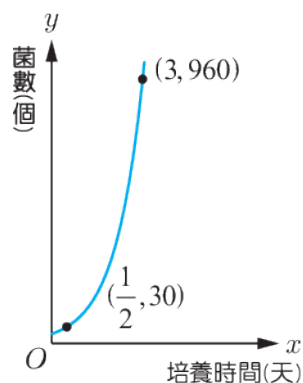
(2) 試問服用該種藥品 1.5 小時後，殘留在阿三胃裡的藥量還有多少毫克？

解 (1) $M = 1000$; $a = \frac{9}{25}$ (2) 216



13. 右圖為某種酵母菌之單位容量的菌數 (y 個) 與培養時間 (x 天) 的關係圖。設其關係為指數函數 $y = k \cdot a^x$, k 是常數。

- (1) 求此函數。
- (2) 培養 1.5 天後，單位容量內有多少個酵母菌？
- (3) 若酵母飲料之酵母菌的單位容量菌數大於 3000 個，飲用後將有助於消化系統，則需培養多少天後，才適合飲用？



解 (1) $y = 15 \cdot 4^x$ (2) 120 個 (3) 4 天

進階題

14. 設 $f(x) = \frac{3 \cdot 2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$, 若 $f(a) = 2, f(b) = \frac{7}{3}$, 試求 $f(a+b)$ 。

解 $\frac{11}{4}$

15. 設 k 為實數，若 $2^{-x} - k \cdot 2^{-\frac{x}{2}} + 8 = 0$ 有兩實根 α 與 β ，則兩根之和 $\alpha + \beta$ 為何？

解 -6

16. 下列哪一個函數的圖形與直線 $x - y = 0$ 沒有交點？

(A) $y = 3^{x-2}$ (B) $y = -3^x$ (C) $y = 3^{-x}$ (D) $y = 3^{|x|}$ (E) $y = 3^{-|x|}$

解 (D)

17. 設 $x > 0$ ，則 $x^{2x^2-5x+3} > x$ 之解為何？

解 $x > 2$ 或 $\frac{1}{2} < x < 1$

18. 設 $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ ，試問：

- (1) 若 α, β 為 $f(x) = \sqrt{40}$ 的解，則 $\alpha + \beta$ 之值為何？
- (2) 若 $f(\alpha) = \sqrt{40}$ ，則 $9^\alpha + 9^{-\alpha}$ 之值為何？
- (3) 若 $y = f(x)$ 與 $y = ax^2$ 的圖形交於 A, B 兩點，已知 $\overline{AB} = 4$ ，則 a 之值為何？

解 (1) 0 (2) 38 (3) $\frac{41}{18}$

1-2 對數律

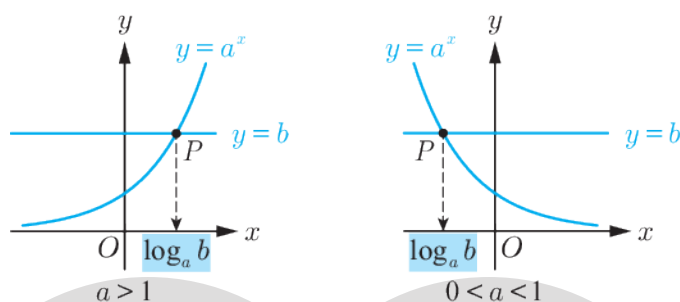
主題 1 對數的定義與性質

配合課本 P.25~P.30

1. 對數的定義

若 $a > 0$, $a \neq 1$ 且 $b > 0$ 時, $a^x = b$ 有唯一實數解, 我們將此唯一實數解記為 $\log_a b$, 即 $x = \log_a b$ 。 $\log_a b$ 稱為「以 a 為底數時, b 的對數」(有時我們也把 $\log_a b$ 叫做「對數式」), 其中 a 稱為「底數」, b 稱為「真數」。

例如 $2^x = 8 \Leftrightarrow x = \log_2 8 = 3$, $3^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_3 5$ 。



註: $\log_a b$ 的底數 $a > 0$, $a \neq 1$, 真數 $b > 0$ 。

例如 $\log_{(-2)} 2$, $\log_{10} 0$, $\log_2(-2)$ 和 $\log_1 2$ 都沒有意義。

2. 當底數 a 為 10 時, 一般會將 $\log_{10} b$ 簡記為 $\log b$, 即第一冊中曾介紹過的「常用對數」。

3. 對數的基本性質

設 $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, x 為實數, 則

$$(1) \log_a 1 = 0 \quad (2) \log_a a = 1 \quad (3) \log_a a^x = x \quad (4) a^{\log_a b} = b$$

4. 對數律

設 x 與 y 都是正數, 且 n 為實數, 則

$$(1) \log xy = \log x + \log y$$

$$(2) \log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

$$(3) \log x^n = n \log x$$

5. 換底公式

設 $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, 則 $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ 。

1 例題

對數的定義

練習

試寫出下列各指數式所對應的對數式：

- (1) $3^4 = 81$ 。 (2) $5^{-2} = \frac{1}{25}$ 。
- (3) $9^{\frac{3}{2}} = 27$ 。 (4) $(\frac{16}{9})^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$ 。

- 解** (1) $3^4 = 81 \Leftrightarrow \log_3 81 = 4$
 (2) $5^{-2} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow \log_5 \frac{1}{25} = -2$
 (3) $9^{\frac{3}{2}} = 27 \Leftrightarrow \log_9 27 = \frac{3}{2}$
 (4) $(\frac{16}{9})^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \log_{\frac{16}{9}} \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$

試寫出下列各指數式所對應的對數式：

- (1) $3^0 = 1$ 。 (2) $5^{-1} = \frac{1}{5}$ 。
- (3) $2^{-3} = 0.125$ 。 (4) $(\frac{4}{9})^{-\frac{3}{2}} = \frac{27}{8}$ 。

- 解** (1) $3^0 = 1 \Leftrightarrow \log_3 1 = 0$
 (2) $5^{-1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \log_5 \frac{1}{5} = -1$
 (3) $2^{-3} = 0.125 \Leftrightarrow \log_2 0.125 = -3$
 (4) $(\frac{4}{9})^{-\frac{3}{2}} = \frac{27}{8} \Leftrightarrow \log_{\frac{4}{9}} \frac{27}{8} = -\frac{3}{2}$

2 例題

對數的定義

練習

試寫出下列各對數式所對應的指數式：

- (1) $\log_3 3 = 1$ 。 (2) $\log_2 8 = 3$ 。
- (3) $\log_5 1 = 0$ 。 (4) $\log_{2.5} \frac{2}{5} = -1$ 。
- (5) $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$ 。

- 解** (1) $\log_3 3 = 1 \Leftrightarrow 3^1 = 3$
 (2) $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$
 (3) $\log_5 1 = 0 \Leftrightarrow 5^0 = 1$
 (4) $\log_{2.5} \frac{2}{5} = -1 \Leftrightarrow (2.5)^{-1} = \frac{2}{5}$
 (5) $\log_{27} 3 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 27^{\frac{1}{3}} = 3$

試寫出下列各對數式所對應的指數式：

- (1) $\log_2 512 = 9$ 。 (2) $\log_{0.6} \frac{25}{9} = -2$ 。
- (3) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$ 。 (4) $\log_2 15 = a$ 。
- (5) $\log_{10} b = 0.301$ 。

- 解** (1) $\log_2 512 = 9 \Leftrightarrow 2^9 = 512$
 (2) $\log_{0.6} \frac{25}{9} = -2 \Leftrightarrow (0.6)^{-2} = \frac{25}{9}$
 (3) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2 \Leftrightarrow (\frac{1}{3})^{-2} = 9$
 (4) $\log_2 15 = a \Leftrightarrow 2^a = 15$
 (5) $\log_{10} b = 0.301 \Leftrightarrow 10^{0.301} = b$

3 例題

對數的求值

配合課本例題 1

練習

試求下列各對數的值：

(1) $\log_5 125$ ° (2) $\log_3 \frac{1}{9}$ ° (3) $\log_{2\sqrt{2}} 512$ °

解 (1) 設 $\log_5 125 = x$ ，則 $5^x = 125 = 5^3$ ，得 $x = 3$
 $\therefore \log_5 125 = 3$

(2) 設 $\log_3 \frac{1}{9} = x$ ，則 $3^x = \frac{1}{9} = 3^{-2}$ ，得 $x = -2$
 $\therefore \log_3 \frac{1}{9} = -2$

(3) 設 $\log_{2\sqrt{2}} 512 = x$
 則 $(2\sqrt{2})^x = 512 \Rightarrow 2^{\frac{3}{2}x} = 2^9 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 9$
 得 $x = 6$
 $\therefore \log_{2\sqrt{2}} 512 = 6$

試求下列各對數的值：

(1) $\log_3 81$ ° (2) $\log_5 \frac{1}{125}$ ° (3) $\log_{3\sqrt{3}} 729$ °

解 (1) 設 $\log_3 81 = x$ ，則 $3^x = 81 = 3^4$ ，得 $x = 4$
 $\therefore \log_3 81 = 4$

(2) 設 $\log_5 \frac{1}{125} = x$ ，則 $5^x = \frac{1}{125} = 5^{-3}$ ，得 $x = -3$
 $\therefore \log_5 \frac{1}{125} = -3$

(3) 設 $\log_{3\sqrt{3}} 729 = x$
 則 $(3\sqrt{3})^x = 729 \Rightarrow 3^{\frac{3}{2}x} = 3^6 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 6$
 得 $x = 4$
 $\therefore \log_{3\sqrt{3}} 729 = 4$

4 例題

對數的基本性質

配合課本 P.27 隨堂練習

練習

試求下列各對數的值：

(1) $\log_2 1$ ° (2) $\log_4 \sqrt[3]{4}$ °

(3) $\log_3 \sqrt[5]{\frac{1}{9}}$ ° (4) $5^{\log_5 25}$ °

解 (1) $\log_2 1 = 0$
 (2) $\log_4 \sqrt[3]{4} = \log_4 4^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$
 (3) $\log_3 \sqrt[5]{\frac{1}{9}} = \log_3 (3^{-2})^{\frac{1}{5}} = \log_3 3^{-\frac{2}{5}} = -\frac{2}{5}$
 (4) $5^{\log_5 25} = 25$

試求下列各對數的值：

(1) $\log_{11} 1$ ° (2) $\log_7 \sqrt{7}$ °

(3) $\log_5 \frac{1}{\sqrt{5}}$ ° (4) $4^{\log_4 3}$ °

解 (1) $\log_{11} 1 = 0$
 (2) $\log_7 \sqrt{7} = \log_7 7^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$
 (3) $\log_5 \frac{1}{\sqrt{5}} = \log_5 (5^{\frac{1}{2}})^{-1} = \log_5 5^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$
 (4) $4^{\log_4 3} = 3$

5 例題

對數律

練習

試求下列各式的值：

- (1) $\log 4 + \log 25$ ° (2) $\log 2000 - \log 2$ °
 (3) $\log \frac{1}{100}$ ° (4) $2\log 125 + 3\log 4$ °
 (5) $3\log \sqrt{2} - \frac{1}{3}\log 125 + \frac{5}{2}\log 5$ °

- 解** (1) 所求 $= \log(4 \times 25) = \log 100 = \log 10^2 = 2$
 (2) 所求 $= \log \frac{2000}{2} = \log 1000 = \log 10^3 = 3$
 (3) 所求 $= \log 10^{-2} = -2$
 (4) 所求 $= 2\log 5^3 + 3\log 2^2$
 $= \log(5^3)^2 + \log(2^2)^3 = \log 5^6 + \log 2^6$
 $= \log(5^6 \times 2^6) = \log 10^6 = 6$
 (5) 所求 $= \log(\sqrt{2})^3 - \log 125^{\frac{1}{3}} + \log 5^{\frac{5}{2}}$
 $= \log \frac{2\sqrt{2} \times 25\sqrt{5}}{5} = \log 10\sqrt{10}$
 $= \log 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

試求下列各式的值：

- (1) $\log \frac{2}{3} + \log 15$ ° (2) $\log \frac{2}{25} - \log 8$ °
 (3) $\log \sqrt[5]{1000}$ ° (4) $2\log 4 + 4\log 5$ °
 (5) $\frac{1}{2}\log 20 - \log \sqrt{2}$ °

- 解** (1) 所求 $= \log(\frac{2}{3} \times 15) = \log 10 = 1$
 (2) 所求 $= \log \frac{2}{25} = \log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2$
 (3) 所求 $= \log 10^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}$
 (4) 所求 $= \log 4^2 + \log 5^4$
 $= \log(2^4 \times 5^4) = \log 10^4 = 4$
 (5) 所求 $= \log \sqrt{20} - \log \sqrt{2}$
 $= \log \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{2}} = \log \sqrt{10} = \log 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

6 例題

對數律

配合課本例題 2

練習

1

試求下列各式的值：

(1) $\log \frac{70}{3} - \log \frac{3}{50} - \log \frac{35}{9}$ 。

(2) $\frac{4 + \log 9 - 4 \log 5}{1 + \frac{1}{2} \log 0.36 + \frac{1}{3} \log 8}$ 。

(3) $(\log 2)^3 + (\log 5)^3 + (\log 5)(\log 8)$ 。

解

(1) 所求 = $\log \frac{70}{3} - \log \frac{3}{50} - \log \frac{35}{9} = \log 100 = \log 10^2 = 2$

(2) 所求 = $\frac{\log 10^4 + \log 9 - \log 5^4}{\log 10 + \log(0.36)^{\frac{1}{2}} + \log 8^{\frac{1}{3}}}$

= $\frac{\log \frac{10^4 \times 9}{5^4}}{\log(10 \times 0.6 \times 2)} = \frac{\log 144}{\log 12}$

= $\frac{\log 12^2}{\log 12} = \frac{2 \log 12}{\log 12} = 2$

(3) 所求 = $(\log 2)^3 + (\log 5)^3 + 3(\log 5)(\log 2)$

= $(\log 2)^3 + (\log 5)^3 + 3(\log 5)(\log 2)(\log 5 + \log 2)$

($\because \log 5 + \log 2 = \log 10 = 1$)

= $(\log 2 + \log 5)^3 = (\log 10)^3 = 1$

試求下列各式的值：

(1) $\log \frac{7}{4} + \frac{4}{5} \log \sqrt{32} - \log 7$ 。

(2) $\frac{\log 1.2}{\log 8 + \log \sqrt{27} - \frac{3}{2}}$ 。

(3) $(\log 2)^2 + (\log 5)^2 + (\log 4)(\log 5)$ 。

解

(1) 所求 = $\log \frac{7}{4} + \log(2^{\frac{5}{2}})^{\frac{4}{5}} - \log 7$
= $\log \frac{7}{4} \times 4 - \log 7$
= $\log 7 - \log 7 = 0$

(2) 所求 = $\frac{\log \frac{12}{10}}{\log 2^3 + \log 3^{\frac{3}{2}} - \log 10^{\frac{3}{2}}}$
= $\frac{\log \frac{12}{10}}{\log \frac{2^3 \times 3^{\frac{3}{2}}}{10^{\frac{3}{2}}}} = \frac{\log \frac{12}{10}}{\log \frac{4^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}}}{10^{\frac{3}{2}}}}$
= $\frac{\log \frac{12}{10}}{\log(\frac{12}{10})^{\frac{3}{2}}} = \frac{\log \frac{12}{10}}{\frac{3}{2} \log \frac{12}{10}} = \frac{2}{3}$

(3) 所求 = $(\log 2)^2 + (\log 5)^2 + 2(\log 2)(\log 5)$
= $(\log 2 + \log 5)^2 = (\log 10)^2 = 1$

7 例題

換底公式

練習

試求下列各式的值：

(1) $\log_2 5 \times \log_5 9 \times \log_9 16$ 。

(2) $(\log_3 5 + \log_9 \frac{1}{5})(\log_{25} 3 + \log_5 27)$ 。

解 (1) 所求 = $\frac{\log 5}{\log 2} \times \frac{\log 9}{\log 5} \times \frac{\log 16}{\log 9}$
 $= \frac{\log 16}{\log 2} = \frac{4 \log 2}{\log 2} = 4$

(2) 所求 = $(\frac{\log 5}{\log 3} + \frac{\log \frac{1}{5}}{\log 9})(\frac{\log 3}{\log 25} + \frac{\log 27}{\log 5})$
 $= (\frac{\log 5}{\log 3} + \frac{-\log 5}{2 \log 3})(\frac{\log 3}{2 \log 5} + \frac{3 \log 3}{\log 5})$
 $= (1 - \frac{1}{2}) \frac{\log 5}{\log 3} \times (\frac{1}{2} + 3) \frac{\log 3}{\log 5}$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{7}{4}$

試求下列各式的值：

(1) $\log_7 5 \times \log_5 10 \times \log \sqrt{7}$ 。

(2) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$ 。

解 (1) 所求 = $\frac{\log 5}{\log 7} \times \frac{1}{\log 5} \times \frac{1}{2} \log 7 = \frac{1}{2}$

(2) 所求 = $(\frac{\log 3}{\log 2} + \frac{\log 9}{\log 4})(\frac{\log 4}{\log 3} + \frac{\log 2}{\log 9})$
 $= (\frac{\log 3}{\log 2} + \frac{2 \log 3}{2 \log 2})(\frac{2 \log 2}{\log 3} + \frac{\log 2}{2 \log 3})$
 $= (1 + 1) \frac{\log 3}{\log 2} \times (2 + \frac{1}{2}) \frac{\log 2}{\log 3}$
 $= 2 \times \frac{5}{2} = 5$

8 例題

換底公式

練習

設 $a = \log 2$, $b = \log 3$, 試以 a , b 表示出下列各式的值：

(1) $\log_2 3$ 。 (2) $\log_6 27$ 。 (3) $\log_5 72$ 。

解 (1) $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{b}{a}$

(2) $\log_6 27 = \frac{\log 27}{\log 6} = \frac{\log 3^3}{\log(2 \times 3)} = \frac{3 \log 3}{\log 2 + \log 3}$
 $= \frac{3b}{a + b}$

(3) $\log_5 72 = \frac{\log 72}{\log 5} = \frac{\log(2^3 \times 3^2)}{\log \frac{10}{2}}$
 $= \frac{3 \log 2 + 2 \log 3}{\log 10 - \log 2}$
 $= \frac{3a + 2b}{1 - a}$

設 $a = \log 2$, $b = \log 3$, 試以 a , b 表示出下列各式的值：

(1) $\log_9 4$ 。 (2) $\log_{36} 50$ 。

解 (1) $\log_9 4 = \frac{\log 4}{\log 9} = \frac{2 \log 2}{2 \log 3} = \frac{a}{b}$

(2) $\log_{36} 50 = \frac{\log 50}{\log 36} = \frac{\log \frac{100}{2}}{\log(2^2 \times 3^2)}$
 $= \frac{\log 100 - \log 2}{2 \log 2 + 2 \log 3} = \frac{2 - a}{2a + 2b}$

主題 2 對數的應用

配合課本 P.31~P.34

1. 設 $a > 0, a \neq 1$ 且 $b > 0, a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ 。

2. 利用計算機可求出的近似值

例如 (1) 欲求 $\log 2$ 的近似值，可在計算機上依序按 $\log \rightarrow 2 \rightarrow =$ 可得

$$\log 2 \approx 0.3010。$$

(2) 欲求 $\log_2 3$ 的近似值，可先將 $\log_2 3$ 改寫為 $\frac{\log 3}{\log 2}$ ，接著在計算機上依序

按 $\log \rightarrow 3 \rightarrow) \rightarrow \div \rightarrow \log \rightarrow 2 \rightarrow) \rightarrow =$ 可得

$$\log_2 3 \approx 1.5850。$$

註：每臺計算機的操作次序可能略有不同。

3. 科學記號與對數

任一正數 x 都可以唯一表示成科學記號 $x = a \times 10^n$ ，其中， n 為整數， $1 \leq a < 10$ 。

因此， $\log x = n + \log a$ ，其中， n 為整數， $0 \leq \log a < 1$ ，我們稱整數 n 為 $\log x$ 的「首數」，小數 $\log a$ 為 $\log x$ 的「尾數」。

例如 (1) $35200 = 3.52 \times 10^4$ ，則 $\log 35200 = \log(3.52 \times 10^4) = \log 10^4 + \log 3.52$
 $\approx 4 + 0.5465$ ，首數為 4，尾數為 0.5465。

(2) $0.0927 = 9.27 \times 10^{-2}$ ，則 $\log 0.0927 = \log(9.27 \times 10^{-2}) = \log 10^{-2} + \log 9.27$
 $\approx -2 + 0.9671$ ，首數為 -2，尾數為 0.9671。

註：由上式可知， n 是科學記號中，底數 10 的次方數；而 a 是尾數 $\log a$ 的真數。

9

例題

對數的應用

配合課本例題 5

練習

試解下列各方程式，並利用計算機求解的近似值（四捨五入到小數點後第四位）：

(1) $10^{3x-2} = 9$ 。 (2) $2^{2x+1} = 7$ 。

解 (1) $10^{3x-2} = 9 \Rightarrow 3x - 2 = \log 9 \Rightarrow 3x = 2 + \log 9$

$$\therefore x = \frac{2 + \log 9}{3} \approx \frac{2 + 0.9542}{3} \approx 0.9847$$

(2) $2^{2x+1} = 7 \Rightarrow 2x + 1 = \log_2 7 \Rightarrow 2x = \log_2 7 - 1$

$$\therefore x = \frac{\log_2 7 - 1}{2} \approx \frac{2.8074 - 1}{2} \approx 0.9037$$

試解下列各方程式，並利用計算機求解的近似值（四捨五入到小數點後第四位）：

(1) $10^{5x+2} = \frac{1}{4}$ 。 (2) $3^{2x+1} = \frac{1}{25}$ 。

解 (1) $10^{5x+2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 5x + 2 = \log \frac{1}{4} = \log 2^{-2} = -2 \log 2$
 $\Rightarrow 5x = -2 \log 2 - 2$

$$\therefore x = \frac{-2 \log 2 - 2}{5} \approx \frac{-0.6021 - 2}{5} \approx -0.5204$$

(2) $3^{2x+1} = \frac{1}{25} \Rightarrow 2x + 1 = \log_3 \frac{1}{25} = \log_3 5^{-2} = -2 \log_3 5$
 $\Rightarrow 2x = -2 \log_3 5 - 1$

$$\therefore x = \frac{-2 \log_3 5 - 1}{2} \approx \frac{-2.9299 - 1}{2} \approx -1.9650$$

10 例題

對數的應用

目前國際使用「芮氏規模」來表示地震的強度，設 $E(r)$ 為地震芮氏規模 r 時震央所釋放出來的能量， r 與 $E(r)$ 的關係如下：

$$\log E(r) = 5.24 + 1.44r。$$

- (1) 某次地震其芮氏規模為 4，試問其震央所釋放的能量 $E(4)$ 為多少？
- (2) 試問芮氏規模 6 的地震，其震央所釋放的能量是芮氏規模 4 的地震震央所釋放能量之多少倍？(整數倍以下捨去，已知 $10^{1.44} \approx 27.54$)

解

- (1) $\log E(4) = 5.24 + 1.44 \times 4 = 11$
 $\therefore E(4) = 10^{11}$
- (2) $\log E(6) = 5.24 + 1.44 \times 6 = 13.88$
 $\therefore E(6) = 10^{13.88}$
 所求 = $\frac{E(6)}{E(4)} = \frac{10^{13.88}}{10^{11}} = 10^{2.88} = (10^{1.44})^2$
 $= (27.54)^2 = 758.4516 \approx 758$ (倍)

聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特 (W/m^2) 來衡量，一般人能感覺出聲音的最小強度為 $I_0 = 10^{-12}$ (W/m^2)；當測得的聲音強度為 I (W/m^2) 時，所產生的噪音分貝數 d 為 $d(I) = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$ 。

- (1) 一隻蚊子振動翅膀測得的聲音強度為 10^{-12} (W/m^2)，求其產生的噪音分貝數。
- (2) 汽車製造廠測試發現，某新車以每小時 60 公里速度行駛時，測得的聲音強度為 10^{-4} (W/m^2)，試問此聲音強度產生的噪音為多少分貝？
- (3) 棒球比賽場中，若一支瓦斯汽笛獨鳴，測得的噪音為 70 分貝，則百支瓦斯汽笛同時同地合鳴，被測得的噪音大約為多少分貝？

【93 數乙】

解

- (1) 所求 = $d(10^{-12}) = 10 \cdot \log \frac{10^{-12}}{10^{-12}} = 0$ (分貝)
- (2) 所求 = $d(10^{-4}) = 10 \cdot \log \frac{10^{-4}}{10^{-12}} = 80$ (分貝)
- (3) 設一支汽笛的聲音強度為 I_1 (W/m^2)
 則 $10 \cdot \log \frac{I_1}{10^{-12}} = 70 \Rightarrow \frac{I_1}{10^{-12}} = 10^7$
 $\therefore I_1 = 10^{-5}$ (W/m^2)
 故所求 = $10 \cdot \log \frac{100I_1}{10^{-12}} = 10 \cdot \log \frac{10^{-3}}{10^{-12}} = 90$
 (分貝)

11 例題

對數的應用

配合課本例題 7

練習

1

2019年12月21日，人類宣布發現目前為止最大的質數為 $2^{82589933} - 1$ ，將此質數化為科學記號，即 $2^{82589933} - 1 = a \times 10^n$ ，其中， n 為整數， $1 \leq a < 10$ 。

- 試求整數 n 的值。
- 此質數是幾位數？

解 (1) $a \times 10^n = 2^{82589933} - 1$
 $\Rightarrow \log(a \times 10^n) = \log(2^{82589933} - 1) \approx \log 2^{82589933}$
 $\Rightarrow n + \log a \approx 82589933 \times \log 2$
 ≈ 24862047.1729
 $\therefore n = 24862047$
 (2) 由(1)可知， $2^{82589933} - 1 = a \times 10^{24862047}$
 因此， $2^{82589933} - 1$ 是 $24862047 + 1 = 24862048$ 位數

已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ，試問：

- 3^{60} 乘開後是幾位數？
- 將 $(\frac{1}{2})^{50}$ 表示成小數時，其在小數點後第幾位開始不為 0？

解 (1) 設 $x = 3^{60}$
 則 $\log x = \log 3^{60} = 60 \times \log 3$
 $\approx 60 \times 0.4771 = 28.626 = 28 + 0.626$
 $\therefore 3^{60}$ 的科學記號為 $3^{60} = a \times 10^{28}$ ，其中
 $1 \leq a < 10$
 故 3^{60} 乘開後是 29 位數
 (2) 設 $x = (\frac{1}{2})^{50}$
 則 $\log x = 50 \log \frac{1}{2} = 50 \times \log 2^{-1}$
 $\approx 50 \times (-0.3010) = -15.05$
 $= -16 + 0.95$
 $\therefore (\frac{1}{2})^{50}$ 的科學記號為 $(\frac{1}{2})^{50} = b \times 10^{-16}$
 其中 $1 \leq b < 10$
 故 $x = (\frac{1}{2})^{50}$ 在小數點後第 16 位開始不為 0

資優園地

1. 對數律

設 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ， x 與 y 都是正數， m, n 為實數且 $m \neq 0$ ，則

- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ 。
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ 。
- $\log_a x^n = n \log_a x$ 。
- $\log_{a^m} x = \frac{1}{m} \log_a x$ 。
- $\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x$ ， $\log_{a^n} x^n = \log_a x$ 。



2. 換底公式

設 a, b, c 均為異於 1 的正數， $d, x > 0$ ，則

$$(1) \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \circ$$

$$(2) \log_b a = \frac{1}{\log_a b} \circ$$

$$(3) \text{連鎖律：} \textcircled{1} \log_a b \times \log_b c = \log_a c \circ$$

$$\textcircled{2} \log_a b \times \log_b c \times \log_c d = \log_a d \circ$$

12

例題

對數律

練習

試求下列各式的值：

$$(1) \log_6 4 + \log_6 9 \circ$$

$$(2) \log_2 20 - \log_2 5 \circ$$

$$(3) \log_4 32 \circ$$

$$(4) 4\log_3 \sqrt{2} - \frac{1}{2}\log_3 96 + \log_3 \frac{\sqrt{2}}{3} \circ$$

$$(5) \log_3 \frac{9\sqrt{2}}{2} + \log_9 2 \circ$$

解 (1) 原式 $= \log_6(4 \times 9) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$

$$(2) \text{原式} = \log_2 \frac{20}{5} = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$$

$$(3) \text{原式} = \log_{2^2} 2^5 = \frac{5}{2} \log_2 2 = \frac{5}{2}$$

$$(4) \text{原式} = \log_3 (\sqrt{2})^4 - \log_3 96^{\frac{1}{2}} + \log_3 \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$= \log_3 \frac{4 \times \sqrt{2}}{\sqrt{96}} = \log_3 \frac{1}{3\sqrt{3}} = \log_3 3^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{3}{2}$$

$$(5) \text{原式} = \log_3 \frac{9\sqrt{2}}{2} + \log_{\frac{1}{9}} 2^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log_3 \frac{9\sqrt{2}}{2} + \log_3 \sqrt{2}$$

$$= \log_3 \left(\frac{9\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \right) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$

試求下列各式的值：

$$(1) \log_4 2 + \log_4 8 \circ$$

$$(2) \log_6 24 - \log_6 \frac{2}{3} \circ$$

$$(3) \log_5 \sqrt{125} \circ$$

$$(4) 2\log_6 9 + 4\log_6 2 \circ$$

$$(5) \log_{\sqrt{2}} 1 + \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{3} + \log_4 6 \circ$$

解 (1) 原式 $= \log_4(2 \cdot 8) = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$

$$(2) \text{原式} = \log_6 \frac{24}{\frac{2}{3}} = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$$

$$(3) \text{原式} = \log_5 5^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$(4) \text{原式} = \log_6 9^2 + \log_6 2^4$$

$$= \log_6(3^4 \cdot 2^4) = \log_6 6^4 = 4$$

$$(5) \text{原式} = 0 + \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{3} + \log_2 \sqrt{6}$$

$$= \log_2 \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{6} \right) = \log_2 4\sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{5}{2}$$

13 例題

對數的運算

練習

試求下列各式的值：

$$(1) 9^{\log_3 2} + \left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 \frac{1}{4}} \quad (2) 2^{-\log_4 25} + 9^{\log_3 \frac{1}{5}}$$

解 (1) 原式 $= (3^2)^{\log_3 2} + (3^{-2})^{\log_3 2^{-2}}$
 $= 3^{2\log_3 2} + 3^{-2\log_3 2^{-2}} = 3^{\log_3 2^2} + 3^{\log_3 (2^{-2})^{-2}}$
 $= 3^{\log_3 4} + 3^{\log_3 16} = 4 + 16 = 20$

(2) 原式 $= 2^{-\log_2 5} + 9^{\log_9 \frac{1}{25}} = 2^{\log_2 5^{-1}} + \frac{1}{25}$
 $= \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = \frac{6}{25}$

試求 $4^{-2\log_4 2} + 9^{\log_3 \frac{1}{2}} - 5^{\log \frac{1}{25}} + 9^{\log_3 2}$ 。

解 原式 $= 4^{\log_4 2^{-2}} + 9^{\log_9 \frac{1}{4}} - 5^{\log_5 2^{-2}} + 9^{\log_9 4}$
 $= 2^{-2} + \frac{1}{4} - 5^{-\log_5 2} + 4$
 $= \frac{9}{2} - 5^{\log_5 2^{-1}}$
 $= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$

14 例題

連鎖律

練習

試求 $\log_3 5 \cdot \log_2 7 \cdot \log_{125} 8 \cdot \log_{49} 9$ 。

解 原式 $= \log_3 5 \cdot \log_2 7 \cdot \log_5 2^3 \cdot \log_7 3^2$
 $= \log_3 5 \cdot \log_2 7 \cdot \log_5 2 \cdot \log_7 3$
 $= \log_2 7 \cdot \log_7 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2$
 $= \log_2 2 = 1$

試求 $\log_9 4 \cdot \log_{25} \sqrt{3} \cdot \log_{\sqrt{2}} 5$ 。

解 原式 $= \log_3 2^2 \cdot \log_5 3^{\frac{1}{2}} \cdot \log_{\frac{1}{2}} 5$
 $= \log_3 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \log_5 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \log_2 5$
 $= \frac{1}{2} (\log_2 5 \cdot \log_5 3 \cdot \log_3 2)$
 $= \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2}$

15 例題

換底公式

練習

設 $a = \log_2 3$, $b = \log_3 11$ ，試以 a, b 表示出 $\log_{66} 44$ 的值。

解 $\because a = \log_2 3, b = \log_3 11$
 $\therefore ab = \log_2 3 \cdot \log_3 11 = \log_2 11$
 因此， $\log_{66} 44 = \frac{\log_2 44}{\log_2 66} = \frac{\log_2 (2^2 \times 11)}{\log_2 (2 \times 3 \times 11)}$
 $= \frac{2\log_2 2 + \log_2 11}{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 11}$
 $= \frac{2 + ab}{1 + a + ab}$

設 $a = \log_2 3$, $b = \log_3 7$ ，試以 a, b 表示出 $\log_{14} 42$ 的值。

解 $\because a = \log_2 3, b = \log_3 7$
 $\therefore ab = \log_2 3 \cdot \log_3 7 = \log_2 7$
 因此， $\log_{14} 42 = \frac{\log_2 42}{\log_2 14} = \frac{\log_2 (2 \times 3 \times 7)}{\log_2 (2 \times 7)}$
 $= \frac{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 7}{\log_2 2 + \log_2 7}$
 $= \frac{1 + a + ab}{1 + ab}$



1-2 自我評量

基礎題

1. 試選出正確的選項。

(A) $\log(8 \times 9) = \log 8 + \log 9$ (B) $\log \frac{2}{3} = \log 2 \div \log 3$ (C) $\log 3^2 = (\log 3)^2$

(D) $\log 16 = 4 \log 2$ (E) $2^{\log_3 2} = 3$

解 (A)(D)

2. 下列哪些式子是正確的？

(A) $\log(-3)^2 = 2 \log(-3)$ (B) $\log 2 = 1 - \log 5$ (C) $\log_{(-3)} 9 = 2$

(D) $\log(2 + 5) = \log 2 \times \log 5$ (E) $\log \frac{7}{3} = \log 7 - \log 3$

解 (B)(E)

3. 試求下列各式的值：

(1) $\log_5 1$ (2) $\log_3 3\sqrt{27}$ (3) $\log_4 128$ (4) $5^{\log_5 6}$ (5) $7^{\frac{\log 9}{\log 7}}$

解 (1) 0 (2) $\frac{5}{2}$ (3) $\frac{7}{2}$ (4) 6 (5) 9

4. 化簡 $\log \frac{1}{6} - \log \frac{125}{42} - \log 56$ 。

解 -3

5. 化簡 $\log \frac{7}{36} + 5 \log 2 - \log \frac{14}{25} + 2 \log 3$ 。

解 2

6. 化簡 $\log \frac{28}{15} - 2 \log \frac{3}{14} + 3 \log \frac{6}{7} - 4 \log \frac{2}{5}$ 。

解 3

7. 化簡 $\log 2 + 2\log \sqrt{5} + \log_4 64$ 。

解 4

8. 化簡 $\log_9 27 + 11^{\log_{11} 6}$ 。

解 $\frac{15}{2}$

9. 化簡 $(\log_3 2 + \log_9 8) \times (\log_2 9 + \log_4 3)$ 。

解 $\frac{25}{4}$

10. 方程式 $(2^x + 1)(3^x - 2)(5^x - 1) = 0$ 的解為何？

解 $\log_3 2$ 或 0

11. 對數 $\log_{(x-2)}(2x^2 - 13x + 20)$ 有意義，則 x 的範圍為何？

解 $2 < x < \frac{5}{2}$ 或 $x > 4$

12. 已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$ ，則 $2^x = 3$ 的根最接近下列哪個數？

(A) 1.4 (B) 1.5 (C) 1.6 (D) 1.7 (E) 1.8

解 (C)

13. 設 $\log 3 = a$, $\log 7 = b$ ，試以 a, b 表示 $\log_{210} 63$ 。

解 $\frac{2a+b}{1+a+b}$

14. pH 值是衡量溶液酸鹼程度的標準，它的定義為： $\text{pH 值} = -\log[H^+]$ ，其中 $[H^+]$ 為氫離子的濃度（莫耳 / 升）。今有 pH 值分別為 3 與 4 的甲、乙兩種酸性溶液，試問：
- (1) 甲溶液氫離子濃度是乙溶液氫離子濃度的多少倍？
 - (2) 若將甲、乙兩種酸性溶液依體積 5 比 4 的比例混合，則混合溶液的 pH 值為何？（答案請四捨五入至小數點後第二位。已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$ ）

解 (1) 10 倍 (2) 3.22

15. 已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 7 \approx 0.8451$ ，試問：
- (1) 126^{35} 乘開後是幾位數？
 - (2) $(\frac{6}{7})^{60}$ 表成小數時，在小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？

解 (1) 74 (2) 5

進階題

16. 已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ，試求 $5^{0.3010}$ 最接近下列哪一個數字？

(A) $2^{0.6}$ (B) $2^{0.7}$ (C) $2^{0.8}$ (D) $2^{0.9}$ (E) 2

解 (B)

17. 已知 $a, b, c > 1$ 且 $x > 0$ 。若 $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$, $\log_c x = 6$ ，則 $\log_{abc} x$ 之值為何？

解 1

18. 設 a, b, c 為三角形的三邊長， $c \neq 1$ ，且 $\log_{(a+b)} c + \log_{(a-b)} c = 2 \log_{(a+b)} c \cdot \log_{(a-b)} c$ ，試判斷此三角形為何種三角形？

解 直角三角形

1-3 對數函數

主題 1 對數函數的定義及其圖形

配合課本 P.37~P.43

1. 對數函數

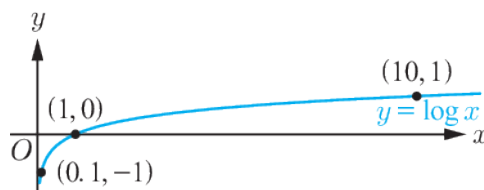
設 $a > 0, a \neq 1, x > 0$ ，則稱函數 $f(x) = \log_a x$ 是「以 a 為底的對數函數」。

例如 $y = f(x) = \log_2 x$ 是以 2 為底數的對數函數。

2. 對數函數的圖形及其性質

(1) 常用對數函數的圖形：

當底數為 10 時，對數函數 $y = \log x$ 的圖形如圖所示。

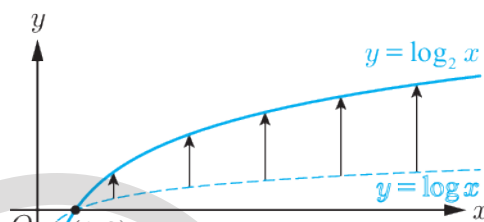


(2) 設 $a > 1$ ，因為 $y = \log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ ，所以對數

函數 $y = \log_a x$ 的圖形可由 $y = \log x$ 的圖形 (以 x 軸為基準) 上下伸縮 $\frac{1}{\log a}$ 倍而得。

例如 $y = \log_2 x$ 的圖形可由 $y = \log x$ 的圖

形上下伸縮 $\frac{1}{\log 2}$ (≈ 3.3223) 倍而得，如圖所示。



(3) 常用對數函數 $y = \log x$ 圖形的性質：

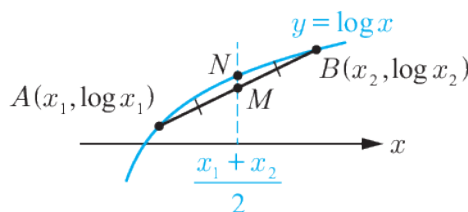
- ① 整個 $y = \log x$ 的圖形都在 y 軸右方，這是因為對數函數 $y = \log x$ 的定義域為所有正數。
- ② $y = \log x$ 的圖形通過點 $(1, 0)$ 。
- ③ 任一水平線 $y = k$ 都與 $y = \log x$ 的圖形恰相交於一點，即對數函數 $y = \log x$ 的值域為所有實數。
- ④ $y = \log x$ 的圖形由左向右逐漸上升，為嚴格遞增函數。
- ⑤ 當正實數 x 越靠近 0 時， $y = \log x$ 的圖形越接近 y 軸，但不與 y 軸相交，故 y 軸為 $y = \log x$ 圖形的漸近線。

(4) 常用對數函數 $y = \log x$ 圖形的凹向性：

- ① 由圖可看出， $y = \log x$ 的圖形凹口向下。
- ② 若在 $y = \log x$ 的圖形上任取相異兩點

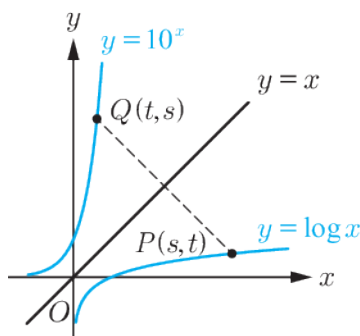
$A(x_1, \log x_1), B(x_2, \log x_2)$ ，則

$$\frac{\log x_1 + \log x_2}{2} < \log \frac{x_1 + x_2}{2}。$$



3. 常用對數函數 $y = \log x$ 與指數函數 $y = 10^x$ 的圖形關係

(1) $y = \log x$ 與 $y = 10^x$ 兩函數的圖形對稱於直線 $y = x$ ，如圖所示。



(2) 點 (s, t) 在 $y = \log x$ 的圖形上 \Leftrightarrow 點 (t, s) 在 $y = 10^x$ 的圖形上。

配合課本 P.38

1

例題

對數函數圖形的描繪

練習

(1) 已知對數函數 $y = \log_2 x$ ，試將表中的 x 值代入函數，完成下列表格。

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_2 x$						

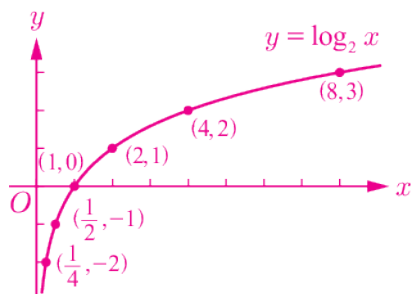
(2) 試利用描點法，將上表列出的點 (x, y) 畫在坐標平面上，並描繪出 $y = \log_2 x$ 的圖形。

解

(1)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3

(2) $y = \log_2 x$ 的圖形如下所示



(1) 已知對數函數 $y = \log_3 x$ ，試將表中的 x 值代入函數，完成下列表格。

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$y = \log_3 x$					

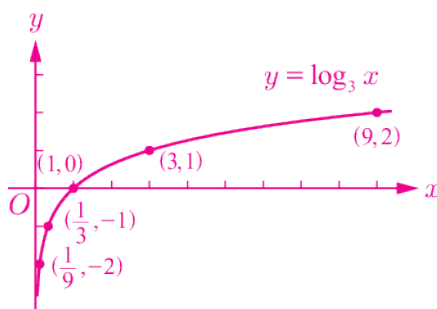
(2) 試利用描點法，將上表列出的點 (x, y) 畫在坐標平面上，並描繪出 $y = \log_3 x$ 的圖形。

解

(1)

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$y = \log_3 x$	-2	-1	0	1	2

(2) $y = \log_3 x$ 的圖形如下所示



2 例題

對數函數圖形的性質

配合課本例題 2

練習

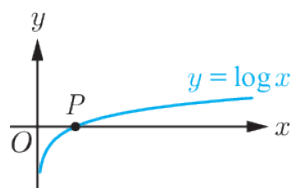
下列關於函數 $f(x) = \log x$ 的敘述，哪些是正確的？

- (A) $f(1) > 0$
 (B) $y = f(x)$ 的圖形在 y 軸右方
 (C) 若 $f(x) = f(2)$ ，則 $x = 2$
 (D) $y = f(x)$ 的圖形凹口向上
 (E) 若 $\alpha < \beta$ ，則 $\log \frac{\alpha + \beta}{2} < \frac{\log \alpha + \log \beta}{2}$

- 解** (A) \times : $f(1) = \log 1 = 0$
 (B) \circ : $\because f(x) = \log x$ 的定義域為所有正數
 $\therefore y = f(x)$ 的圖形在 y 軸右方
 (C) \circ : $\because y = f(x)$ 的圖形和水平線都恰有一個交點
 \therefore 當 $f(x) = f(2)$ 時， $x = 2$
 (D) \times : $y = f(x) = \log x$ 的圖形凹口向下
 (E) \times : $\log \frac{\alpha + \beta}{2} > \frac{\log \alpha + \log \beta}{2}$
 故選(B)(C)

右圖為函數 $y = \log x$

的部分圖形，試選出所有正確的選項。



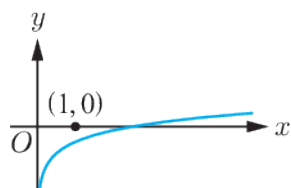
- (A) $\overline{OP} = 1$
 (B) 點 $(\frac{1}{10}, -1)$ 在 $y = \log x$ 的圖形上
 (C) 若 $(h, \frac{1}{2})$ 是 $y = \log x$ 圖形上一點，則 $h < 1$
 (D) $y = \log x$ 的圖形與直線 $y = 2000$ 恰有一個交點
 (E) 設 $(a, b), (c, d)$ 兩點在 $y = \log x$ 的圖形上，若 $b < d$ ，則 $a < c$

- 解** (A) \circ : $\because y = \log x$ 的圖形與 x 軸交於 $(1, 0)$
 $\therefore \overline{OP} = 1$
 (B) \circ : $x = \frac{1}{10}$ 代入 $y = \log x$ 得 $y = \log \frac{1}{10} = -1$
 因此，點 $(\frac{1}{10}, -1)$ 在 $y = \log x$ 的圖形上
 (C) \times : $\because (h, \frac{1}{2})$ 是 $y = \log x$ 圖形上一點
 $\therefore \log h = \frac{1}{2} \Rightarrow h = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} > 1$
 (D) \circ : $y = \log x$ 的圖形和任一水平線都恰有一個交點
 (E) \circ : $\because y = \log x$ 是遞增函數
 \therefore 若 $b < d$ ，則 $a < c$
 故選(A)(B)(D)(E)

類題

右圖是函數 $y = a + \log x$ 的部分圖形，其中 a 為常數，試判斷 a 的正負。

- 解** $x = 1$ 代入 $y = a + \log x$ 得 $y = a + \log 1 = a$ ，由圖形知， $a < 0$



3 例題

對數函數圖形的凹向性

練習

試比較 $a = \frac{\log 5 + \log 7}{2}$, $b = \log 6$ 兩數的大小。

解 $\because b = \log 6 = \log \frac{5+7}{2}$

由對數函數 $y = \log x$ 圖形的凹向性可知

$$\log \frac{5+7}{2} > \frac{\log 5 + \log 7}{2}$$

即 $b > a$

設 $a > b > 1$, $p = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$,

$q = \sqrt{\log a \times \log b}$, $r = \log \frac{a+b}{2}$, 試比較 p ,

q , r 三數的大小。

解 $\because a > b > 1$, $\therefore \log a > \log b > \log 1 = 0$

由算幾不等式得

$$\frac{\log a + \log b}{2} > \sqrt{\log a \times \log b}, \text{ 即 } p > q$$

又由對數函數 $y = \log x$ 圖形的凹向性可知

$$\log \frac{a+b}{2} > \frac{\log a + \log b}{2}, \text{ 即 } r > p$$

因此, $r > p > q$

4 例題

同底之指、對數函數圖形的對稱性

練習

試在同一坐標平面上描繪出函數 $y = 10^x$ 與 $y = \log x$ 的圖形, 並說明兩者之間的關係。

解 $y = 10^x$:

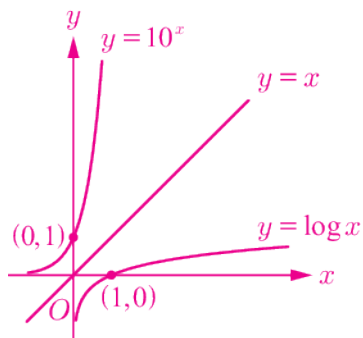
x	-1	0	1
y	$\frac{1}{10}$	1	10

$y = \log x$:

x	$\frac{1}{10}$	1	10
y	-1	0	1

$y = 10^x$ 與 $y = \log x$ 的圖形如下所示

由圖可知, $y = 10^x$ 與 $y = \log x$ 兩函數圖形對稱於直線 $y = x$



設 $f(x) = \log x$,

(1) 若函數 $y = g(x)$ 與 $y = f(x)$ 的圖形對稱於 x 軸, 則 $g(x)$ 為何?

(2) 若函數 $y = h(x)$ 與 $y = f(x)$ 的圖形對稱於 y 軸, 則 $h(x)$ 為何?

(3) 若函數 $y = k(x)$ 與 $y = f(x)$ 的圖形對稱於直線 $y = x$, 則 $k(x)$ 為何?

解 (1) \because 函數 $y = g(x)$ 與 $y = f(x)$ 的圖形對稱於 x 軸

$$\therefore g(x) = -\log x \text{ (或 } \log \frac{1}{x} \text{)}$$

(2) \because 函數 $y = h(x)$ 與 $y = f(x)$ 的圖形對稱於 y 軸

$$\therefore h(x) = \log(-x)$$

(3) \because 函數 $y = k(x)$ 與 $y = f(x)$ 的圖形對稱於直線 $y = x$

$$\therefore k(x) = 10^x$$

配合課本 P.43

練習

5 例題

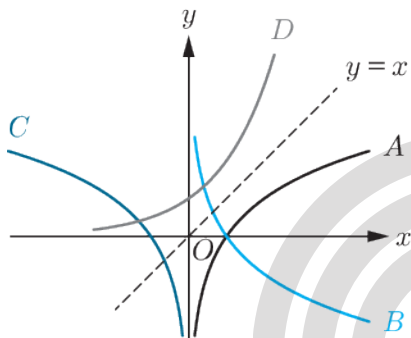
同底之指、對數函數圖形的對稱性



1

如圖，曲線 A 與曲線 B 對稱於 x 軸，曲線 A 與曲線 C 對稱於 y 軸，曲線 A 與曲線 D 對稱於直線 $y = x$ ，若曲線 D 為函數 $y = 10^x$ 之部分圖形，則下列哪些選項是正確的？

- (A) 曲線 A 為函數 $y = \log x$ 之部分圖形
 (B) 曲線 B 為函數 $y = -\log x$ 之部分圖形
 (C) 曲線 C 為函數 $y = -\log x$ 之部分圖形
 (D) 曲線 B 與曲線 C 對稱於原點



- 解** (A) : \because 曲線 D 為函數 $y = 10^x$ 之部分圖形
 且曲線 A 與曲線 D 對稱於直線 $y = x$
 \therefore 曲線 A 為函數 $y = \log x$ 之部分圖形
 (B) : \because 曲線 B 與曲線 A 對稱於 x 軸
 \therefore 曲線 B 為函數 $y = -\log x$ 之部分圖形
 (C) : \because 曲線 C 與曲線 A 對稱於 y 軸
 \therefore 曲線 C 為函數 $y = \log(-x)$ 之部分圖形
 (D) : 若點 (s, t) 在曲線 B 上
 則 $t = -\log s \Rightarrow \log s = -t$
 $x = -s$ 代入曲線 C 得
 $y = \log[-(-s)] = \log s = -t$
 \therefore 點 $(-s, -t)$ 在曲線 C 上
 因此，曲線 B 與曲線 C 對稱於原點
 故選(A)(B)(D)

已知函數 $f(x) = \log x + b$ ，若函數 $y = f(x)$ 的圖形與 $y = g(x)$ 的圖形對稱於直線 $y = x$ ，且 $y = g(x)$ 過點 $(3, 10)$ ，則實數 b 的值為何？

- 解** \because 函數 $y = f(x)$ 的圖形與 $y = g(x)$ 的圖形對稱於直線 $y = x$ ，且 $y = g(x)$ 過點 $(3, 10)$
 $\therefore y = f(x)$ 過點 $(10, 3) \Rightarrow 3 = \log 10 + b = 1 + b$
 $\therefore b = 2$

配合課本例題 3

6 例題

解方程式

練習

試求指數方程式 $10^{2x-1} = 7^x$ 的解，四捨五入到小數點後第一位。(已知 $\log 7 \approx 0.8451$)

$$\begin{aligned} \text{解 } 10^{2x-1} &= 7^x \Rightarrow \log 10^{2x-1} = \log 7^x \\ &\Rightarrow 2x-1 = x \log 7 \Rightarrow (2-\log 7)x = 1 \\ \therefore x &= \frac{1}{2-\log 7} \approx \frac{1}{2-0.8451} \approx 0.87 \approx 0.9 \end{aligned}$$

試求指數方程式 $2^{x+1} = 3^x$ 的解，四捨五入到小數點後第一位。(已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$)

$$\begin{aligned} \text{解 } 2^{x+1} &= 3^x \Rightarrow \log 2^{x+1} = \log 3^x \\ &\Rightarrow (x+1)\log 2 = x \log 3 \Rightarrow (\log 3 - \log 2)x = \log 2 \\ \therefore x &= \frac{\log 2}{\log 3 - \log 2} \approx \frac{0.3010}{0.4771 - 0.3010} \\ &\approx 1.71 \approx 1.7 \end{aligned}$$

配合課本例題 4

7 例題

比較大小

練習

已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$ ，試比較 2^{100} 與 3^{70} 兩數的大小關係。

$$\begin{aligned} \text{解 } \log 2^{100} &= 100 \times \log 2 \approx 100 \times 0.3010 = 30.10 \\ \log 3^{70} &= 70 \times \log 3 \approx 70 \times 0.4771 = 33.397 \\ \therefore \log 2^{100} &< \log 3^{70} \text{ 且常用對數函數為嚴格遞增} \\ &\text{函數} \\ \therefore 2^{100} &< 3^{70} \end{aligned}$$

已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 5 \approx 0.6990$ ，試比較 $(\frac{1}{2})^{100}$ 與 $(\frac{1}{5})^{45}$ 兩數的大小關係。

$$\begin{aligned} \text{解 } \log(\frac{1}{2})^{100} &= \log 2^{-100} = -100 \times \log 2 \\ &\approx -100 \times 0.3010 \\ &= -30.10 \\ \log(\frac{1}{5})^{45} &= \log 5^{-45} = -45 \times \log 5 \approx -45 \times 0.6990 \\ &= -31.455 \\ \therefore \log(\frac{1}{2})^{100} &> \log(\frac{1}{5})^{45} \text{ 且常用對數函數為嚴格} \\ &\text{遞增函數} \\ \therefore (\frac{1}{2})^{100} &> (\frac{1}{5})^{45} \end{aligned}$$

主題 2 對數函數的應用

配合課本 P.44~P.47

1. 本金與利率

- (1) 本金：我們存入銀行的錢或向銀行所借的錢。
- (2) 利息：每隔一個固定期間向銀行領取的酬金或付給銀行的酬金。
- (3) 本利和：本金與利息的和。
- (4) 期數：計算利息的次數。
- (5) 利率：每期內利息與本金的比值，通常用 % 表示。

註： 年利率：以一年為一期的利率；月利率：以一個月為一期的利率。

2. 單利與複利 (n 為期數、 $p\%$ 為利率)(1) 單利：本利和 = 本金 $\times (1 + n \times p\%)$ 。(2) 複利：本利和 = 本金 $\times (1 + p\%)^n$ 。

8

例題

對數函數的應用

配合課本例題 5

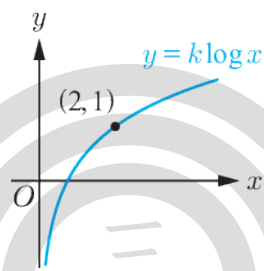
練習

假設「環境照度」為 x 勒克斯（勒克斯：照度單位）時，眼睛對環境的「亮度感覺」為 y 。已知 y 與 x 呈現對數函數 $y = k \log x$ 的關係，其中 k 為常數。下圖是函數 $y = k \log x$ 的部分圖形，試問：

(1) k 的值為何？

(2) 已知目前眼睛對學校教室的亮度感覺為 6，按規定學校教室的亮度感覺應至少為 9，那麼需要將環境照度提高為目前

照度的多少倍才能達到要求？



解 (1) 由圖形可知 $y = k \log x$ 的圖形過點 $(2, 1)$

$$\text{因此, } 1 = k \times \log 2 \Rightarrow k = \frac{1}{\log 2} = \log_2 10$$

(2) 設目前環境照度為 x_1 ，符合要求之照度為 x_2

$$\text{則 } 6 = (\log_2 10) \log x_1 = \log_2 x_1 \Rightarrow x_1 = 2^6$$

$$9 = (\log_2 10) \log x_2 = \log_2 x_2 \Rightarrow x_2 = 2^9$$

$$\therefore \text{所求} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{2^9}{2^6} = 2^3 = 8 \text{ (倍)}$$

一杯 350 ml 的黑咖啡含有 100 mg 的咖啡因，它以每小時 16% 的速度從人體代謝出去。設喝一杯黑咖啡 t 小時後，人體含有 A mg 的咖啡因，則 A 與 t 的關係式為 $A = 100 \times \left(\frac{84}{100}\right)^t$ 。試問此咖啡因約幾小時後

在人體內剩下不到一半？（已知 $\log 8.4 \approx 0.9243$ ，答案請四捨五入至小數點後第二位）

解

$$\text{令 } A = 50$$

$$\Rightarrow 100 \times \left(\frac{84}{100}\right)^t = 50$$

$$\Rightarrow \left(\frac{84}{100}\right)^t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{84}{100}\right)^t = \log \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow t(\log 84 - \log 100) = \log \frac{1}{2} = -\log 2$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log 2}{2 - \log 84} \approx \frac{0.3010}{2 - 1.9243} = \frac{0.3010}{0.0757}$$

$$\approx 3.976 \approx 3.98 \text{ (小時)}$$

9

例題

對數函數的應用

練習

前行政院長提出知識經濟，喊出 10 年內要讓臺灣 double（加倍），一般小市民希望第 11 年開始的薪水加倍。如果每年調薪 $a\%$ ，其中 a 為整數，欲達成小市民的希望，那麼 a 的最小值為何？（參考數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ）

x	1	2	3	4
$\log(1+0.01x)$	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170

5	6	7	8	9
0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374

【91 數乙】

解 依題意可得 $(1+a\%)^{10} \geq 2$
 $\Rightarrow \log(1+a\%)^{10} \geq \log 2$
 $\Rightarrow 10 \times \log(1+0.01a) \geq \log 2$
 $\Rightarrow \log(1+0.01a) \geq 0.03010$
 由附表可知，整數 a 的最小值為 8

阿三在股票市場裡買進賣出頻繁。假設每星期結算阿三都會損失該星期初資金的 1%，若第 n 個星期結束後資金總損失已超過他的原始資金的一半，則 n 的最小值為何？

（已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$,

$\log 11 \approx 1.0414$ ）

解 設阿三的原始資金為 M
 則 $M \times (1-1\%)^n < \frac{1}{2}M$
 $\Rightarrow (\frac{99}{100})^n < \frac{1}{2} \Rightarrow (\frac{100}{99})^n > 2$
 $\Rightarrow \log(\frac{100}{99})^n > \log 2 \Rightarrow n \log(\frac{100}{99}) > 0.3010$
 $\Rightarrow n(\log 100 - \log 99) > 0.3010$
 $\Rightarrow n > \frac{0.3010}{\log 100 - \log 99} = \frac{0.3010}{2 - (\log 11 + 2 \log 3)}$
 $\approx \frac{0.3010}{2 - (1.0414 + 2 \times 0.4771)} \approx 68.4$
 因此， n 的最小值為 69

10

例題

對數方程式

練習

試解下列各方程式：

(1) $\log(x+1) = 2$ 。

(2) $\log x + \log(x+3) = 1$ 。

解 (1) $\log(x+1) = 2 \Rightarrow \log(x+1) = \log 100$
 $\therefore x+1 = 100 \Rightarrow x = 99$
 (2) $\log x + \log(x+3) = 1 \Rightarrow \log x(x+3) = \log 10$
 $\therefore x(x+3) = 10 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$
 $\Rightarrow (x-2)(x+5) = 0$
 $\Rightarrow x = 2$ 或 -5 （不合 $\because x > 0$ 且 $x > -3$ ）

試解下列各方程式：

(1) $\log(2x-6) = 1$ 。

(2) $\log(x-5) + \log(25-x) - 2 = 0$ 。

解 (1) $\log(2x-6) = 1 \Rightarrow \log(2x-6) = \log 10$
 $\therefore 2x-6 = 10 \Rightarrow x = 8$
 (2) $\log(x-5) + \log(25-x) - 2 = 0$
 $\Rightarrow \log(x-5)(25-x) = 2$
 $\Rightarrow \log(-x^2 + 30x - 125) = \log 100$
 $\therefore -x^2 + 30x - 125 = 100 \Rightarrow x^2 - 30x + 225 = 0$
 $\Rightarrow (x-15)^2 = 0 \Rightarrow x = 15$

11 例題

對數不等式

練習

1

試解下列各不等式：

(1) $\log(x-1) \leq 1$ 。

(2) $2\log(x-1) > \log(7-x)$ 。

解 (1) $\because \log(x-1)$ 有意義, $\therefore x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \dots\dots ①$

又 $\log(x-1) \leq 1 \Rightarrow \log(x-1) \leq \log 10$

$\therefore x-1 \leq 10 \Rightarrow x \leq 11 \dots\dots ②$

由①②可得 $1 < x \leq 11$ (2) $\because \log(x-1), \log(7-x)$ 均有意義

$\therefore \begin{cases} x-1 > 0 \\ 7-x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 7 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 7 \dots\dots ①$

又 $2\log(x-1) > \log(7-x)$

$\Rightarrow \log(x-1)^2 > \log(7-x)$

$\therefore (x-1)^2 > 7-x \Rightarrow x^2 - x - 6 > 0$

$\Rightarrow (x+2)(x-3) > 0 \Rightarrow x < -2$ 或 $x > 3 \dots\dots ②$

由①②可得 $3 < x < 7$

試解下列各不等式：

(1) $\log(3x-1) \geq \log(2-x)$ 。

(2) $\log(x^2 - 6x - 16) < \log 11$ 。

解 (1) $\because \log(3x-1), \log(2-x)$ 均有意義

$\therefore \begin{cases} 3x-1 > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 2 \dots\dots ①$

又 $\log(3x-1) \geq \log(2-x)$

$\Rightarrow 3x-1 \geq 2-x \Rightarrow 4x \geq 3 \Rightarrow x \geq \frac{3}{4} \dots\dots ②$

由①②可得 $\frac{3}{4} \leq x < 2$ (2) $\because \log(x^2 - 6x - 16)$ 有意義

$\therefore x^2 - 6x - 16 > 0$

$\Rightarrow (x+2)(x-8) > 0 \Rightarrow x < -2$ 或 $x > 8 \dots\dots ①$

又 $\log(x^2 - 6x - 16) < \log 11$

$\Rightarrow x^2 - 6x - 16 < 11 \Rightarrow x^2 - 6x - 27 < 0$

$\Rightarrow (x+3)(x-9) < 0 \Rightarrow -3 < x < 9 \dots\dots ②$

由①②可得 $-3 < x < -2$ 或 $8 < x < 9$

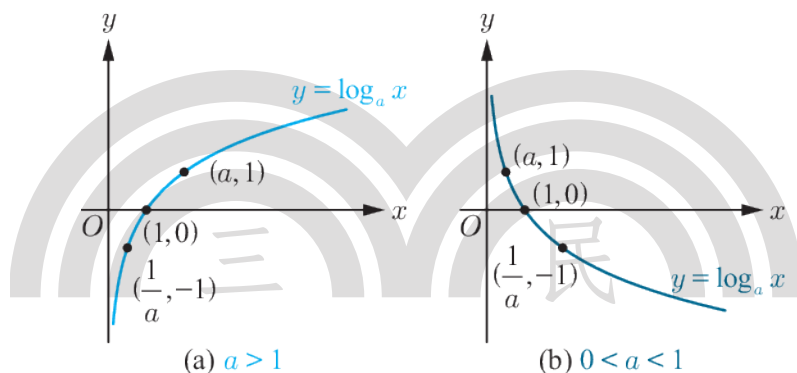
資優園地



1. 對數函數 $y = \log_a x$ 圖形的性質

(當 $a > 1$ 時， $y = \log_a x$ 的圖形如圖 (a)；當 $0 < a < 1$ 時， $y = \log_a x$ 的圖形如圖 (b))

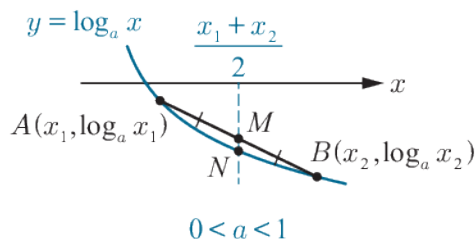
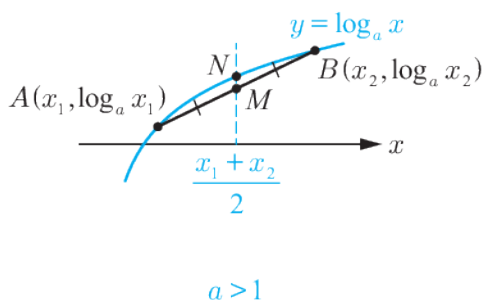
- (1) 整個 $y = \log_a x$ 的圖形都在 y 軸右方，這是因為對數函數 $y = \log_a x$ 的定義域為所有正數。
- (2) $y = \log_a x$ 的圖形通過點 $(1, 0)$ 。
- (3) 任一水平線 $y = k$ 都與 $y = \log_a x$ 的圖形恰相交於一點，即對數函數 $y = \log_a x$ 的值域為所有實數。
- (4) 當正實數 x 越靠近 0 時， $y = \log_a x$ 的圖形越接近 y 軸，但不與 y 軸相交，故 y 軸為 $y = \log_a x$ 圖形的漸近線。



- (5) 當 $a > 1$ 時， $y = \log_a x$ 的圖形由左向右逐漸上升，為嚴格遞增函數；當 $0 < a < 1$ 時， $y = \log_a x$ 的圖形由左向右逐漸下降，為嚴格遞減函數。

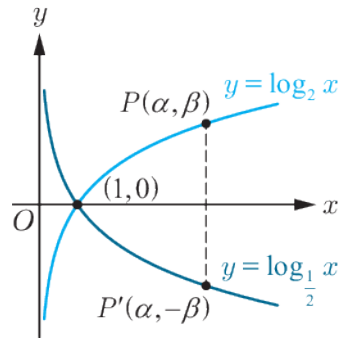
(6) 對數函數 $y = \log_a x$ 圖形的凹向性

- ① 當底數 $a > 1$ 時， $y = \log_a x$ 的圖形凹口向下。若在 $y = \log_a x$ 的圖形上任取相異兩點 $A(x_1, \log_a x_1)$, $B(x_2, \log_a x_2)$ ，則 $\frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2} < \log_a \frac{x_1 + x_2}{2}$ 。
- ② 當底數 $0 < a < 1$ 時， $y = \log_a x$ 的圖形凹口向上。若在 $y = \log_a x$ 的圖形上任取相異兩點 $A(x_1, \log_a x_1)$, $B(x_2, \log_a x_2)$ ，則 $\frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2} > \log_a \frac{x_1 + x_2}{2}$ 。



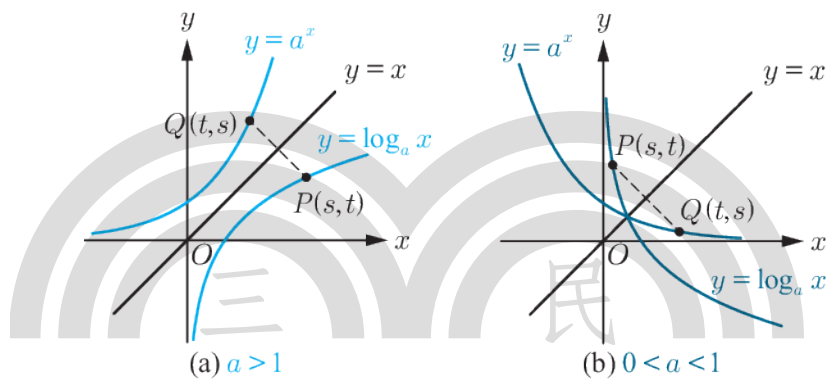
2. 設 $a > 0, a \neq 1$ ，則函數 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 的圖形與 $y = \log_a x$ 的圖形對稱於 x 軸。

例如 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形與 $y = \log_2 x$ 的圖形對稱於 x 軸，如下圖所示。



3. 對數函數 $y = \log_a x$ 與指數函數 $y = a^x$ 的對稱性

(1) 設 $a > 0, a \neq 1$ ， $y = \log_a x$ 與 $y = a^x$ 兩函數的圖形對稱於直線 $y = x$ ，如下圖所示。



(2) 設 $a > 0, a \neq 1$ ，點 (s, t) 在 $y = \log_a x$ 的圖形上 \Leftrightarrow 點 (t, s) 在 $y = a^x$ 的圖形上。

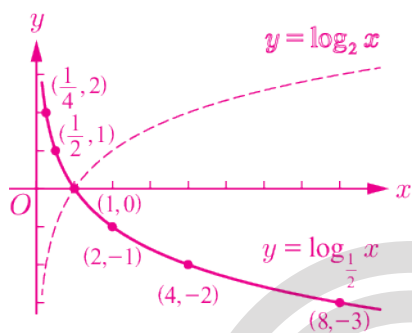
12 例題

對數函數圖形的描繪

練習

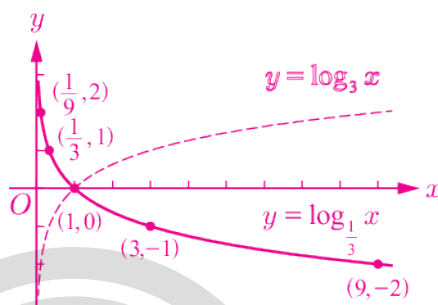
試在坐標平面上，畫出對數函數 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形。

解 $\because y = \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{2^{-1}} x = \frac{1}{-1} \log_2 x = -\log_2 x$
 $\therefore y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形與 $y = \log_2 x$ 的圖形對稱於 x 軸
 故可得 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形如下所示



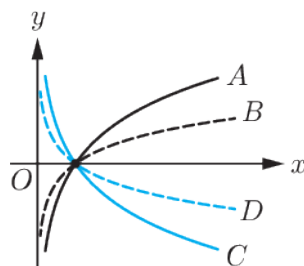
試在坐標平面上，畫出對數函數 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 的圖形。

解 $\because y = \log_{\frac{1}{3}} x = \log_{3^{-1}} x = -\log_3 x$
 $\therefore y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 的圖形與 $y = \log_3 x$ 的圖形對稱於 x 軸
 故可得 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 的圖形如下所示

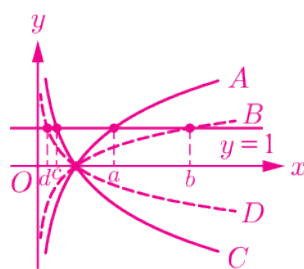


類題

若 $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$, $y = \log_d x$ 的圖形分別為曲線 A, B, C, D, 如圖所示, 試判斷 a, b, c, d 的大小關係。



解 如圖, $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$, $y = \log_d x$ 的圖形分別與直線 $y = 1$ 交於 $(a, 1)$, $(b, 1)$, $(c, 1)$, $(d, 1)$
 $\therefore d < c < a < b$



13 例題

對數函數圖形的平移

練習

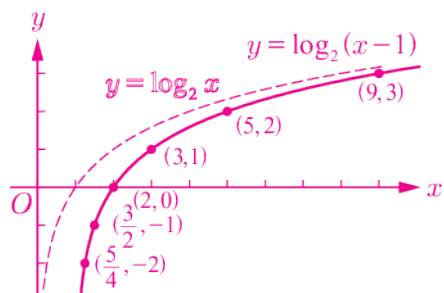
1

試畫出下列各函數的圖形，並與 $y = f_1(x) = \log_2 x$ 的圖形作比較：

(1) $y = f_2(x) = \log_2(x-1)$ °

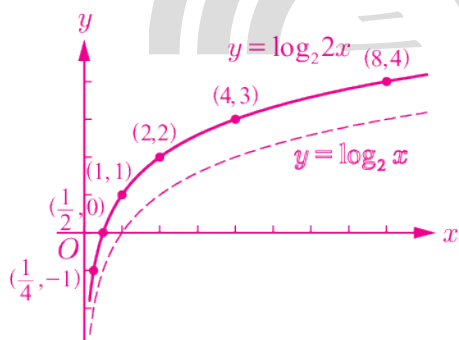
(2) $y = f_3(x) = \log_2 2x$ °

解 (1) $y = f_2(x) = \log_2(x-1)$ 的圖形如下所示



將 $y = \log_2 x$ 的圖形向右平移 1 個單位，可得 $y = \log_2(x-1)$ 的圖形

(2) $y = f_3(x) = \log_2 2x = \log_2 2 + \log_2 x = 1 + \log_2 x$ 的圖形如下所示



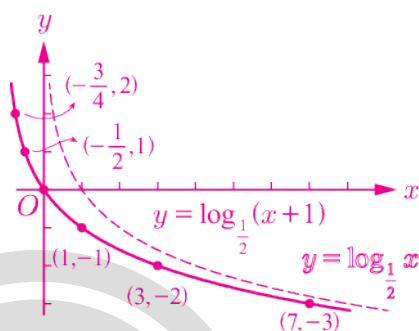
將 $y = \log_2 x$ 的圖形向上平移 1 個單位，可得 $y = \log_2 2x$ 的圖形

試畫出下列各函數的圖形，並與 $y = f_1(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形作比較：

(1) $y = f_2(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ °

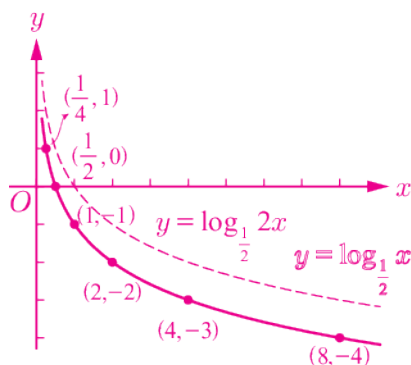
(2) $y = f_3(x) = \log_{\frac{1}{2}} 2x$ °

解 (1) $y = f_2(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ 的圖形如下所示



將 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形向左平移 1 個單位，可得 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ 的圖形

(2) $y = f_3(x) = \log_{\frac{1}{2}} 2x = \log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} x - 1$ 的圖形如下所示



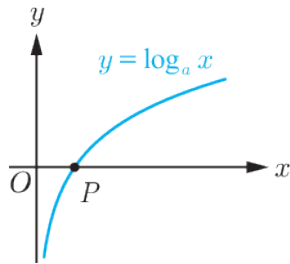
將 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形向下平移 1 個單位，可得 $y = \log_{\frac{1}{2}} 2x$ 的圖形

14 例題

對數函數圖形的性質

練習

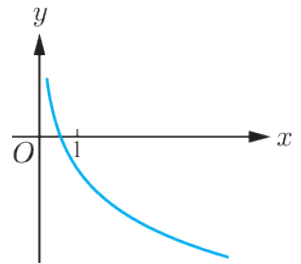
右圖為函數
 $y = f(x) = \log_a x$ 的部分圖形，試選出所有正確的選項。



- (A) $a > 1$
 (B) $f(1) > 0$
 (C) 點 $(\frac{1}{a}, -1)$ 在 $y = \log_a x$ 的圖形上
 (D) 若 $(h, \frac{1}{2})$ 是 $y = \log_a x$ 圖形上一點，則 $h < 1$
 (E) 若 $\alpha < \beta$ ，則 $\log_a \frac{\alpha + \beta}{2} < \frac{\log_a \alpha + \log_a \beta}{2}$

解 (A) ○ : $\because y = \log_a x$ 的圖形由左向右逐漸上升
 \therefore 底數 $a > 1$
 (B) × : $f(1) = \log_a 1 = 0$
 (C) ○ : $x = \frac{1}{a}$ 代入 $y = \log_a x$ 得 $y = \log_a \frac{1}{a} = -1$
 因此，點 $(\frac{1}{a}, -1)$ 在 $y = \log_a x$ 的圖形上
 (D) × : $\because (h, \frac{1}{2})$ 是 $y = \log_a x$ 圖形上一點且 $a > 1$
 $\therefore \log_a h = \frac{1}{2} \Rightarrow h = a^{\frac{1}{2}} > 1$
 (E) × : $\log_a \frac{\alpha + \beta}{2} > \frac{\log_a \alpha + \log_a \beta}{2}$
 故選(A)(C)

右圖是函數
 $y = a + \log_b x$ 的部分圖形，其中 a, b 皆為常數，則下列何者為真？



- (A) $a < 0, b > 1$
 (B) $a > 0, b > 1$
 (C) $a = 0, b > 1$
 (D) $a > 0, 0 < b < 1$
 (E) $a < 0, 0 < b < 1$

解 $x = 1$ 代入 $y = a + \log_b x$ 得 $y = a + \log_b 1 = a$
 由圖形知， $a < 0$
 又 $y = a + \log_b x$ 為遞減函數
 $\therefore 0 < b < 1$
 故選(E)

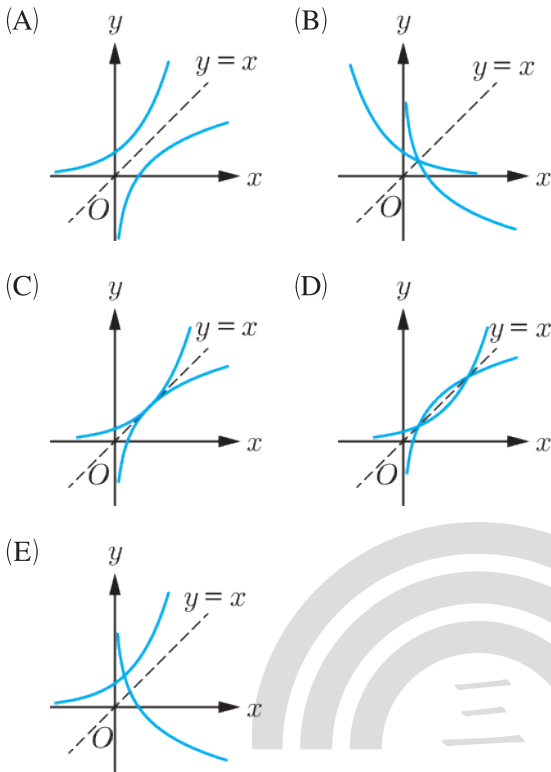
15 例題

同底之指對數函數圖形的關係

練習

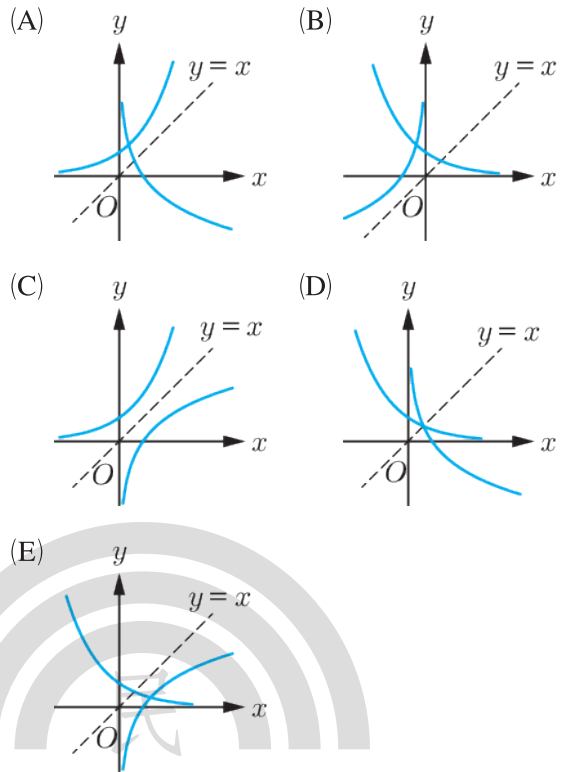
1

設 $a > 1$ ，下列哪些可能是 $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 在同一坐標平面中的圖形？

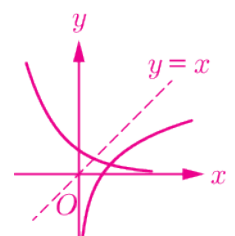
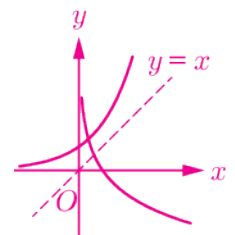


解 $\because a > 1$
 $\therefore y = a^x, y = \log_a x$ 的圖形由左向右均逐漸上升
 且兩函數的圖形對稱於直線 $y = x$
 故選(A)(C)(D)

設 $a > 0, a \neq 1$ ，函數 $y = a^x$ 與 $y = -\log_a x$ 在同一坐標平面中的圖形可能為何？



解 $y = -\log_a x$ 與 $y = \log_a x$ 的圖形對稱於 x 軸
 當 $a > 1$ 時， $y = a^x$ 與 $y = -\log_a x$ 在同一坐標平面中的圖形如右
 當 $0 < a < 1$ 時， $y = a^x$ 與 $y = -\log_a x$ 在同一坐標平面中的圖形如右
 故選(A)(E)



類題

設 a 為大於 1 的實數，考慮函數 $f(x) = a^x$ 與 $g(x) = \log_a x$ ，試問下列選項何者正確？

(A) 若 $f(3) = 6$ ，則 $g(36) = 6$

(B) $\frac{f(238)}{f(219)} = \frac{f(38)}{f(19)}$

(C) $g(238) - g(219) = g(38) - g(19)$

(D) 若 P, Q 為 $y = g(x)$ 圖形上的兩個相異點，則直線 PQ 的斜率必為正數

(E) 若直線 $y = 5x$ 與 $y = f(x)$ 的圖形有兩個交點，則直線 $y = \frac{1}{5}x$ 與 $y = g(x)$ 的圖形也有兩個交點

交點

【96 學測】

解

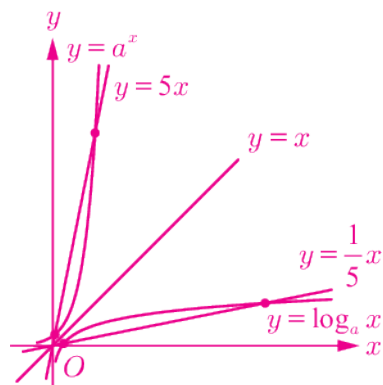
(A) \bigcirc : $f(3) = 6$ ，即 $a^3 = 6 \Rightarrow a = 6^{\frac{1}{3}}$
 $g(36) = \log_{6^{\frac{1}{3}}} 6^2 = 6 \log_6 6 = 6$

(B) \bigcirc : $\frac{f(238)}{f(219)} = \frac{a^{238}}{a^{219}} = a^{19}$ ， $\frac{f(38)}{f(19)} = \frac{a^{38}}{a^{19}} = a^{19}$

(C) \times : $g(238) - g(219) = \log_a 238 - \log_a 219 = \log_a \frac{238}{219}$
 $g(38) - g(19) = \log_a 38 - \log_a 19 = \log_a \frac{38}{19} = \log_a 2$

(D) \bigcirc : $y = g(x)$ 的圖形為嚴格遞增
 故任兩點的斜率為正

(E) \bigcirc : 如下圖



故選(A)(B)(D)(E)

16 例題

對數方程式

練習

1

試解下列各對數方程式：

(1) $2\log_2(x+1) = \log_2(x+7)$

(2) $\log_3(11-x) - 1 = \log_9(x-1)$

(3) $\log_4(4^x + 128) = \frac{x}{2} + 1 + \log_4 6$

解 (1) $\because \log_2(x+1), \log_2(x+7)$ 均有意義

$$\therefore x+1 > 0 \text{ 且 } x+7 > 0$$

因此, $x > -1$

又 $2\log_2(x+1) = \log_2(x+7)$

$$\Rightarrow \log_2(x+1)^2 = \log_2(x+7)$$

$$\therefore (x+1)^2 = x+7$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x + 7 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ 或 } -3 \text{ (不合, } \because x > -1)$$

$$\therefore x = 2$$

(2) $\because \log_3(11-x), \log_9(x-1)$ 均有意義

$$\therefore 11-x > 0 \text{ 且 } x-1 > 0$$

因此, $1 < x < 11$

又 $\log_3(11-x) - 1 = \log_9(x-1)$

$$\Rightarrow \log_9(11-x)^2 - \log_9 9 = \log_9(x-1)$$

$$\Rightarrow \log_9 \frac{(11-x)^2}{9} = \log_9(x-1)$$

$$\therefore \frac{(11-x)^2}{9} = x-1$$

$$\Rightarrow x^2 - 22x + 121 = 9x - 9 \Rightarrow x^2 - 31x + 130 = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x-26) = 0$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ 或 } 26 \text{ (不合, } \because 1 < x < 11)$$

$$\therefore x = 5$$

(3) $\log_4(4^x + 128) = \frac{x}{2} + 1 + \log_4 6$

$$= \log_4 4^{\frac{x}{2}} + \log_4 4 + \log_4 6$$

$$= \log_4(24 \cdot 4^{\frac{x}{2}}) = \log_4(24 \cdot 2^x)$$

$$\therefore 4^x + 128 = 24 \cdot 2^x$$

$$\Rightarrow (2^x)^2 - 24 \cdot 2^x + 128 = 0$$

$$\Rightarrow (2^x - 16)(2^x - 8) = 0$$

$$\Rightarrow 2^x = 16 \text{ 或 } 8$$

$$\therefore x = 4 \text{ 或 } 3$$

試解下列各對數方程式：

(1) $\log_3(x-5) + \log_3(2x-3) = 2$

(2) $1 + \log_{\frac{1}{2}}(x-3) = \log_{\frac{1}{4}} x$

(3) $\log_3(3^{2x} + 9) = 1 + x + \log_3 2$

解 (1) $\because \log_3(x-5), \log_3(2x-3)$ 均有意義

$$\therefore x-5 > 0 \text{ 且 } 2x-3 > 0$$

因此, $x > 5$

又 $\log_3(x-5) + \log_3(2x-3) = 2$

$$\Rightarrow \log_3(x-5)(2x-3) = \log_3 9$$

$$\therefore (x-5)(2x-3) = 9$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 13x + 15 = 9 \Rightarrow 2x^2 - 13x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(2x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 6 \text{ 或 } \frac{1}{2} \text{ (不合, } \because x > 5)$$

$$\therefore x = 6$$

(2) $\because \log_{\frac{1}{2}}(x-3), \log_{\frac{1}{4}} x$ 均有意義

$$\therefore x-3 > 0 \text{ 且 } x > 0$$

因此, $x > 3$

又 $1 + \log_{\frac{1}{2}}(x-3) = \log_{\frac{1}{4}} x$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} + \log_{\frac{1}{4}}(x-3)^2 = \log_{\frac{1}{4}} x$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}(x-3)^2 = \log_{\frac{1}{4}} x$$

$$\therefore \frac{1}{4}(x-3)^2 = x$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 4x \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x-9)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 9 \text{ 或 } 1 \text{ (不合, } \because x > 3)$$

$$\therefore x = 9$$

(3) $\log_3(3^{2x} + 9) = 1 + x + \log_3 2$

$$= \log_3 3 + \log_3 3^x + \log_3 2$$

$$= \log_3(6 \cdot 3^x)$$

$$\therefore 3^{2x} + 9 = 6 \cdot 3^x$$

$$\Rightarrow (3^x)^2 - 6 \cdot 3^x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (3^x - 3)^2 = 0 \Rightarrow 3^x = 3$$

$$\therefore x = 1$$

17 例題

對數不等式

練習

試解下列各對數不等式：

(1) $\log_{0.5}(x^2 - 3x - 10) > -3$

(2) $\log_2(2x + 1) + \log_2(x - 1) \leq 1$

解 (1) $\because \log_{0.5}(x^2 - 3x - 10)$ 有意義

$$\therefore x^2 - 3x - 10 > 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 5) > 0$$

$$\Rightarrow x < -2 \text{ 或 } x > 5 \dots\dots ①$$

$$\text{又 } \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x - 10) > -3 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \log_{\frac{1}{2}} 8$$

$$\text{且底數 } 0 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\therefore x^2 - 3x - 10 < 8 \Rightarrow x^2 - 3x - 18 < 0$$

$$\Rightarrow (x + 3)(x - 6) < 0 \Rightarrow -3 < x < 6 \dots\dots ②$$

由①②可得 $-3 < x < -2$ 或 $5 < x < 6$



(2) $\because \log_2(2x + 1), \log_2(x - 1)$ 均有意義

$$\therefore 2x + 1 > 0 \text{ 且 } x - 1 > 0$$

$$\text{因此, } x > 1 \dots\dots ①$$

$$\text{又 } \log_2(2x + 1) + \log_2(x - 1) \leq 1$$

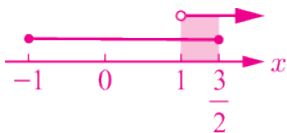
$$\Rightarrow \log_2(2x + 1)(x - 1) \leq \log_2 2$$

$$\because \text{底數 } 2 > 1, \therefore (2x + 1)(x - 1) \leq 2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 3 \leq 0 \Rightarrow (x + 1)(2x - 3) \leq 0$$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq \frac{3}{2} \dots\dots ②$$

由①②可得 $1 < x \leq \frac{3}{2}$



試解下列各對數不等式：

(1) $\log_2(x^2 - 6x - 16) < \log_2 11$

(2) $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 1) + \log_{\frac{1}{2}}(2 - x) \geq -1$

解 (1) $\because \log_2(x^2 - 6x - 16)$ 有意義

$$\therefore x^2 - 6x - 16 > 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 8) > 0$$

$$\Rightarrow x < -2 \text{ 或 } x > 8 \dots\dots ①$$

又 $\log_2(x^2 - 6x - 16) < \log_2 11$ 且底數 $2 > 1$

$$\therefore x^2 - 6x - 16 < 11$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - 27 < 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 9) < 0$$

$$\Rightarrow -3 < x < 9 \dots\dots ②$$

由①②可得 $-3 < x < -2$ 或 $8 < x < 9$



(2) $\because \log_{\frac{1}{2}}(3x - 1), \log_{\frac{1}{2}}(2 - x)$ 均有意義

$$\therefore 3x - 1 > 0 \text{ 且 } 2 - x > 0$$

$$\text{因此, } \frac{1}{3} < x < 2 \dots\dots ①$$

$$\text{又 } \log_{\frac{1}{2}}(3x - 1) + \log_{\frac{1}{2}}(2 - x) \geq -1$$

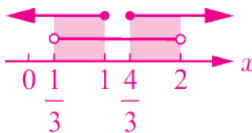
$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(3x - 1)(2 - x) \geq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \log_{\frac{1}{2}} 2$$

$$\because \text{底數 } 0 < \frac{1}{2} < 1, \therefore (3x - 1)(2 - x) \leq 2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 7x + 4 \geq 0 \Rightarrow (x - 1)(3x - 4) \geq 0$$

$$\Rightarrow x \leq 1 \text{ 或 } x \geq \frac{4}{3} \dots\dots ②$$

由①②可得 $\frac{1}{3} < x \leq 1$ 或 $\frac{4}{3} \leq x < 2$



18 例題

函數的最大、最小值問題

練習

1

設 $2 < x < 6$ ，則 $y = \log_2(x-2) + \log_2(6-x)$ 的最大值及當時的 x 值為何？

解 $y = \log_2(x-2) + \log_2(6-x)$
 $= \log_2[(x-2)(6-x)]$
 $= \log_2(-x^2 + 8x - 12)$
 $= \log_2[-(x-4)^2 + 4]$
 $\because 2 < x < 6$
 \therefore 當 $x=4$ 時， $-(x-4)^2 + 4$ 有最大值 4
 且底數 $2 > 1$
 故 y 的最大值為 $\log_2 4 = 2$

試求函數 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(5-x)$ 的最小值及當時的 x 值為何？

解 $\because \log_{\frac{1}{2}}(x-1), \log_{\frac{1}{2}}(5-x)$ 均有意義
 $\therefore x-1 > 0$ 且 $5-x > 0$
 因此， $1 < x < 5$
 又 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(5-x)$
 $= \log_{\frac{1}{2}}[(x-1)(5-x)]$
 $= \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 6x - 5)$
 $= \log_{\frac{1}{2}}[-(x-3)^2 + 4]$
 $\because 1 < x < 5$
 \therefore 當 $x=3$ 時， $-(x-3)^2 + 4$ 有最大值 4
 且底數 $0 < \frac{1}{2} < 1$
 故 y 的最小值為 $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$





1-3 自我評量

基礎題

1. 已知函數 $y = \log x + 9$ 的圖形過點 $(a, 11)$ ，試求 a 之值為何？

解 100

2. 試問下列各敘述哪些是正確的？

- (A) $y = \log x$ 與 $y = x$ 兩圖形有交點
- (B) $y = \log x$ 與 $y = 10^x$ 兩圖形有交點
- (C) $y = \log x$ 與 $y = -\log x$ 兩圖形有交點
- (D) $y = \log x$ 與 $y = 10^x$ 兩圖形對稱於直線 $y = x$
- (E) $y = \log x$ 與 $y = -\log x$ 兩圖形對稱於 x 軸

解 (C)(D)(E)

3. 已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$ ，試比較 2^{30} , 3^{20} , 6^{12} 三數的大小關係。

解 $2^{30} < 6^{12} < 3^{20}$

4. 試解下列各方程式：

- (1) $2\log(x-3) = \log(x-1)$ 。
- (2) $1 + \log(x + \frac{3}{2}) = 2\log(x-6)$ 。
- (3) $\log(10^x + 10) = \frac{x}{2} + \log 11$ 。

解 (1) 5 (2) 21 (3) 0 或 2

5. 試解下列各不等式：

- (1) $\log(5x+4) - \log(x+3) \geq \log(x-4)$ 。
- (2) $\log(x^2 - 2x - 3) < 2\log(x+3)$ 。

解 (1) $4 < x \leq 8$ (2) $-\frac{3}{2} < x < -1$ 或 $x > 3$

6. 已知 $1 < x < y < 2$ ，且 $a = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$ ， $b = \log \frac{x+y}{2}$ ， $c = \frac{1}{2} \log(x+y)$ ，試比較 a ， b ， c 的大小。

解 $c > b > a$

7. 農民阿三伯對農作物灑下農藥，經 t 日後，農藥的殘留量為 $30 \times (0.2)^t$ ，而此農藥的殘留量需低於 1% 時，農作物才可以採收，試問施灑農藥後最少需幾天後才可以採收？(答案請取至整數位)

解 5

8. 濃度 8% 的食鹽水 1000 公克，今從中取出 200 公克後再加入 200 公克的純水混合均勻成新的食鹽水，接著從此新的食鹽水中取出 200 公克後再加入 200 公克的純水混合均勻，……，如此繼續操作 n 次，試問：
- (1) 當 $n = 2$ 時，所得食鹽水的濃度為何？
 - (2) 若欲使食鹽水的濃度低於 1%，則 n 的最小值為何？

解 (1) 5.12% (2) 10

9. 阿三的長子今年 4 歲，為預籌長子將來讀大學的教育經費，將手頭上的一百萬元存入銀行，年利率 5%，每年複利計息一次。試問須經過多少年，本利和始達二百萬元？
(已知 $\log 1.05 \approx 0.0212$ ， $\log 2 \approx 0.3010$)

解 15 年

進階題

10. 方程式 $|\log x| = x^2$ 的實數解有幾個？

解 1

11. 若 $y = \log x$ 和 $x + y = 2$ 兩圖形的交點為 (x_1, y_1) ，且 $y = 10^x$ 和 $x + y = 2$ 兩圖形的交點為 (x_2, y_2) ，試求 $x_1 + x_2$ 之值。

解 2

12. 試解方程式 $x^{\log x} = 10^6 x$ 。

解 $\frac{1}{100}$ 或 1000

13. 試解不等式 $2(\log x)^2 - \log x - 1 \leq 0$ 。

解 $\frac{\sqrt{10}}{10} \leq x \leq 10$

14. 從冰箱拿出一盆攝氏 0°C 的水，若在室溫 25°C 的環境下，其 t 分鐘後的水溫經測量為攝氏 $25(1 - 10^{-\frac{t}{40}})^\circ\text{C}$ ，但溫度計的顯示會自動把整數以下的部分四捨五入，則從冰箱取出幾分鐘後（取整數），溫度計才會顯示水溫為 25°C ？

解 68

15. 某甲向銀行貸款 100 萬元，約定從次月開始每月還給銀行 1 萬元，依月利率 0.6% 複利計算，則某甲需要幾年才可還清？（答案請四捨五入至整數位，已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 1.006 \approx 0.0026$ ）

解 13

第1章 綜合練習



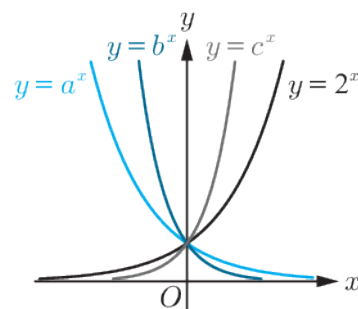
基礎題

1

1. 右圖為 $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ 與 $y = 2^x$ 的圖形, 且 $y = a^x$ 與 $y = 2^x$ 的圖形對稱 y 軸, 請選出正確的選項。

- (A) $a = -2$ (B) $y = b^x$ 與 $y = c^x$ 兩圖形恰交於一點 $(0, 1)$
 (C) $b > a$ (D) $ac > 1$ (E) $\frac{a^{99} + a^{101}}{2} < a^{100}$ [1-1]

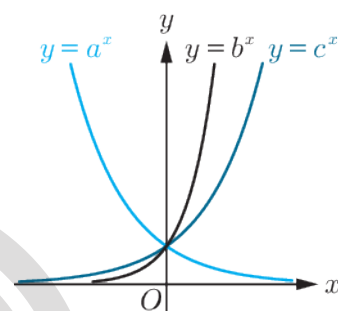
解 (B)(D)



2. 右圖為函數 $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ 的圖形, 請選出正確的選項。

- (A) $a > 1$ (B) $b > 1$ (C) $c > 1$ (D) $a > b$ (E) $b > c$ [1-1]

解 (B)(C)(E)



3. 下列大小關係哪些是對的?

- (A) $(1.9)^{\frac{2}{3}} > (1.9)^{\frac{3}{4}}$ (B) $(-1.9)^2 < (-1.9)^4$ (C) $(0.9)^{-2} < (0.9)^{-4}$
 (D) $5^{0.4} < (0.2)^{0.6}$ (E) $[(0.3)^{\sqrt{2}}]^{\sqrt{2}} < (0.3)^{\sqrt{2}}$ [1-1]

解 (B)(C)(E)

4. 若 $a > b > 1$, $p = 2^{\frac{a+b}{2}}$, $q = \frac{2^a + 2^b}{2}$, $r = 2^{\sqrt{ab}}$, 試比較 p, q, r 之大小。 [1-1]

解 $q > p > r$

5. 設 $\log x = \frac{1}{3}$, 則 $\log(10x)$ 為何? [1-2]

解 $\frac{4}{3}$

6. 請選出下列正確的選項。

- (A) $\log 3^2 = 2 \log 3$ (B) $\log_3 2 = \frac{\log_{(-5)} 2}{\log_{(-5)} 3}$ (C) $\log_3 5 = \log 5 - \log 3$ (D) $5^{\log 3} = 3$
 (E) $\log(5 \times 7)^2 = 2(\log 5 + \log 7)$ [1-2]

解 (A)(E)

7. 化簡下列各式：

(1) $\log 90 + \log \frac{1}{36} - \log \frac{1}{4}$ 。 (2) $(\log_2 3 + \log_4 27)(\log_9 2 + \log_3 8)$ 。

(3) $\log_8 3 \cdot \log_9 125 \cdot \log_5 \frac{1}{4}$ 。 (4) $5^{(\log \frac{2}{3} + \log 15)}$ 。 [1-2]

解 (1) 1 (2) $\frac{35}{4}$ (3) -1 (4) 5

8. 已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, 試問：

(1) $(1.5)^{60}$ 的整數部分是幾位數？

(2) $(1.5)^{60}$ 的整數部分中，最高位數字（最左邊的數字）是多少？ [1-2]

解 (1) 11 位數 (2) 3

9. 假設有一種藥物經由靜脈注射 T 小時後，該藥物在體內的殘餘量為 $V(T)$ 公克。已知 T 與 $V(T)$ 的關係為 $\log V(T) = a - bT$ ，其中 a, b 為常數。現在注射該藥物後的第一及第二小時量得藥物在體內的殘餘量分別為 2 公克及 0.4 公克。試問當初注射多少公克的藥物進入體內？ [1-3]

解 10

10. 若某一個地區的人口每年固定增加 2.1%，試問至少經過多少年（取整數），該地區人口將超過現有人口的 2 倍？（已知 $\log 1.021 \approx 0.009$ ） [1-3]

解 34 年

11. 假設某一種放射性同位素的質量隨時間逐漸衰減，且無論從何時算起，經過相同時間後的衰變率相同。若該同位素每年的衰變率為 12.5%，求該同位素的半衰期（取整數值）。

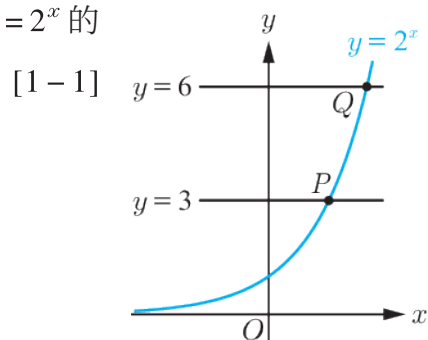
（提示：半衰期是指質量減半的時間， $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 8.75 \approx 0.9420$ ） [1-3]

解 6 年

進階題

12. 右圖為 $y = 2^x$ 的圖形，設 P, Q 分別為直線 $y = 3, y = 6$ 與 $y = 2^x$ 的交點，求 \overline{PQ} 之長。

解 $\sqrt{10}$



13. 已知 $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$ ，且 $f(a) = \frac{9}{7}$ ，求實數 a 的值。 [1-1]

解 $\frac{3}{2}$

14. 已知正整數 n 滿足 2^n 是一個最高位數字為 2 的 12 位數，求 n 的值。 [1-2]

解 38

15. 下列有關圖形的敘述，哪些是正確的？

(A) 函數 $y = \log x^2$ 的圖形為嚴格遞增函數

(B) 函數 $y = 10^{|x|}$ 的圖形對稱於 y 軸

(C) 函數 $y = |\log x|$ 的圖形對稱於 x 軸

(D) 函數 $y = x - 2$ 的圖形，與函數 $y = -x + 2$ 的圖形對稱於 x 軸

(E) 函數 $y = \log \frac{1}{x}$ 的圖形，與函數 $y = \log x$ 的圖形對稱於 x 軸 [1-3]

解 (B)(D)(E)

16. 假設光線通過一塊透明板，它的強度就會減弱一成。若光線通過 n 塊重疊的透明板後，其強度減弱為原來強度的 $\frac{1}{10}$ 以下，試求最小正整數 n 。(已知 $\log 3 \approx 0.4771$) [1-3]

解 22

17. 某種傳染病經接觸後便會傳染，感染後人便會產生抗體而終身免疫。此類的傳染病的感染率 $I(t)$ 定義為 $I(t) = \frac{\text{在時間 } t \text{ 時被感染過的人數}}{\text{這城市的總人數}}$ ，而且當 $I(t) = \frac{1}{2}$ 的時間 t 是該傳染病的傳播高峰。根據衛生組織的調查研究，建立了一個關於 $I(t)$ 的數學模型如下：

根據衛生組織的調查研究，建立了一個關於 $I(t)$ 的數學模型如下：

$$I(t) = \frac{1}{1 + a \cdot 7^{-bt}}$$

某種此類的傳染病在某個城市蔓延，剛開始（即 $t=0$ 時），約有 2% 的人口被感染，當 $t=3$ 週，約有 12.5% 的人口被感染，試回答下列問題：

試回答下列問題：

(1) 求出 a, b 的值。

(2) 何時會達到此傳染病的傳播高峰？

(3) 12 週之後，該城市約有多少比例的人口被感染此傳染病？ [1-1]

解 (1) $a = 49$; $b = \frac{1}{3}$ (2) 6 週 (3) 98%



大考題

18. 設 a, b, c 為實數且滿足 $\log a = 1.1, \log b = 2.2, \log c = 3.3$ ，試選出正確的選項。(已知 $\log 2 \approx 0.3010$)
- (A) $a + c = 2b$ (B) $1 < a < 10$ (C) $1000 < c < 2000$ (D) $b = 2a$ (E) a, b, c 成等比數列

【109 學測】

解 (C)(E)

19. 設正實數 b 滿足 $(\log 100)(\log b) + \log 100 + \log b = 7$ ，試選出正確的選項。
- (A) $1 \leq b \leq \sqrt{10}$ (B) $\sqrt{10} \leq b \leq 10$ (C) $10 \leq b \leq 10\sqrt{10}$ (D) $10\sqrt{10} \leq b \leq 100$
- (E) $100 \leq b \leq 100\sqrt{10}$

【108 學測】

解 (D)

20. 試問有多少個整數 x 滿足 $10^9 < 2^x < 9^{10}$? (已知 $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771$)
- (A) 1 個 (B) 2 個 (C) 3 個 (D) 4 個 (E) 0 個

【107 學測】

解 (B)

21. 已知坐標平面上三點 $(3, \log 3), (6, \log 6)$ 與 $(12, y)$ 在同一直線上，求 y 之值。

【107 學測】

解 $\log 24$

22. 放射性物質的半衰期 T 定義為每經過時間 T ，該物質的質量會衰退成原來的一半。鉛製容器中有兩種放射性物質 A, B ，開始紀錄時容器中物質 A 的質量為物質 B 的兩倍，而 120 小時後兩種物質的質量相同。已知物質 A 的半衰期為 7.5 小時，請問物質 B 的半衰期為幾小時？ (A) 8 小時 (B) 10 小時 (C) 12 小時 (D) 15 小時 (E) 20 小時

【105 學測】

解 (A)

第 1 章 實戰演練

一、是非題（正確的畫○，錯誤的畫×）（每題 4 分）

(○) 1. $\frac{(3.2)^5 + (3.2)^7}{2} \geq (3.2)^6$ 。

【106 高雄女中】

解 $\because y = (3.2)^x$ 的圖形凹口向上， $\therefore \frac{(3.2)^5 + (3.2)^7}{2} \geq (3.2)^{\frac{5+7}{2}} = (3.2)^6$

(×) 2. 若 x, y 為實數滿足 $2^x = 3^y$ ，則 $x > y$ 。

【106 高雄女中】

解 若 $x = 0 = y$ ，則 $2^0 = 1 = 3^0$

(×) 3. 若 a, b 為實數且 $a > 0, a \neq 1$ ，則 $\log_a b^2 = \log_a b$ 。

【106 高雄女中】

解 若 $a = 2, b = -1$ ，則 $\log_a b^2 = \log_4 1 = 0$ ，但 $\log_a b = \log_2(-1)$ 沒有意義

(○) 4. 將 $y = 2^x$ 的圖形向左平移 k 單位 ($k > 0$) 後所得的圖形可以和 $y = 5 \cdot 2^x$ 的圖形重合。

【106 高雄女中】

解 $\because 5 = 2^{\log_2 5}$ ， $\therefore y = 5 \cdot 2^x = 2^{\log_2 5} \cdot 2^x = 2^{x + \log_2 5}$

因此，將 $y = 2^x$ 的圖形向左平移 $\log_2 5$ 單位後所得的圖形可以和 $y = 5 \cdot 2^x$ 的圖形重合

二、多選題（每題 9 分）

(CD) 5. 設函數 $y = a^x + b - 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的圖形只經過第一、三、四象限，則下列何者正確？

(A) $0 < a < 1$ 且 $b > 0$ (B) $0 < a < 1$ 且 $b < 0$ (C) $a > 1$ 且 $b < 0$

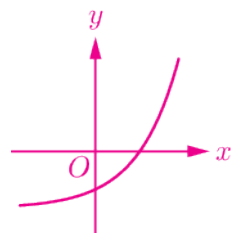
(D) $a > 1$ 且 $b < 1$ (E) $0 < a < 1$ 且 $b > 1$

【107 成功高中】

解 依題意可知，函數 $y = f(x) = a^x + b - 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的圖形如右圖， $\therefore a > 1$

$f(0) = a^0 + b - 1 = b < 0$

故選(C)(D)



(CDE) 6. 判斷下列各式，試選出正確的選項。

(A) $\log_{(-2)}(-2)^{107} = 107$ (B) $\sqrt{\log_3 5} = \frac{1}{2} \log_3 5$ (C) $2^{\frac{1}{\log_2 2}} = 10$

(D) $\log_2 5^{\log_3 7} = \log_3 7^{\log_2 5}$ (E) $\log_2(\log_6 25) + 4\log_{16}(\log_5 6) = 1$

【107 建國中學】

解

(A) \times : \because 底數 $-2 < 0$, $\therefore \log_{(-2)}(-2)^{107}$ 沒有定義

(B) \times : $\frac{1}{2} \log_3 5 = \log_3 \sqrt{5} \neq \sqrt{\log_3 5}$

(C) \circ : $2^{\frac{1}{\log_2 2}} = 2^{\frac{\log 10}{\log 2}} = 2^{\log_2 10} = 10$

(D) \circ : $\because \log_2 5^{\log_3 7} = \frac{\log(5^{\log_3 7})}{\log 2} = \frac{(\log_3 7)(\log 5)}{\log 2} = \frac{\frac{\log 7}{\log 3} \times \log 5}{\log 2} = \frac{(\log 5)(\log 7)}{(\log 2)(\log 3)}$

$$\log_3 7^{\log_2 5} = \frac{\log(7^{\log_2 5})}{\log 3} = \frac{(\log_2 5)\log 7}{\log 3} = \frac{\frac{\log 5}{\log 2} \times \log 7}{\log 3} = \frac{(\log 5)(\log 7)}{(\log 2)(\log 3)}$$

$$\therefore \log_2 5^{\log_3 7} = \log_3 7^{\log_2 5}$$

〈另解〉

$$\because \log_2 5^{\log_3 7} = \log_3 7 \cdot \log_2 5, \log_3 7^{\log_2 5} = \log_2 5 \cdot \log_3 7$$

$$\therefore \log_2 5^{\log_3 7} = \log_3 7^{\log_2 5}$$

(E) \circ : $\log_2(\log_6 25) + 4\log_{16}(\log_5 6) = \frac{\log(\log_6 25)}{\log 2} + 4 \times \frac{\log(\log_5 6)}{\log 16} = \frac{\log[2\log_6 5]}{\log 2} + 4 \times \frac{\log(\log_5 6)}{4\log 2}$

$$= \frac{\log[2\log_6 5] + \log(\log_5 6)}{\log 2} = \frac{\log[(2\log_6 5)(\log_5 6)]}{\log 2} = \frac{\log[2 \times \frac{\log 5}{\log 6} \times \frac{\log 6}{\log 5}]}{\log 2} = \frac{\log 2}{\log 2} = 1$$

〈另解〉

$$\log_2(\log_6 25) + 4\log_{16}(\log_5 6) = \log_2(\log_6 5^2) + 4 \cdot \frac{\log_2(\log_5 6)}{\log_2 16}$$

$$= \log_2(2\log_6 5) + \log_2(\log_5 6) = \log_2[(2\log_6 5) \cdot (\log_5 6)] = \log_2 2 = 1$$

故選(C)(D)(E)

三、填充題 (每格 6 分)

7. 若方程式為 $2^{2x+1} + 2^{3x} = 5 \times 2^{x+4}$ ，則 x 的解為 3。

【107 成功高中】

解

$$2^{2x+1} + 2^{3x} = 5 \times 2^{x+4} \Rightarrow 2 \times (2^x)^2 + (2^x)^3 = 80 \times 2^x \Rightarrow (2^x)^3 + 2 \times (2^x)^2 - 80 \times 2^x = 0$$

$$\Rightarrow 2^x[(2^x)^2 + 2 \times 2^x - 80] = 0 \Rightarrow (2^x)^2 + 2 \times 2^x - 80 = 0 \quad (\because 2^x \text{ 恆} > 0)$$

$$\Rightarrow (2^x - 8)(2^x + 10) = 0 \Rightarrow 2^x = 8 \text{ 或 } -10 \text{ (不合)}$$

$$\therefore x = 3$$

8. 試求不等式 $(\frac{1}{2})^{2x} - \frac{5}{4} \times 2^{-x} + \frac{1}{4} < 0$ 的有 1 個整數解。 【106 台南女中】

解 $(\frac{1}{2})^{2x} - \frac{5}{4} \times 2^{-x} + \frac{1}{4} < 0 \Rightarrow 4 \times (\frac{1}{2})^{2x} - 5 \times (\frac{1}{2})^x + 1 < 0$

令 $t = (\frac{1}{2})^x$ ，則上述不等式即 $4t^2 - 5t + 1 < 0 \Rightarrow (t-1)(4t-1) < 0 \Rightarrow \frac{1}{4} < t < 1$ ，即 $\frac{1}{4} < (\frac{1}{2})^x < 1$

$\therefore y = (\frac{1}{2})^x$ 為嚴格遞減函數， $\therefore 2 > x > 0 \Rightarrow x = 1$

因此，所求整數解個數為 1

9. 一個放射性元素的半衰期 (half-life) 是指該元素由原來的質量，衰退成原始的一半質量所需的時間。已知此元素一年後有 20 克，10 年後有 5 克，試求這個放射性元素的半衰期為 $\frac{9}{2}$ 年。 【107 台中一中】

解 設此放射性元素的半衰期為 n 年，原來的質量為 M 克

依題意可得 $\begin{cases} M \times (\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}} = 20 \dots\dots ① \\ M \times (\frac{1}{2})^{\frac{10}{n}} = 5 \dots\dots ② \end{cases}$

$\frac{②}{①}$ 得 $(\frac{1}{2})^{\frac{9}{n}} = \frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$

$\therefore \frac{9}{n} = 2 \Rightarrow n = \frac{9}{2}$

即所求半衰期為 $\frac{9}{2}$ 年

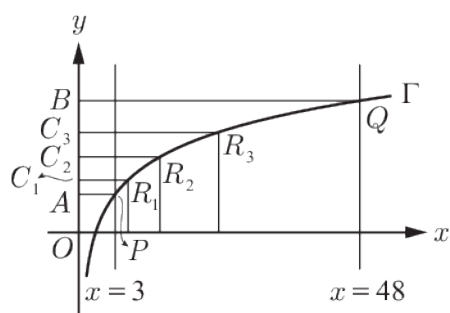
10. 試求 $\log_3(9+27) - \log_9 11 \cdot \log_{11} 13 \cdot \log_{13} 16 - 49^{\log_7 \sqrt{5}} =$ -3。 【107 台中一中】

解 所求 $= \log_3 36 - \log_9 16 - (7^2)^{\frac{1}{2} \log_7 5} = \frac{\log 36}{\log 3} - \frac{\log 16}{\log 9} - 7^{\log_7 5} = \frac{2 \log 6}{\log 3} - \frac{4 \log 2}{2 \log 3} - 5 = \frac{2(\log 2 + \log 3)}{\log 3} - \frac{2 \log 2}{\log 3} - 5$
 $= \frac{2 \log 3}{\log 3} - 5 = 2 - 5 = -3$

<另解>

所求 $= \log_3 36 - \log_9 16 - (7^2)^{\frac{1}{2} \log_7 5} = \log_3 36 - \frac{\log_3 16}{\log_3 9} - 7^{\log_7 5} = \log_3 36 - \frac{2 \log_3 4}{2} - 5 = \log_3 36 - \log_3 4 - 5$
 $= \log_3 \frac{36}{4} - 5 = \log_3 9 - 5 = 2 - 5 = -3$

11. 右圖為 $\Gamma: y = \log_2 x$ 的圖形，直線 $x = 3$, $x = 48$ 分別和 Γ 交於 P, Q 兩點。分別過 P, Q 對 y 軸作垂直線得垂足 A, B 。設 C_1, C_2, C_3 為 \overline{AB} 線段的四等分點，由 C_1, C_2, C_3 分別對 y 軸作垂直線交的圖形於 R_1, R_2, R_3 ，若 R_1, R_2, R_3 三點的 x 坐標依序為 x_1, x_2, x_3 ，則數對 $(x_1, x_2, x_3) = \underline{(6, 12, 24)}$ 。 【107 台中女中】



解 設 $C_1(x_1, y_1), C_2(x_2, y_2), C_3(x_3, y_3)$
 $\therefore \overline{AB} = \log_2 48 - \log_2 3 = \log_2 \frac{48}{3} = \log_2 16 = 4$

$$\begin{aligned} \therefore y_1 &= \log_2 3 + 1 = \log_2 3 + \log_2 2 = \log_2 6 \Rightarrow x_1 = 6 \\ y_2 &= \log_2 3 + 2 = \log_2 3 + \log_2 4 = \log_2 12 \Rightarrow x_2 = 12 \\ y_3 &= \log_2 3 + 3 = \log_2 3 + \log_2 8 = \log_2 24 \Rightarrow x_3 = 24 \end{aligned}$$

因此，數對 $(x_1, x_2, x_3) = (6, 12, 24)$

12. 在坐標平面上曲線 $y = \log x$ 與一斜率為 $\frac{1}{4}$ 的直線交於 A, B 兩點，若 A, B 的 x 坐標分別為 a, b (其中 $b > a$)，且 $\overline{AB} = \sqrt{17}$ ，試求 $\frac{a}{b}$ 之值為 $\underline{\frac{1}{10}}$ 。 【107 高雄中學】

解 設 $A(a, \log a), B(b, \log b)$
 則直線 AB 的斜率 $= \frac{\log a - \log b}{a - b} = \frac{1}{4} \Rightarrow a - b = 4(\log a - \log b)$

$$\text{又 } \overline{AB} = \sqrt{(a - b)^2 + (\log a - \log b)^2} = \sqrt{17}$$

$$\Rightarrow (a - b)^2 + (\log a - \log b)^2 = 17$$

$$\Rightarrow 16(\log a - \log b)^2 + (\log a - \log b)^2 = 17$$

$$\Rightarrow (\log a - \log b)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left(\log \frac{a}{b}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \log \frac{a}{b} = \pm 1 \quad (1 \text{ 不合, } \because b > a)$$

$$\therefore \log \frac{a}{b} = -1 \Rightarrow \frac{a}{b} = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

13. 已知 $\log 1.9 \approx 0.2788$, $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$ ，若 $a = 20^{19}$, $b = 19^{20}$, $c = 18^{21}$ ，則 a, b, c 三數的大小關係為 $\underline{a < b < c}$ 。 【107 建國中學】

解 $\log a = \log 20^{19} = 19 \log 20 = 19 \log(2^2 \times 5) = 19(2 \log 2 + \log 5) \approx 19(0.6020 + 0.6990) = 24.719$

$$\log b = \log 19^{20} = 20 \log 19 = 20 \log(10 \times 1.9) \approx 20(1 + 0.2788) = 25.576$$

$$\log c = \log 18^{21} = 21 \log 18 = 21 \log(2 \times 3^2) = 21(\log 2 + 2 \log 3) \approx 21(0.3010 + 0.9542) = 26.3592$$

$\therefore \log a < \log b < \log c$ 且 $y = \log x$ 為嚴格遞增函數

$$\therefore a < b < c$$

14. 若 $A(a, b-1)$ 為 $x+y=k$ 與 $y=10^x$ 之交點； $B(5a-3, 2b-2)$ 為 $x+y=k$ 與 $y=\log x$ 之交點，求 $k = \underline{1}$ 。
【107 台中一中】

解 $\because A, B$ 均在直線 $x+y=k$ 上
 \therefore 直線 AB 的斜率 $= \frac{(2b-2)-(b-1)}{(5a-3)-a} = -1 \Rightarrow \frac{b-1}{4a-3} = -1 \Rightarrow 4a+b=4 \dots\dots ①$
 又由題意可知， A, B 對稱於直線 $y=x$
 因此， \overline{AB} 的中點在直線 $y=x$ 上
 $\Rightarrow \frac{a+(5a-3)}{2} = \frac{(b-1)+(2b-2)}{2} \Rightarrow 6a-3=3b-3 \Rightarrow b=2a \dots\dots ②$
 ②代入①得 $4a+2a=4 \Rightarrow a=\frac{2}{3} \Rightarrow b=2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$
 $\therefore k = a + (b-1) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} - 1 = 1$

15. 天文學以「星等」來區分星星的明暗，即選定某一特定的星光強度 F_0 為標準，對於發出星光強度 F 的星體，定義「星等」為 $m = -2.5 \log \frac{F}{F_0}$ ，並稱該星體為 m 等星，已知 A 星為 -1.6 等星， B 星為 2.5 等星，則 A 星的星光強度大約為 B 星的 44 倍。(以四捨五入算至整數位)
【107 高雄中學】

解 設 A, B 兩星的星光強度分別為 F_A, F_B
 依題意可得
 $-2.5 \log \frac{F_A}{F_0} = -1.6 \dots\dots ①$
 $-2.5 \log \frac{F_B}{F_0} = 2.5 \dots\dots ②$
 ① - ② 得 $-2.5(\log \frac{F_A}{F_0} - \log \frac{F_B}{F_0}) = -4.1 \Rightarrow (\log \frac{F_A}{F_0} - \log \frac{F_B}{F_0}) = \frac{4.1}{2.5} \Rightarrow \log \frac{F_A}{F_B} = 1.64$
 故 $\frac{F_A}{F_B} = 10^{1.64} \approx 43.65 \approx 44$

16. 近年來社群軟體盛行，導致假新聞不斷流竄，且流竄速度驚人，若世界一流高中數學美女名師瑋妞某日發布即將結婚的假新聞，其散播速率 $N = P(1 - 9^{-0.3d})$ ，其中 P 為瑋妞粉絲總數， N 為假新聞流傳 d 天後聽過這則假新聞的瑋妞粉絲人數。此則假新聞至少流傳 3 天，就會有 75% 的瑋妞粉絲聽過。(已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$)
【107 成功高中】

解 設所求至少為 d 天
 依題意可得
 $0.75P = P(1 - 9^{-0.3d}) \Rightarrow 1 - 9^{-0.3d} = 0.75 \Rightarrow 9^{-0.3d} = 0.25 \Rightarrow \log 9^{-0.3d} = \log 0.25 \Rightarrow -0.3d \cdot \log 9 = \log \frac{1}{4}$
 $\Rightarrow -0.3d \cdot 0.9542 \approx -0.6020 \Rightarrow d \approx \frac{0.6020}{0.3 \cdot 0.9542} \approx 2.1$
 因此，所求至少為 3 天

17. 股神巴肥特在股票市場裡買進賣出頻繁，假設每星期結算都賺得該星期初資金的 7%，而第 n 星期結束後，資金總獲利已超過原始資金的一半，則 n 的最小值為 6。（已知 $\log 1.07 \approx 0.0294$, $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$ ）【106 台南女中】

解 設原始資金為 M

$$\begin{aligned} \text{則 } M(1+7\%)^n > 1.5M &\Rightarrow (1.07)^n > 1.5 \Rightarrow \log(1.07)^n > \log \frac{3}{2} \Rightarrow n \log 1.07 > \log 3 - \log 2 \\ &\Rightarrow 0.0294n > 0.4771 - 0.3010 \Rightarrow n > 5.99 \end{aligned}$$

因此， n 的最小值為 6

