2 三角函數

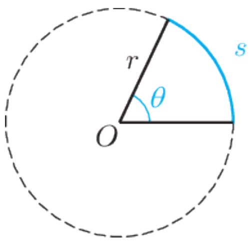
2-1　弧度量

主題 1　弧度量的定義、度度量與弧度量的換算

配合課本 P.58～P.64

1. 弧度的定義

設圓的半徑為 r，圓上長度為 s 的弧，其圓心角的弧度 θ 為弧長 s 與半徑 r 的比值，即 $\theta=\frac{s}{r}$（弳）。



例如　圓周長為 $2\pi r$，其所對的圓心角等於 $\frac{2\pi r}{r}=2\pi$ 弳；半圓的弧長為 πr，所以半圓所對的圓心角等於 $\frac{\pi r}{r}=\pi$ 弳。

特別地，長度為 r 的弧，其所對的圓心角等於 $\frac{r}{r}=1$ 弳，又稱為 1 弧度。

註 1： 無論圓的半徑大小，弧長為圓周長時所對的圓心角皆為 2π；弧長為半圓周長時所對的圓心角皆為 π；弧長為 $\frac{1}{4}$ 圓周長時所對的圓心角皆為 $\frac{\pi}{2}$，以此類推。

註 2： 由於圓弧長短與半徑之比，不因圓的大小而改變，所以弧度與圓的半徑無關。

2. 度度量與弧度量的換算

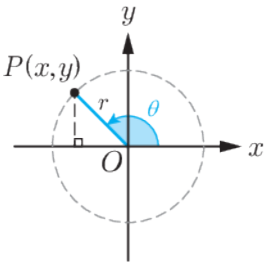
(1) $1^\circ=\frac{\pi}{180}$ 弳；$x^\circ=\frac{\pi}{180}x$ 弳。

(2) 1 弳 $=(\frac{180}{\pi})^\circ\approx57.2958^\circ\approx57.3^\circ$；$x$ 弳 $=(\frac{180}{\pi}x)^\circ$。

註： 弧度制的定義是兩種長度（弧長 s 對半徑 r）的比值，$\frac{s}{r}$ 是一個實數。當我們使用弳表示角的大小時，習慣把「弳」字省略不寫。例如 $\theta_1=\frac{\pi}{6}$ 指的是 $\theta_1=\frac{\pi}{6}$ 弳；$\theta_2=1$ 指的是 $\theta_2=1$ 弳。因此，若僅以實數表示角的大小時，代表其單位為弳。而當我們寫 $\pi=180^\circ$ 時，指的是 π 弳 $=180^\circ$，如此，我們可以將 90° 寫成 $\frac{\pi}{2}$，180° 寫成 π，360° 寫成 2π。

3. 三角比的定義

設 θ 是一個標準位置角，在 θ 的終邊上任取一個異於原點的點 $P(x, y)$，令 $r=\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$，定義



(1) θ 的正弦 $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$。

(2) θ 的餘弦 $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$。

(3) θ 的正切 $\tan\theta=\dfrac{y}{x},\ x\neq 0$。

4. 計算機的「**Rad**」鍵

(1) 計算機中的「Deg」鍵代表以「度」作為單位；「Rad」鍵則表示以「弳」作為單位。

(2) 以 $\sin 5.2$ 的求值為例：

步驟 1：確認計算機在 Rad 模式。

步驟 2：依序鍵入 sin $\to 5\to .\to 2\to =$ 。

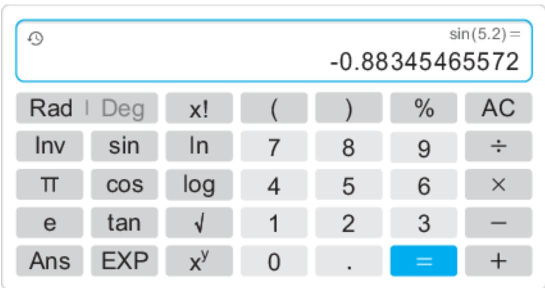
此時，便可計算出 $\sin 5.2\approx -0.88345$，如圖一所示。

(3) 以 $\cos(2.7\pi)$ 的求值為例：

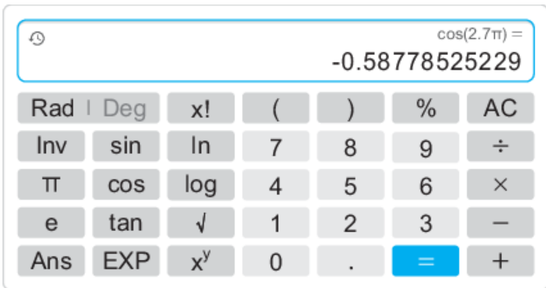
步驟 1：確認計算機在 Rad 模式。

步驟 2：依序鍵入 cos $\to 2\to .\to 7\to \pi\to =$ 。

此時，便可計算出 $\cos(2.7\pi)\approx -0.587785$，如圖二所示。



圖一



圖二

1 例題　利用弳表示圓心角

設一圓的圓心為 O，半徑為 r，

(1) 若弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 的長度為 $\frac{\pi r}{3}$，則圓心角 $\angle POQ$ 為多少弳？

(2) 若弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的長度為 $\frac{r}{3}$，則圓心角 $\angle AOB$ 為多少弳？

解

(1) 所求 $=\dfrac{\frac{\pi r}{3}}{r}=\dfrac{\pi}{3}$（弳）

(2) 所求 $=\dfrac{\frac{r}{3}}{r}=\dfrac{1}{3}$（弳）

練習

設一圓的圓心為 O，半徑為 $2r$，

(1) 若弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 的長度為 $\frac{2\pi r}{3}$，則圓心角 $\angle POQ$ 為多少弳？

(2) 若弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的長度為 $\frac{2r}{3}$，則圓心角 $\angle AOB$ 為多少弳？

解

(1) 所求 $=\dfrac{\frac{2\pi r}{3}}{2r}=\dfrac{\pi}{3}$（弳）

(2) 所求 $=\dfrac{\frac{2r}{3}}{2r}=\dfrac{1}{3}$（弳）

2 例題　度與弳的換算

配合課本例題 1

(1) 試將 $0°$, $30°$ 與 $75°$ 用弧度量表示。

(2) 試將 $\frac{\pi}{12}$ 弳、$\frac{\pi}{5}$ 弳與 2 弳用度度量表示。

解

(1) $\because \pi$ 弳 $=180°$，$\therefore 1°=\frac{\pi}{180}$ 弳

$0°=\frac{\pi}{180}\times 0=0$（弳）

$30°=\frac{\pi}{180}\times 30=\frac{\pi}{6}$（弳）

$75°=\frac{\pi}{180}\times 75=\frac{5\pi}{12}$（弳）

(2) $\because \pi$ 弳 $=180°$，$\therefore 1$ 弳 $=(\frac{180}{\pi})°$

$\frac{\pi}{12}=(\frac{180}{\pi}\times\frac{\pi}{12})°=15°$

$\frac{\pi}{5}=(\frac{180}{\pi}\times\frac{\pi}{5})°=36°$

$2=(\frac{180}{\pi}\times 2)°=(\frac{360}{\pi})°\approx 114.6°$

練習

(1) 試將 $22.5°$, $105°$ 與 $180°$ 用弧度量表示。

(2) 試將 $\frac{\pi}{10}$ 弳、$\frac{\pi}{4}$ 弳與 3 弳用度度量表示。

解

(1) $\because \pi$ 弳 $=180°$，$\therefore 1°=\frac{\pi}{180}$ 弳

$22.5°=\frac{\pi}{180}\times 22.5=\frac{\pi}{8}$（弳）

$105°=\frac{\pi}{180}\times 105=\frac{7\pi}{12}$（弳）

$180°=\frac{\pi}{180}\times 180=\pi$（弳）

(2) $\because \pi$ 弳 $=180°$，$\therefore 1$ 弳 $=(\frac{180}{\pi})°$

$\frac{\pi}{10}=(\frac{180}{\pi}\times\frac{\pi}{10})°=18°$

$\frac{\pi}{4}=(\frac{180}{\pi}\times\frac{\pi}{4})°=45°$

$3=(\frac{180}{\pi}\times 3)°=(\frac{540}{\pi})°\approx 171.9°$

類題

下表列出 0° 到 360° 之間的常用角度，試利用度與弳的換算關係完成下表。

度	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	135°
弳	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$
度	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	330°	360°
弳	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

解 $\because \pi$ 弳 $=180°$，$\therefore 1°=\frac{\pi}{180}$ 弳

$15°=\frac{\pi}{180}\times 15=\frac{\pi}{12}$（弳）；$45°=\frac{\pi}{180}\times 45=\frac{\pi}{4}$（弳）；$120°=\frac{\pi}{180}\times 120=\frac{2\pi}{3}$（弳）

$135°=\frac{\pi}{180}\times 135=\frac{3\pi}{4}$（弳）；$210°=\frac{\pi}{180}\times 210=\frac{7\pi}{6}$（弳）；$240°=\frac{\pi}{180}\times 240=\frac{4\pi}{3}$（弳）

$270°=\frac{\pi}{180}\times 270=\frac{3\pi}{2}$（弳）；$330°=\frac{\pi}{180}\times 330=\frac{11\pi}{6}$（弳）；$360°=\frac{\pi}{180}\times 360=2\pi$（弳）

$\because \pi$ 弳 $=180°$，$\therefore 1$ 弳 $=(\frac{180}{\pi})°$

$\frac{\pi}{6}=(\frac{180}{\pi}\times\frac{\pi}{6})°=30°$；$\frac{\pi}{3}=(\frac{180}{\pi}\times\frac{\pi}{3})°=60°$；$\frac{5\pi}{12}=(\frac{180}{\pi}\times\frac{5\pi}{12})°=75°$

$\frac{\pi}{2}=(\frac{180}{\pi}\times\frac{\pi}{2})°=90°$；$\frac{5\pi}{6}=(\frac{180}{\pi}\times\frac{5\pi}{6})°=150°$；$\pi=(\frac{180}{\pi}\times\pi)°=180°$

$\frac{5\pi}{4}=(\frac{180}{\pi}\times\frac{5\pi}{4})°=225°$；$\frac{5\pi}{3}=(\frac{180}{\pi}\times\frac{5\pi}{3})°=300°$

配合課本例題 1

3 例題 度與弳的換算 ●●●○○ 練習

（1）試將 540° 與 −1000° 用弧度量表示。

（2）試將 4π 弳、$-\frac{18\pi}{5}$ 弳與 10 弳用度度量表示。

解 （1）$\because \pi$ 弳 $=180°$，$\therefore 1°=\frac{\pi}{180}$ 弳

$540°=\frac{\pi}{180}\times 540=3\pi$（弳）

$-1000°=\frac{\pi}{180}\times(-1000)=-\frac{50\pi}{9}$（弳）

（2）$\because \pi$ 弳 $=180°$，$\therefore 1$ 弳 $=(\frac{180}{\pi})°$

$4\pi=(\frac{180}{\pi}\times 4\pi)°=720°$

$-\frac{18\pi}{5}=[\frac{180}{\pi}\times(-\frac{18\pi}{5})]°=-648°$

$10=(\frac{180}{\pi}\times 10)°=(\frac{1800}{\pi})°\approx 573°$

（1）試將 900° 與 −2160° 用弧度量表示。

（2）試將 $\frac{7\pi}{2}$ 弳、$-\frac{13\pi}{4}$ 弳與 −15 弳用度度量表示。

解 （1）$\because \pi$ 弳 $=180°$，$\therefore 1°=\frac{\pi}{180}$ 弳

$900°=\frac{\pi}{180}\times 900=5\pi$（弳）

$-2160°=\frac{\pi}{180}\times(-2160)=-12\pi$（弳）

（2）$\because \pi$ 弳 $=180°$，$\therefore 1$ 弳 $=(\frac{180}{\pi})°$

$\frac{7\pi}{2}=(\frac{180}{\pi}\times\frac{7\pi}{2})°=630°$

$-\frac{13\pi}{4}=[\frac{180}{\pi}\times(-\frac{13\pi}{4})]°=-585°$

$-15=[\frac{180}{\pi}\times(-15)]°=(-\frac{2700}{\pi})°\approx -859.4°$

4 例題　以弳為單位的三角比 ●●●○○

配合課本例題 2

試求下列各式的值：

(1) $\sin\dfrac{\pi}{6}$。　(2) $\cos(-\dfrac{\pi}{4})$。　(3) $\tan\dfrac{5\pi}{3}$。

解

(1) $\because \dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}\times(\dfrac{180}{\pi})^\circ=30^\circ$

$\therefore \sin\dfrac{\pi}{6}=\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$

(2) $\because -\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}\times(\dfrac{180}{\pi})^\circ=-45^\circ$

$\therefore \cos(-\dfrac{\pi}{4})=\cos(-45^\circ)=\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\because \dfrac{5\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{3}\times(\dfrac{180}{\pi})^\circ=300^\circ$

$\therefore \tan\dfrac{5\pi}{3}=\tan 300^\circ=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$

練習

試求下列各式的值：

(1) $\sin 0$。　(2) $\cos\pi$。　(3) $\tan(-\pi)$。

解

(1) $\because 0=0^\circ$

$\therefore \sin 0=\sin 0^\circ=0$

(2) $\because \pi=180^\circ$

$\therefore \cos\pi=\cos 180^\circ=-1$

(3) $\because -\pi=-180^\circ$

$\therefore \tan(-\pi)=\tan(-180^\circ)=\tan 180^\circ=0$

5 例題　用計算機計算以弳為單位的三角比 ●●○○○

配合課本例題 2

試利用計算機求出下列各三角比：(四捨五入到小數點後第二位)

(1) $\sin 2.1$。　(2) $\cos(5.4\pi)$。　(3) $\tan(-4.5)$。

解

(1) $\sin 2.1\approx 0.863\approx 0.86$

(2) $\cos(5.4\pi)\approx -0.309\approx -0.31$

(3) $\tan(-4.5)\approx -4.637\approx -4.64$

練習

試利用計算機求出下列各三角比：(四捨五入到小數點後第二位)

(1) $\sin 5.5$。　(2) $\cos(4.2\pi)$。　(3) $\tan(-3.5)$。

解

(1) $\sin 5.5\approx -0.705\approx -0.71$

(2) $\cos(4.2\pi)\approx 0.809\approx 0.81$

(3) $\tan(-3.5)\approx -0.374\approx -0.37$

主題 2 弧長與扇形面積公式

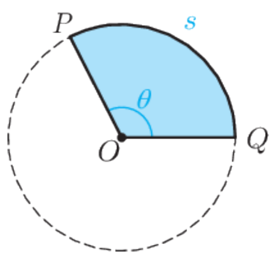
配合課本 P.65～P.66

1. 弧長與扇形面積的公式

設一圓的圓心為 O，半徑為 r，若圓心角 $\angle POQ$ 為 θ 弳，則

(1) 此角所對應的弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 之弧長 $s=r\theta$。

(2) 扇形 POQ 的面積 $A=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rs$。



配合課本例題 3、例題 4

6 例題　弧長與扇形面積公式　●●●○○　練習

已知一扇形 POQ 的半徑為 10，

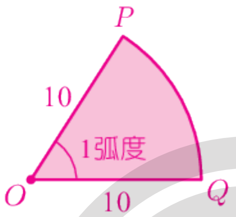
(1) 若圓心角 $\angle POQ=1$ 弳，試求此扇形的弧長 $\overset{\frown}{PQ}$、周長與面積。

(2) 若圓心角 $\angle POQ=120°$，試求此扇形的弧長 $\overset{\frown}{PQ}$、周長與面積。

解 (1) 所求弧長 $\overset{\frown}{PQ}=10\times1=10$

周長 $\overset{\frown}{PQ}=10+10+10=30$

面積 $=\frac{1}{2}\times10^2\times1=50$

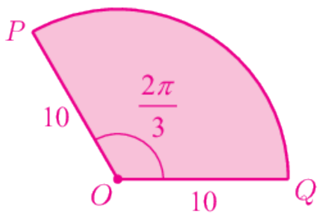


(2) $\because 120°=120\times\frac{\pi}{180}=\frac{2\pi}{3}$ 弳

$\therefore$ 所求弧長 $\overset{\frown}{PQ}=10\times\frac{2\pi}{3}=\frac{20\pi}{3}$

周長 $\overset{\frown}{PQ}=10+10+\frac{20\pi}{3}=20+\frac{20\pi}{3}$

面積 $=\frac{1}{2}\times10^2\times\frac{2\pi}{3}=\frac{100\pi}{3}$



已知一扇形 POQ 的半徑為 6，

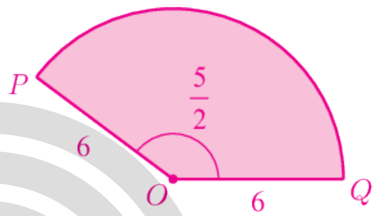
(1) 若圓心角 $\angle POQ=\frac{5}{2}$ 弳，試求此扇形的弧長 $\overset{\frown}{PQ}$、周長與面積。

(2) 若圓心角 $\angle POQ=135°$，試求此扇形的弧長 $\overset{\frown}{PQ}$、周長與面積。

解 (1) 所求弧長 $\overset{\frown}{PQ}=6\times\frac{5}{2}=15$

周長 $\overset{\frown}{PQ}=6+6+15=27$

面積 $=\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{5}{2}=45$

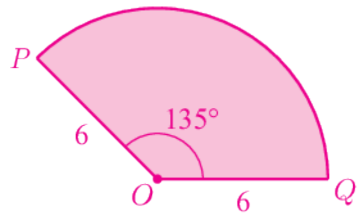


(2) $\because 135°=135\times\frac{\pi}{180}=\frac{3\pi}{4}$ 弳

$\therefore$ 所求弧長 $\overset{\frown}{PQ}=6\times\frac{3\pi}{4}=\frac{9\pi}{2}$

周長 $\overset{\frown}{PQ}=6+6+\frac{9\pi}{2}=12+\frac{9\pi}{2}$

面積 $=\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{3\pi}{4}=\frac{27\pi}{2}$



類題

已知一扇形的半徑為 5，弧長為 2π，試求其圓心角及面積。

解 設所求圓心角為 θ 弳

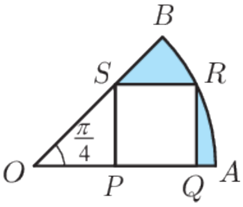
則 $5\theta=2\pi\Rightarrow\theta=\frac{2\pi}{5}$

$\Rightarrow$ 面積 $=\frac{1}{2}\times5^2\times\frac{2\pi}{5}=5\pi$

資優園地

7 例題　面積問題 ●●●●○　練習

如圖，扇形 OAB 的半徑為 8，圓心角 $=\frac{\pi}{4}$，若 $PQRS$ 為正方形，則塗色部分面積為何？



解 設正方形的邊長為 x

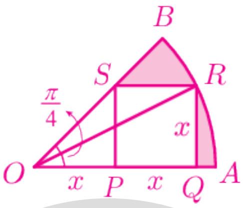
則 $\overline{OP}=x$

連 $\overline{OR}$，在 $\triangle OQR$ 中

$\overline{OR}^2=\overline{OQ}^2+\overline{QR}^2$

$=(2x)^2+x^2=5x^2$

$\Rightarrow 64=5x^2 \Rightarrow x^2=\frac{64}{5} \Rightarrow x=\frac{8}{\sqrt{5}}$

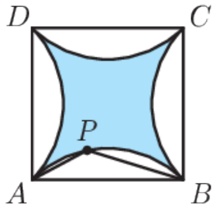


因此，所求 $=$ 扇形 OAB 面積 $-\triangle OPS$ 面積 $-$ 正方形 $PQRS$ 面積

$=\frac{1}{2}\times 8^2\times\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\times(\frac{8}{\sqrt{5}})^2-(\frac{8}{\sqrt{5}})^2$

$=8\pi-\frac{96}{5}$

如圖，邊長為 2 的正方形，向內作四個等弧，P 為弧上一點，若 $\angle APB=\frac{3\pi}{4}$，則塗色部分面積為何？



解 如圖所示

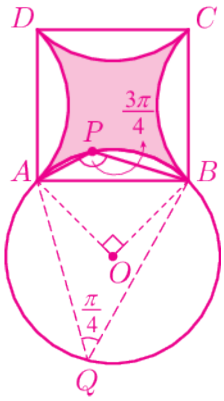
$\because \angle APB=\frac{3\pi}{4}$

$\therefore \angle AQB=\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \angle AOB=90°$

又 $\overline{AB}=2$

$\Rightarrow \overline{OA}=\overline{OB}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$



弓形 APB 面積 $=$ 扇形 OAB 面積 $-\triangle OAB$ 面積

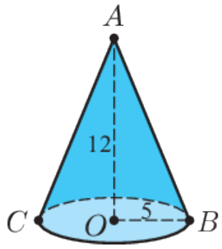
$=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$

$=\frac{\pi}{2}-1$

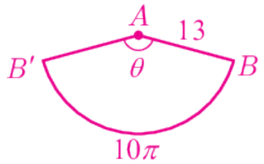
因此，所求 $=2^2-4\times(\frac{\pi}{2}-1)=8-2\pi$

8 例題　面積問題　●●●○○　練習

如圖，將一個底圓半徑為 5 公分，高為 12 公分的直圓錐體的側表面，沿著斜高 $\overline{AB}$ 的方向剪開形成一個扇形，試求此扇形的圓心角及面積。



解 如圖，展開後扇形的半徑



$=\overline{AB}=\sqrt{5^2+12^2}=13$

弧長 $\overset{\frown}{BB'}=$ 底圓周長

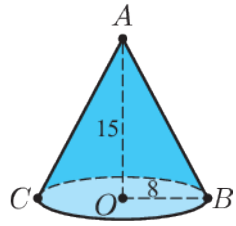
$=5\times2\times\pi=10\pi$

設其圓心角為 θ

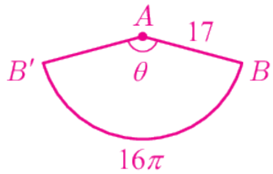
則 $13\theta=10\pi\Rightarrow\theta=\dfrac{10\pi}{13}$

因此，扇形面積 $=\dfrac{1}{2}\times13^2\times\dfrac{10\pi}{13}=65\pi$（平方公分）

試求底圓半徑為 8 公分，高為 15 公分的直圓錐體的表面積。



解 將此直圓錐沿著斜高 $\overline{AB}$ 的方向剪開形成一個扇形，展開後扇形的半徑



$=\overline{AB}=\sqrt{8^2+15^2}=17$

弧長 $\overset{\frown}{BB'}=$ 底圓周長 $=8\times2\times\pi=16\pi$

設其圓心角為 θ

則 $17\theta=16\pi\Rightarrow\theta=\dfrac{16\pi}{17}$

因此，所求 = 側表面積 + 底圓面積

$=\dfrac{1}{2}\times17^2\times\dfrac{16\pi}{17}+\pi\times8^2$

$=136\pi+64\pi=200\pi$

2–1 自我評量

基礎題

1. 試將下列各角以弧度量表示：

(1) $135°$。 (2) $-540°$。 (3) $5°$。 (4) $\pi°$。

解 (1) $\frac{3}{4}\pi$ (2) -3π (3) $\frac{\pi}{36}$ (4) $\frac{\pi^2}{180}$

2. 試將下列各角以度度量表示：

(1) $\frac{7}{6}\pi$ 弳。 (2) $-\frac{3}{4}\pi$ 弳。 (3) $\frac{3}{2}$ 弳。 (4) $\frac{3}{\pi}$ 弳。

解 (1) $210°$ (2) $-135°$ (3) $\frac{270°}{\pi}$ (4) $\frac{540°}{\pi^2}$

3. 試求下列各式的值：

(1) $\sin\frac{3}{4}\pi$。 (2) $\cos\frac{7}{2}\pi$。 (3) $\tan\frac{5}{6}\pi$。 (4) $\cos(-\pi)$。

解 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) 0 (3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (4) -1

4. 試求下列各式的值：

(1) $\sin\frac{\pi}{6}\times\cos\frac{\pi}{6}\times\tan\frac{\pi}{6}$。

(2) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{6}+\tan\frac{3\pi}{4}}$。

(3) $\cos^2\pi+\sin\frac{\pi}{2}+\tan\frac{\pi}{6}\times\tan\frac{5\pi}{4}$。

(4) $\cos\frac{7\pi}{4}-\sin\frac{5\pi}{4}+\tan\frac{5\pi}{3}$。

(5) $\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\frac{\pi}{12}+\tan^2\frac{\pi}{3}$。

解 (1) $\frac{1}{4}$ (2) -3 (3) $2+\frac{\sqrt{3}}{3}$ (4) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (5) 4

5. 已知一扇形的半徑為 10，圓心角為 130°，則此扇形的弧長與面積為何？

解 $\frac{65}{9}\pi$；$\frac{325}{9}\pi$

6. 已知一扇形的半徑為 5，弧長為 6，則此扇形面積為何？

解　15

7. 已知一扇形面積為 12 平方公分，且弧長為 3 公分，則此扇形的半徑與圓心角為何？

解　8 公分；$\frac{3}{8}$ 弳

8. 設一扇形的周長等於半圓的弧長，已知圓的半徑為 6，試求：

(1) 扇形的圓心角。(以弧度量表示)

(2) 扇形面積。

解　(1) $\pi-2$　(2) $18(\pi-2)$

9. 鐘面上，分針長 9 公分，時針長 6 公分，從上午 9 點 40 分到上午 10 點時，時針所掃過的面積大小為何？

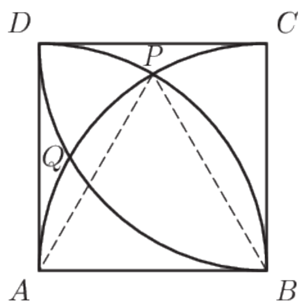
解　π 平方公分

進階題

10. 坐標平面上的點 $P(\sin 100, \cos 100)$ 在第幾象限？

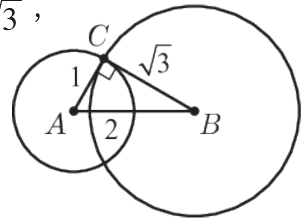
解　二

11. 如圖，在邊長為 6 的正方形 $ABCD$ 中，分別以 A, B, C 為圓心，半徑為 6，作圓弧 $\overset{\frown}{DPB}, \overset{\frown}{AQPC}, \overset{\frown}{BQD}$，試求以兩弧 $\overset{\frown}{AQP}$ 與 $\overset{\frown}{PB}$ 以及 $\overline{AB}$ 所圍的封閉區域面積。



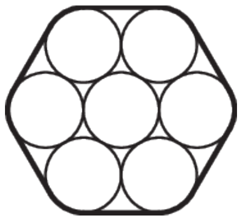
解　$12\pi-9\sqrt{3}$

12. 如圖，有一直角三角形 ABC，$\angle C$ 為直角，$\overline{AB}=2,\ \overline{AC}=1,\ \overline{BC}=\sqrt{3}$，以兩股為半徑作圓，則交集部分之面積與周長為何？



解 $\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$；$\frac{(2+\sqrt{3})\pi}{3}$

13. 包裝七根半徑皆為 1 的圓柱，其截面如圖所示，試問外圍粗黑線條的長度為何？

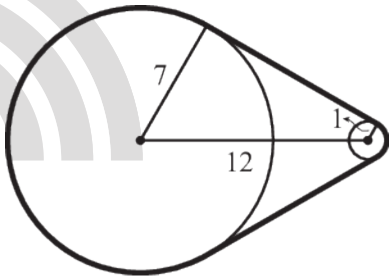


解 $12+2\pi$

14. 如圖，兩輪半徑分別為 1 及 7，中心距離為 12，今以皮帶緊繞此兩輪，使轉動時兩輪同向轉動，試求：

(1) 皮帶長。

(2) 皮帶所圍之面積。

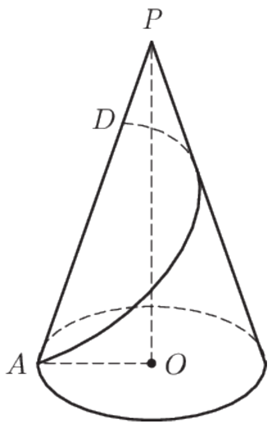


解 (1) $12\sqrt{3}+10\pi$　(2) $48\sqrt{3}+33\pi$

15. 如圖，一直圓錐半徑 $\overline{OA}=5$，高 $\overline{OP}=10\sqrt{2}$

(1) 沿 $\overline{AP}$ 剪開使成一扇形，則此扇形圓心角之弧度量為何？

(2) 若 $\overline{PD}=6$，螞蟻自底圓上一點 A 開始沿錐面繞一圈到 D 點的最短路徑為何？



解 (1) $\frac{2\pi}{3}$　(2) $3\sqrt{39}$

2-2 三角函數的圖形及其應用

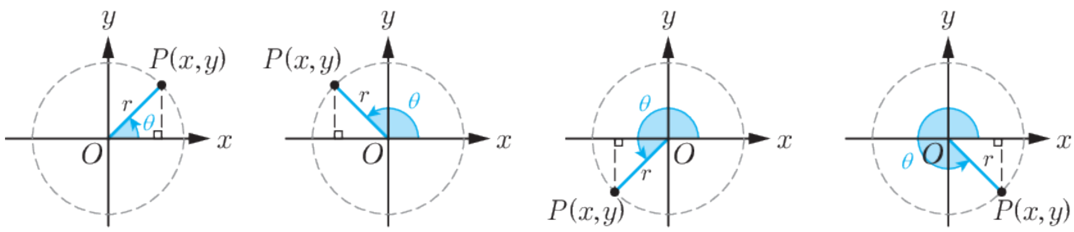
主題 1 正餘弦、正切函數的定義、圖形與性質

配合課本 P.71～P.88

1. 廣義角的三角函數

設 θ 是一個標準位置角，在 θ 的終邊上任取異於原點的一點 $P(x, y)$，令 $r=\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$。定義角 θ 的正弦、餘弦、正切函數如下：

(1) 正弦函數 $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$。 (2) 餘弦函數 $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$。 (3) 正切函數 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$, $x\neq 0$。



第一象限角　第二象限角　第三象限角　第四象限角

例如 當 $P(3, -4)$ 為標準位置角 θ 終邊上的一點時，因為 $x=3$, $y=-4$，所以 $r=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$。利用上述定義，可得角 θ 的正弦、餘弦、正切函數值分別為 $\sin\theta=\dfrac{y}{r}=-\dfrac{4}{5}$, $\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{3}{5}$, $\tan\theta=\dfrac{y}{x}=-\dfrac{4}{3}$。

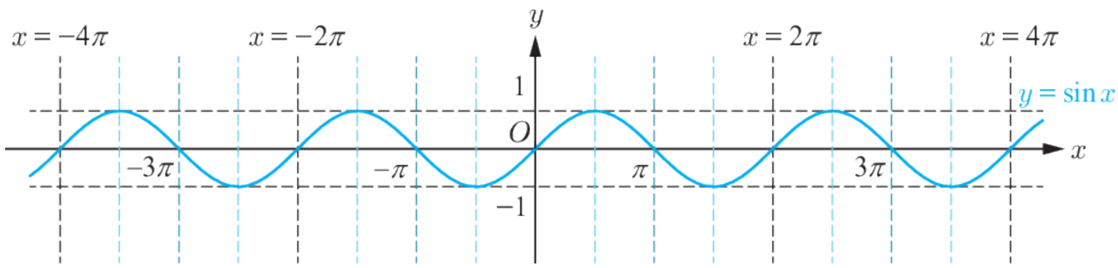
2. 週期函數

對於函數 $y=f(x)$，若存在正數 T，使得定義域內的每個 x 都滿足 $f(x+T)=f(x)$，就稱函數 $f(x)$ 為週期函數。滿足上述條件的 T 中之最小值 p，稱為 $f(x)$ 的週期。

例如 對任意的實數 x，$\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\cos(x+2\pi)=\cos x$ 皆成立，因此，正弦函數 $y=\sin x$ 與餘弦函數 $y=\cos x$ 皆為週期函數。又 2π 是滿足上述關係的最小正數，所以函數 $y=\sin x$ 與 $y=\cos x$ 的週期皆為 2π。

3. 正弦函數的圖形及其性質

(1) 正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形



(2) 正弦函數 $y=\sin x$ 的性質

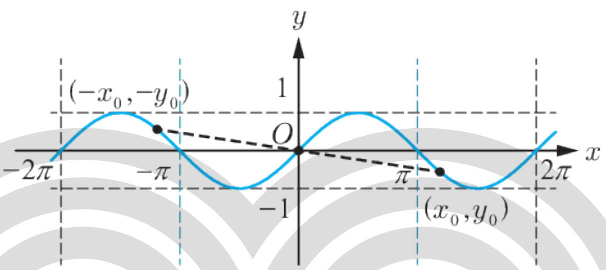
① 定義域：因為對任意實數 x，$\sin x$ 都有意義，所以正弦函數的定義域為所有實數 $\mathbb{R}$。

② 值域：因為正弦函數的應變數 y 的範圍為 $-1\leq y\leq 1$，即閉區間 $[-1,\ 1]$，所以值域為 $[-1,\ 1]=\{y\mid -1\leq y\leq 1,\ y\in\mathbb{R}\}$。

③ 週期：因為 2π 是滿足 $\sin(x+2\pi)=\sin x$ 的最小正數，所以正弦函數圖形的週期為 2π。

④ 線對稱：觀察正弦函數的圖形，可知圖形對稱於通過最高點或最低點的鉛直線（例如 直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $x=\dfrac{3\pi}{2}$）。因此，對於任意的整數 n，鉛直線 $x=\dfrac{(2n+1)\pi}{2}$ 都是函數 $y=\sin x$ 的對稱軸。

⑤ 點對稱：因為對於任意實數 x，$\sin(-x)=-\sin x$ 恆成立，即當點 $(x_0,\ y_0)$ 在 $y=\sin x$ 圖形上時，點 $(-x_0,\ -y_0)$ 也會落在圖形上，所以正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形對稱於原點，如下圖所示。



(3) 函數 $y=\sin x$ 圖形的平移

① 函數 $y=\sin x$ 的圖形經過水平平移 $|h|$ 單位之後，可以得到函數 $y=\sin(x-h)$ 的圖形，其中，$h>0$ 表示向右平移 h 單位；$h<0$ 表示向左平移 $|h|$ 單位。表示如下：

$$y=\sin x\text{ 的圖形}\xrightarrow[|h|\text{ 單位}]{\text{水平平移}}y=\sin(x-h)\text{ 的圖形}$$

② 函數 $y=\sin x$ 的圖形經過鉛直平移 $|k|$ 單位之後，可以得到函數 $y=\sin x+k$ 的圖形，其中，$k>0$ 表示向上平移 k 單位；$k<0$ 表示向下平移 $|k|$ 單位。表示如下：

$$y=\sin x\text{ 的圖形}\xrightarrow[|k|\text{ 單位}]{\text{鉛直平移}}y=\sin x+k\text{ 的圖形}$$

(4) 函數 $y=\sin x$ 圖形的伸縮

① 函數 $y=a\sin x\ (a>0)$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形以 x 軸為基準，鉛直方向拉伸（或壓縮）為 a 倍得到，其週期為 2π。

② 函數 $y=-a\sin x\ (a>0)$ 的圖形可由 $y=a\sin x$ 的圖形以 x 軸為基準，上下翻轉（即對稱 x 軸）得到，其週期為 2π。

③ 函數 $y=\sin bx\ (b>0)$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形以 y 軸為基準，水平方向拉伸（或壓縮）為 $\dfrac{1}{b}$ 倍得到，其週期為 $\dfrac{2\pi}{b}$。

4. 餘弦函數 $y=\cos x$ 的性質

(1) 定義域：所有實數 $\mathbb{R}$。

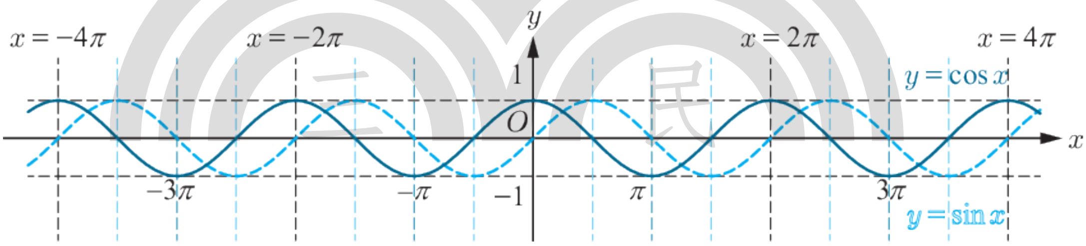
(2) 值域：$[-1, 1]=\{y\mid -1\le y\le 1, y\in\mathbb{R}\}$。

(3) 週期：因為 2π 是滿足 $\cos(x+2\pi)=\cos x$ 的最小正數，所以餘弦函數圖形的週期為 2π。

(4) 線對稱：觀察餘弦函數的圖形，可知圖形對稱於通過最高點或最低點的鉛直線（例如 直線 $x=0$ 或 $x=\pi$）。因此，對於任意的整數 n，鉛直線 $x=n\pi$ 都是函數 $y=\cos x$ 的對稱軸。

(5) 點對稱：因為對於任意實數 x，$\cos(-\frac{\pi}{2}-x)=-\cos(-\frac{\pi}{2}+x)$ 恆成立，即當點 $(-\frac{\pi}{2}+x_0, y_0)$ 在 $y=\cos x$ 圖形上時，點 $(-\frac{\pi}{2}-x_0, -y_0)$ 也會落在圖形上，所以餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形對稱於點 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$。

(6) 因為對任意的實數 x，$\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$ 恆成立，所以 $y=\cos x$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位而得，如下圖所示。



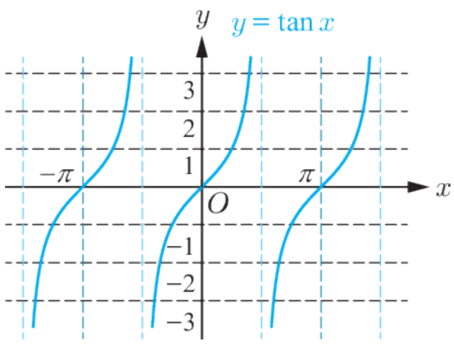
5. 正切函數 $y=\tan x$ 的性質

(1) 定義域：$\{x\mid x\in\mathbb{R}$ 且 $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}\}$。

(2) 值域：所有實數 $\mathbb{R}$。

(3) 週期：對於定義域內任意實數 x，$\tan(x+\pi)=\tan x$ 恆成立，且 π 是滿足上式的最小正數。因此，正切函數圖形的週期為 π。

(4) 對稱性：對於定義域內任意實數 x，$\tan(-x)=-\tan x$ 恆成立，所以正切函數的圖形對稱於原點。



配合課本例題 1

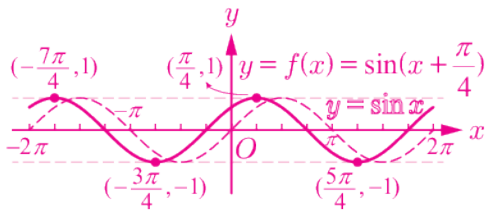
1 例題　正弦函數的平移 ●●●○○　練習

試利用正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形，描繪下列各函數的圖形，並討論其最大值與最小值。

(1) $y=f(x)=\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$。

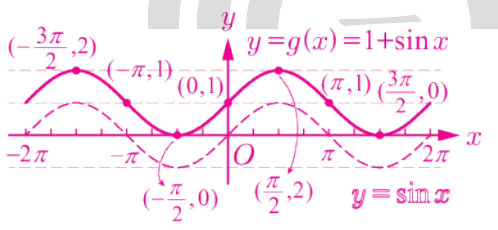
(2) $y=g(x)=1+\sin x$。

解 (1) $y=f(x)=\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 單位而得



由上圖可知，$y=f(x)=\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$ 的最大值為 1，最小值為 -1

(2) $y=g(x)=1+\sin x$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形向上平移 1 單位而得



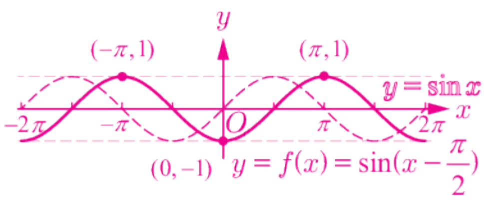
由上圖可知，$y=g(x)=1+\sin x$ 的最大值為 2，最小值為 0

試利用正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形，描繪下列各函數的圖形，並討論其最大值與最小值。

(1) $y=f(x)=\sin(x-\dfrac{\pi}{2})$。

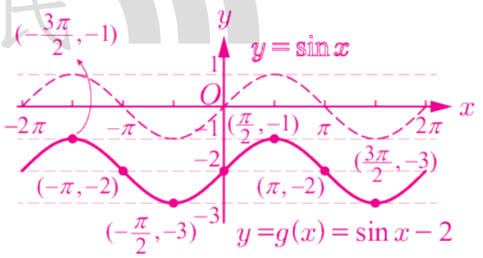
(2) $y=g(x)=\sin x-2$。

解 (1) $y=f(x)=\sin(x-\dfrac{\pi}{2})$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 單位而得



由上圖可知，$y=f(x)=\sin(x-\dfrac{\pi}{2})$ 的最大值為 1，最小值為 -1

(2) $y=g(x)=\sin x-2$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形向下平移 2 單位而得



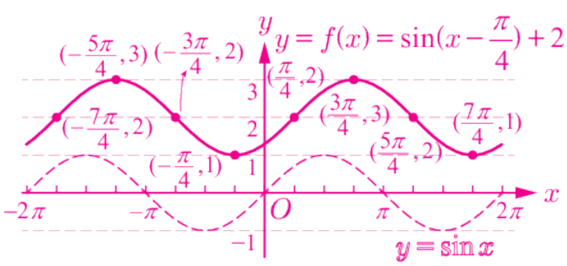
由上圖可知，$y=g(x)=\sin x-2$ 的最大值為 -1，最小值為 -3

類題

試利用正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形，描繪函數 $y=f(x)=\sin(x-\dfrac{\pi}{4})+2$ 的圖形，並討論其最大值與最小值。

解 $y=f(x)=\sin(x-\dfrac{\pi}{4})+2$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 單位、向上平移 2 單位而得

由圖可知，$y=f(x)=\sin(x-\dfrac{\pi}{4})+2$ 的最大值為 3，最小值為 1



配合課本例題 2

2 例題　正弦函數的伸縮 ●●●○○

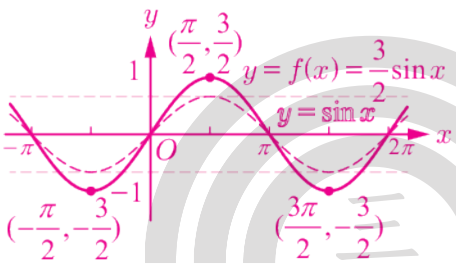
試描繪下列各函數的圖形，並求函數的週期、最大值與最小值。

(1) $y=f(x)=\frac{3}{2}\sin x$。

(2) $y=g(x)=\sin 2x$。

解 (1) 函數 $y=f(x)=\frac{3}{2}\sin x$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形以 x 軸為基準，鉛直方向拉伸為 $\frac{3}{2}$ 倍而得

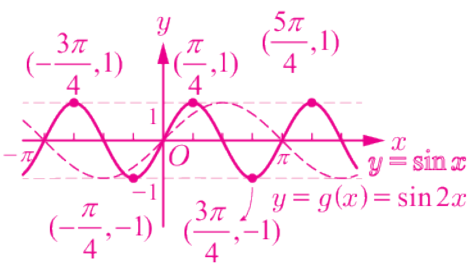
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=f(x)$	0	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0



由上圖可知，$y=f(x)=\frac{3}{2}\sin x$ 的週期為 2π，最大值為 $\frac{3}{2}$，最小值為 $-\frac{3}{2}$

(2) 函數 $y=g(x)=\sin 2x$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形以 y 軸為基準，水平方向壓縮為原來的 $\frac{1}{2}$ 倍而得

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$
$y=g(x)$	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0



由上圖可知，$y=g(x)=\sin 2x$ 的週期為 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，最大值為 1，最小值為 -1

練習

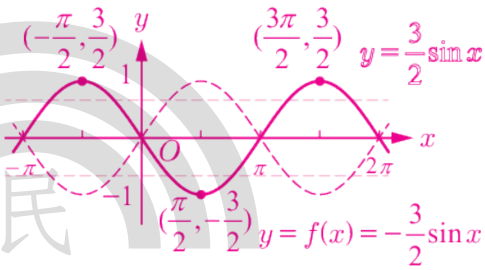
試描繪下列各函數的圖形，並求函數的週期、最大值與最小值。

(1) $y=f(x)=-\frac{3}{2}\sin x$。

(2) $y=g(x)=\sin\frac{x}{2}$。

解 (1) 函數 $y=f(x)=-\frac{3}{2}\sin x$ 的圖形可由 $y=\frac{3}{2}\sin x$ 的圖形以 x 軸為基準，上下翻轉（對稱 x 軸）而得

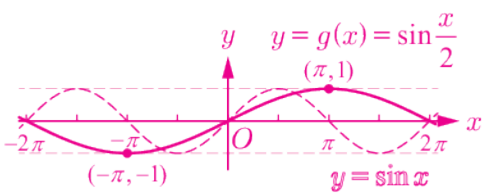
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=f(x)$	0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0



由上圖可知，$y=f(x)=-\frac{3}{2}\sin x$ 的週期為 2π，最大值為 $\frac{3}{2}$，最小值為 $-\frac{3}{2}$

(2) 函數 $y=g(x)=\sin\frac{x}{2}$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形以 y 軸為基準，水平方向拉伸為原來的 2 倍而得

x	-2π	$-\pi$	0	π	2π
$y=g(x)$	0	-1	0	1	0



由上圖可知，$y=g(x)=\sin\frac{x}{2}$ 的週期為 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$，最大值為 1，最小值為 -1

3 例題　函數 $y=a\sin(bx+c)+d$ 的圖形 ●●●●○

試求出函數 $y=3\sin(2x-\frac{\pi}{2})+1$ 的最大、最小值與週期，並描繪其函數圖形。

解　將原函數改寫為 $y=3\sin[2(x-\frac{\pi}{4})]+1$ 的形式後，可透過下列流程畫出其圖形：

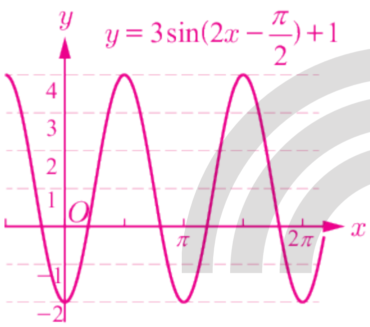
① $y=\sin x$ 的圖形

$\xrightarrow[\text{拉伸為 3 倍}]{\text{鉛直方向}}$ ② $y=3\sin x$ 的圖形

$\xrightarrow[\text{壓縮為 }\frac{1}{2}\text{ 倍}]{\text{水平方向}}$ ③ $y=3\sin 2x$ 的圖形

$\xrightarrow[\frac{\pi}{4}\text{ 單位}]{\text{向右平移}}$ ④ $y=3\sin[2(x-\frac{\pi}{4})]$ 的圖形

$\xrightarrow[\text{1 單位}]{\text{向上平移}}$ ⑤ $y=3\sin[2(x-\frac{\pi}{4})]+1$ 的圖形



由函數 $y=3\sin(2x-\frac{\pi}{2})+1$ 的圖形可知

最大值為 $3\times1+1=4$

最小值為 $3\times(-1)+1=-2$

週期為 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

練習　配合課本例題 3

試求出函數 $y=2\sin(3x+\frac{\pi}{2})-1$ 的最大、最小值與週期，並描繪其函數圖形。

解　將原函數改寫為 $y=2\sin[3(x+\frac{\pi}{6})]-1$ 的形式後，可透過下列流程畫出其圖形：

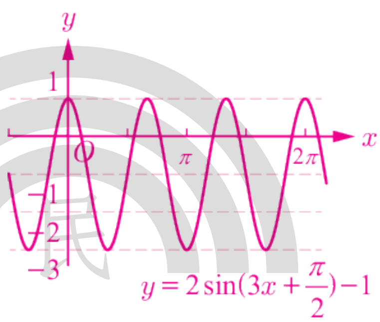
① $y=\sin x$ 的圖形

$\xrightarrow[\text{拉伸為 2 倍}]{\text{鉛直方向}}$ ② $y=2\sin x$ 的圖形

$\xrightarrow[\text{壓縮為 }\frac{1}{3}\text{ 倍}]{\text{水平方向}}$ ③ $y=2\sin 3x$ 的圖形

$\xrightarrow[\frac{\pi}{6}\text{ 單位}]{\text{向左平移}}$ ④ $y=2\sin[3(x+\frac{\pi}{6})]$ 的圖形

$\xrightarrow[\text{1 單位}]{\text{向下平移}}$ ⑤ $y=2\sin[3(x+\frac{\pi}{6})]-1$ 的圖形



由函數 $y=2\sin(3x+\frac{\pi}{2})-1$ 的圖形可知

最大值為 $2\times1-1=1$

最小值為 $2\times(-1)-1=-3$

週期為 $\frac{2\pi}{3}$

配合課本 P.83 隨堂鍊習

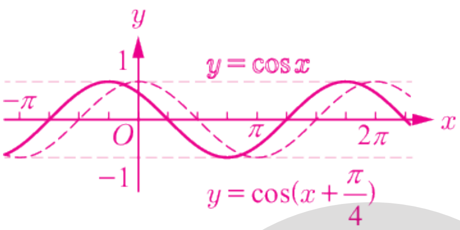
4 例題　餘弦函數的圖形 ●●●○○　練習

試利用餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形，描繪下列各函數的圖形，並求函數的最大值、最小值與週期。

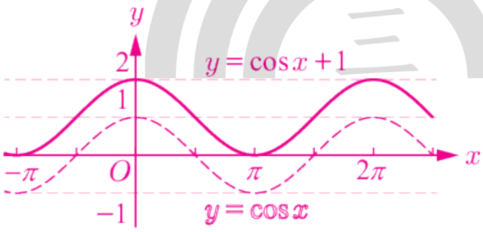
(1) $y=\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$。　(2) $y=\cos x+1$。

(3) $y=\dfrac{1}{3}\cos x$。　(4) $y=\cos\dfrac{x}{2}$。

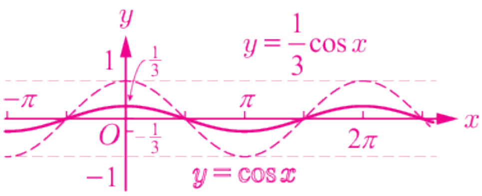
解 (1) 可由 $y=\cos x$ 的圖形向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 單位而得，其最大值為 1，最小值為 -1，且週期為 2π



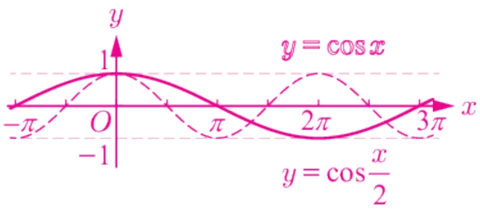
(2) 可由 $y=\cos x$ 的圖形向上平移 1 單位而得，其最大值為 2，最小值為 0，且週期為 2π



(3) 可由 $y=\cos x$ 的圖形鉛直方向壓縮為 $\dfrac{1}{3}$ 倍而得，其最大值為 $\dfrac{1}{3}$，最小值為 $-\dfrac{1}{3}$，且週期為 2π



(4) 可由 $y=\cos x$ 的圖形水平方向拉伸為 2 倍而得，其最大值為 1，最小值為 -1，且週期為 4π



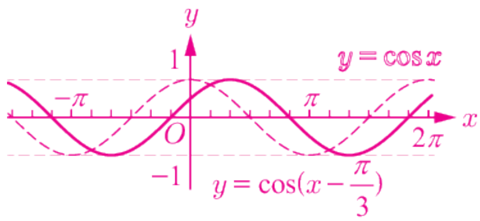
練習

試利用餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形，描繪下列各函數的圖形，並求函數的最大值、最小值與週期。

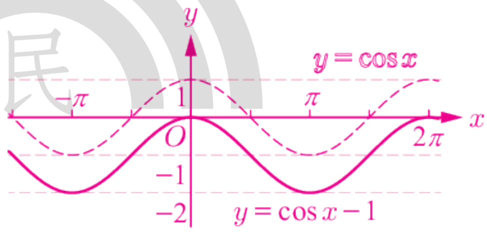
(1) $y=\cos(x-\dfrac{\pi}{3})$。　(2) $y=\cos x-1$。

(3) $y=2\cos x$。　(4) $y=\cos 2x$。

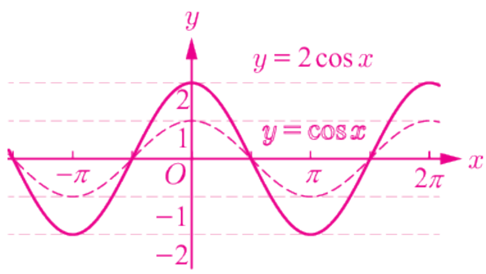
解 (1) 可由 $y=\cos x$ 的圖形向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 單位而得，其最大值為 1，最小值為 -1，且週期為 2π



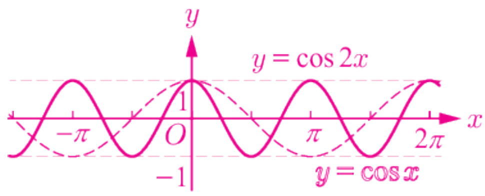
(2) 可由 $y=\cos x$ 的圖形向下平移 1 單位而得，其最大值為 0，最小值為 -2，且週期為 2π



(3) 可由 $y=\cos x$ 的圖形鉛直方向拉伸為 2 倍而得，其最大值為 2，最小值為 -2，且週期為 2π



(4) 可由 $y=\cos x$ 的圖形水平方向壓縮為 $\dfrac{1}{2}$ 倍而得，其最大值為 1，最小值為 -1，且週期為 π



配合課本例題 4

5 例題　餘弦函數的圖形 ●●●●○

試求出函數 $y=2\cos(3x+\pi)+1$ 的最大值、最小值與週期，並描繪其函數圖形。

解 將原函數改寫為 $y=2\cos[3(x+\frac{\pi}{3})]+1$ 的形式後，可透過下列流程畫出其圖形：

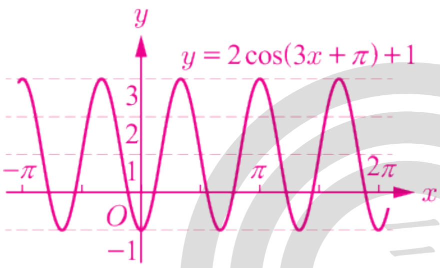
① $y=\cos x$ 的圖形

$\xrightarrow[\text{拉伸為 2 倍}]{\text{鉛直方向}}$ ② $y=2\cos x$ 的圖形

$\xrightarrow[\text{壓縮為 }\frac{1}{3}\text{ 倍}]{\text{水平方向}}$ ③ $y=2\cos 3x$ 的圖形

$\xrightarrow[\frac{\pi}{3}\text{ 單位}]{\text{向左平移}}$ ④ $y=2\cos[3(x+\frac{\pi}{3})]$ 的圖形

$\xrightarrow[\text{1 單位}]{\text{向上平移}}$ ⑤ $y=2\cos[3(x+\frac{\pi}{3})]+1$ 的圖形



故函數 $y=2\cos(3x+\pi)+1$ 的最大值為 $2\times1+1=3$，最小值為 $2\times(-1)+1=-1$，且週期為 $\frac{2\pi}{3}$

練習

試求出函數 $y=3\cos(2x-\frac{\pi}{2})-1$ 的最大值、最小值與週期，並描繪其函數圖形。

解 將原函數改寫為 $y=3\cos[2(x-\frac{\pi}{4})]-1$ 的形式後，可透過下列流程畫出其圖形：

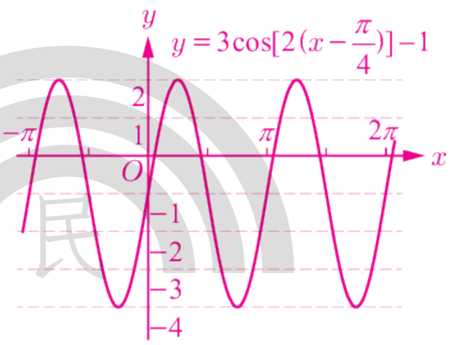
① $y=\cos x$ 的圖形

$\xrightarrow[\text{拉伸為 3 倍}]{\text{鉛直方向}}$ ② $y=3\cos x$ 的圖形

$\xrightarrow[\text{壓縮為 }\frac{1}{2}\text{ 倍}]{\text{水平方向}}$ ③ $y=3\cos 2x$ 的圖形

$\xrightarrow[\frac{\pi}{4}\text{ 單位}]{\text{向右平移}}$ ④ $y=3\cos[2(x-\frac{\pi}{4})]$ 的圖形

$\xrightarrow[\text{1 單位}]{\text{向下平移}}$ ⑤ $y=3\cos[2(x-\frac{\pi}{4})]-1$ 的圖形



故函數 $y=3\cos(2x-\frac{\pi}{2})-1$ 的最大值為 $3\times1-1=2$，最小值為 $3\times(-1)-1=-4$，且週期為 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

2

6 例題　正切函數的圖形

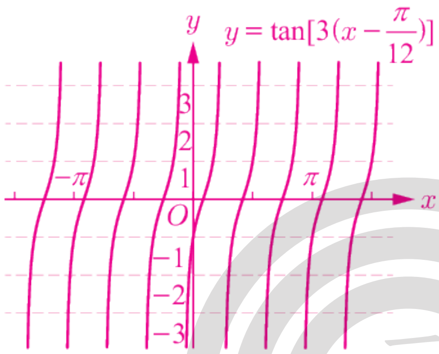
試求出函數 $y=\tan(3x-\frac{\pi}{4})$ 的週期，並描繪其函數圖形。

解 將原函數改寫為 $y=\tan[3(x-\frac{\pi}{12})]$ 的形式後可透過下列流程畫出其圖形：

① $y=\tan x$ 的圖形

$\xrightarrow[\text{壓縮為 }\frac{1}{3}\text{ 倍}]{\text{水平方向}}$ ② $y=\tan 3x$ 的圖形

$\xrightarrow[\frac{\pi}{12}\text{ 單位}]{\text{向右平移}}$ ③ $y=\tan[3(x-\frac{\pi}{12})]$ 的圖形



故函數 $y=\tan(3x-\frac{\pi}{4})$ 的週期為 $\frac{\pi}{3}$

練習

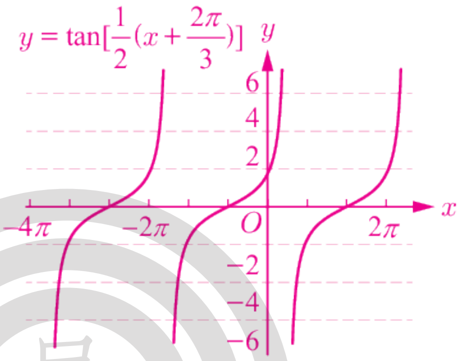
試求出函數 $y=\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})$ 的週期，並描繪其函數圖形。

解 將原函數改寫為 $y=\tan[\frac{1}{2}(x+\frac{2\pi}{3})]$ 的形式後，可透過下列流程畫出其圖形：

① $y=\tan x$ 的圖形

$\xrightarrow[\text{拉伸為 2 倍}]{\text{水平方向}}$ ② $y=\tan\frac{x}{2}$ 的圖形

$\xrightarrow[\frac{2\pi}{3}\text{ 單位}]{\text{向左平移}}$ ③ $y=\tan[\frac{1}{2}(x+\frac{2\pi}{3})]$ 的圖形



故函數 $y=\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})$ 的週期為 $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$

主題 2 三角函數圖形的應用

配合課本 P.89～P.91

1. 解含有三角函數的方程式

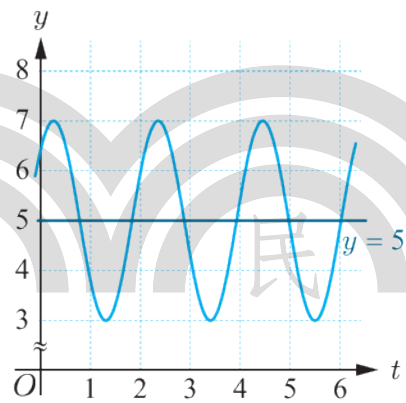
利用圖形的交點（個數）可以知道三角方程式的實根（個數）。

2. 週期現象的數學模型

(1) 正弦函數 $y=\sin x$ 是被用來描述波動與週期現象最基本且簡單的函數。

(2) 函數 $y=a\sin(\omega t+\phi)+k$ 的圖形（其中 a, k, ω, ϕ 均為常數）又稱為正弦波。在正弦函數 $y=a\sin(\omega t+\phi)+k$ 的圖形中，我們將水平線 $y=k$ 稱為基線，而最高點或最低點至基線的距離稱為振幅，其值為 $|a|$；t 的係數 ω 稱為角速度；ϕ 稱為相位角。

例如 在函數 $y=2\sin(3t+\frac{\pi}{4})+5$ 的圖形中，基線為 $y=5$；振幅為 2；角速度為 3；相位角為 $\frac{\pi}{4}$。



2

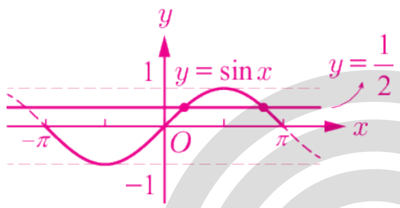
7 例題　含有三角函數的方程式

(1) 在 $-\pi\le x\le\pi$ 的範圍內，試求 $y=\sin x$ 的圖形與水平線 $y=\dfrac{1}{2}$ 的交點個數。

(2) 在 $-\pi\le x\le\pi$ 的範圍內，試求方程式 $\sin x=\dfrac{1}{2}$ 的實根個數。

(3) 在 $-\pi\le x\le\pi$ 的範圍內，試求不等式 $\sin x\ge\dfrac{1}{2}$ 的解。

解 (1) 在坐標平面上，描繪出 $y=\sin x$ 與 $y=\dfrac{1}{2}$ 的圖形：

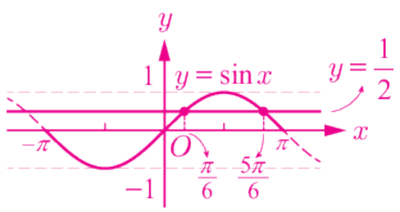


如圖，在 $-\pi\le x\le\pi$ 的範圍內，$y=\sin x$ 的圖形與水平線 $y=\dfrac{1}{2}$ 共有 2 個交點

(2) ∵ 方程式 $\sin x=\dfrac{1}{2}$ 的實根個數等於 $y=\sin x$ 的圖形與水平線 $y=\dfrac{1}{2}$ 的交點個數

∴ 可知在 $-\pi\le x\le\pi$ 的範圍內，方程式 $\sin x=\dfrac{1}{2}$ 共有 2 個實根

(3)



由 $y=\sin x$ 與 $y=\dfrac{1}{2}$ 的圖形可知

當 $\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{5\pi}{6}$ 時，$\sin x\ge\dfrac{1}{2}$

因此，不等式 $\sin x\ge\dfrac{1}{2}$ 的解為 $\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{5\pi}{6}$

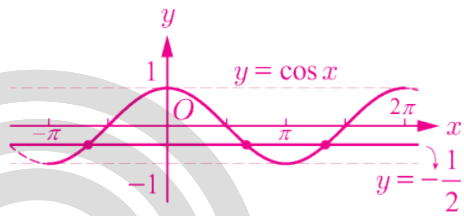
練習　配合課本例題 5

(1) 在 $-\pi\le x\le 2\pi$ 的範圍內，試求 $y=\cos x$ 的圖形與水平線 $y=-\dfrac{1}{2}$ 的交點個數。

(2) 在 $-\pi\le x\le 2\pi$ 的範圍內，試求方程式 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ 的實根個數。

(3) 在 $-\pi\le x\le 2\pi$ 的範圍內，試求不等式 $\cos x\le-\dfrac{1}{2}$ 的解。

解 (1) 在坐標平面上，描繪出 $y=\cos x$ 與 $y=-\dfrac{1}{2}$ 的圖形：

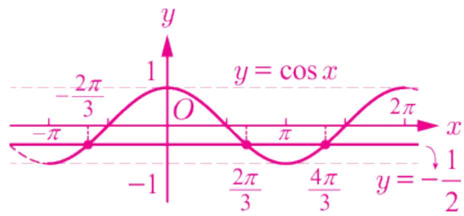


如圖，在 $-\pi\le x\le 2\pi$ 的範圍內，$y=\cos x$ 的圖形與水平線 $y=-\dfrac{1}{2}$ 共有 3 個交點

(2) ∵ 方程式 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ 的實根個數等於 $y=\cos x$ 的圖形與水平線 $y=-\dfrac{1}{2}$ 的交點個數

∴ 可知在 $-\pi\le x\le 2\pi$ 的範圍內，方程式 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ 共有 3 個實根

(3)



由 $y=\cos x$ 與 $y=-\dfrac{1}{2}$ 的圖形可知

當 $-\pi\le x\le-\dfrac{2\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}\le x\le\dfrac{4\pi}{3}$ 時

$\cos x\le-\dfrac{1}{2}$

因此，不等式 $\cos x\le-\dfrac{1}{2}$ 的解為

$-\pi\le x\le-\dfrac{2\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}\le x\le\dfrac{4\pi}{3}$

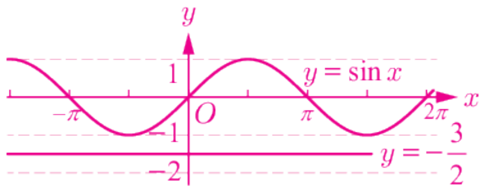
配合課本例題 6

8 例題　三角方程式的實根個數 ●●●●○　練習

試求下列方程式的實根個數：

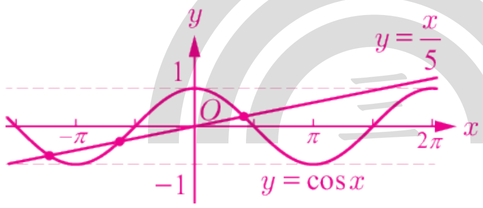
(1) $\sin x=-\dfrac{3}{2}$。　(2) $\cos x=\dfrac{x}{5}$。

解 (1) 在同一坐標平面上，描繪出 $y=\sin x$ 與 $y=-\dfrac{3}{2}$ 的圖形：



由圖可知，$y=\sin x$ 的圖形與 $y=-\dfrac{3}{2}$ 的圖形沒有交點，∴方程式 $\sin x=-\dfrac{3}{2}$ 沒有實根

(2) 在同一坐標平面上，描繪出 $y=\cos x$ 與 $y=\dfrac{x}{5}$ 的圖形：



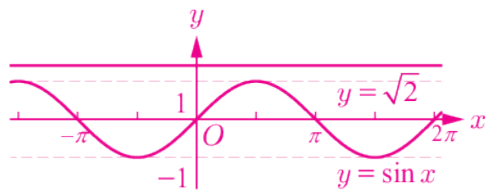
由圖可知，$y=\cos x$ 的圖形與 $y=\dfrac{x}{5}$ 的圖形有 3 個交點，∴方程式 $\cos x=\dfrac{x}{5}$ 有 3 個實根

試求下列方程式的實根個數：

(1) $\sin x-\sqrt{2}=0$。　(2) $8\cos x=x$。

解 (1) $\sin x-\sqrt{2}=0\Rightarrow\sin x=\sqrt{2}$

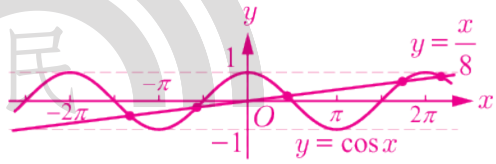
在同一坐標平面上，描繪出 $y=\sin x$ 與 $y=\sqrt{2}$ 的圖形：



由圖可知，$y=\sin x$ 的圖形與 $y=\sqrt{2}$ 的圖形沒有交點，∴方程式 $\sin x-\sqrt{2}=0$ 沒有實根

(2) $8\cos x=x\Rightarrow\cos x=\dfrac{x}{8}$

在同一坐標平面上，描繪出 $y=\cos x$ 與 $y=\dfrac{x}{8}$ 的圖形：



由圖可知，$y=\cos x$ 的圖形與 $y=\dfrac{x}{8}$ 的圖形有 5 個交點，∴方程式 $\cos x=\dfrac{x}{8}$ 有 5 個實根

配合課本例題 7

9 例題　正弦波 ●●●○○　練習

試寫出滿足下列特徵的正弦波：

基線為 $y=1$，振幅為 2，週期為 $\dfrac{2\pi}{3}$，相位角為 π。

解 設所求的正弦波為 $y=f(x)=a\sin(\omega x+\phi)+k$

則振幅 $a=2$，基線為 $y=k=1$，相位角 $\phi=\pi$

週期為 $\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{3}\Rightarrow\omega=3$

∴所求正弦波為 $y=2\sin(3x+\pi)+1$

試寫出滿足下列特徵的正弦波：

基線為 $y=-1$，振幅為 3，週期為 π，相位角為 $-\dfrac{\pi}{3}$。

解 設所求的正弦波為 $y=f(x)=a\sin(\omega x+\phi)+k$

則振幅 $a=3$，基線為 $y=k=-1$，相位角 $\phi=-\dfrac{\pi}{3}$

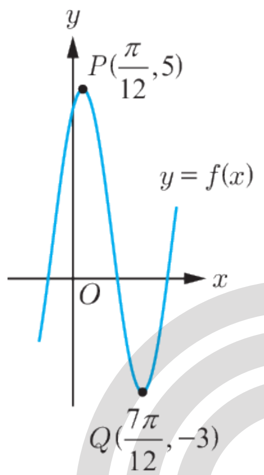
週期為 $\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi\Rightarrow\omega=2$

∴所求正弦波為 $y=3\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})-1$

配合課本例題 8

10 例題　週期現象的數學模型　練習

阿三做實驗觀察一波動現象，得到函數 $y=f(x)=a\sin(\omega x+\phi)+k$ 的部分圖形，如圖所示。已知 $a>0,\ \omega>0,\ 0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$，其中 $P(\frac{\pi}{12},\ 5)$ 為最高點，$Q(\frac{7\pi}{12},\ -3)$ 為最低點，則序組 $(a,\ \omega,\ \phi,\ k)$ 為何？



解

基線為 $y=\frac{5+(-3)}{2}=1\Rightarrow k=1$

振幅為 $5-1=4\Rightarrow a=4$

由圖形可知，此函數的週期為

$2\times(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12})=\pi$

$\therefore \frac{2\pi}{\omega}=\pi\Rightarrow\omega=2$

$\Rightarrow$ 函數 $f(x)=4\sin(2x+\phi)+1$

點 $P(\frac{\pi}{12},\ 5)$ 代入可得

$5=4\sin(2\times\frac{\pi}{12}+\phi)+1\Rightarrow\sin(\frac{\pi}{6}+\phi)=1$

$\because 0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$，$\therefore\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{6}+\phi\le\frac{2\pi}{3}$

因此，$\frac{\pi}{6}+\phi=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\phi=\frac{\pi}{3}$

故序組 $(a,\ \omega,\ \phi,\ k)=(4,\ 2,\ \frac{\pi}{3},\ 1)$

阿三參與某次實驗探索活動發現：在一均勻的磁場中，等速運動的線圈所產生的電流 I（安培）是時間 t（秒）的正弦函數：$I(t)=2\sin(\frac{3}{4}t-\frac{\pi}{6})+5$，其中 $t\ge0$，試回答下列問題。

(1) 實驗一開始 $(t=0)$ 時，電流大小為多少安培？

(2) 此線圈可以產生的最大電流為多少安培？

(3) 試求電流變化的週期。

解

(1) 所求 $=I(0)=2\sin(-\frac{\pi}{6})+5$

$=2\times(-\frac{1}{2})+5=4$（安培）

(2) 當 $\sin(\frac{3}{4}t-\frac{\pi}{6})=1$ 時，$I(t)$ 有最大值 $=2\times1+5=7$（安培）

(3) 所求 $=\frac{2\pi}{\frac{3}{4}}=\frac{8\pi}{3}$（秒）

資優園地

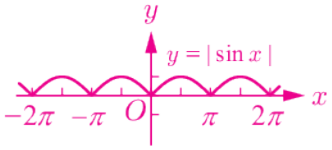
11 例題 三角函數圖形的描繪 ●●●○○ 練習

例題

(1) 試描繪 $y=|\sin x|$ 的圖形，並求出其週期。

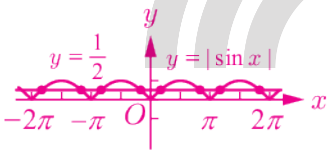
(2) 在 $-2\pi\le x\le 2\pi$ 的範圍內，試求方程式 $|\sin x|=\dfrac{1}{2}$ 的實根個數。

解 (1) $y=|\sin x|$ 的圖形如下所示



由上圖可知，$y=|\sin x|$ 圖形的週期 $=\pi$

(2) 方程式 $|\sin x|=\dfrac{1}{2}$ 的實根個數，即 $y=|\sin x|$ 圖形與水平線 $y=\dfrac{1}{2}$ 的交點個數



如上圖，在 $-2\pi\le x\le 2\pi$ 的範圍內

$\because y=|\sin x|$ 圖形與水平線 $y=\dfrac{1}{2}$ 有 8 個相異交點

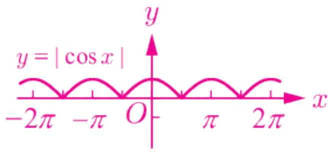
$\therefore$ 所求方程式 $|\sin x|=\dfrac{1}{2}$ 有 8 個相異實根

練習

(1) 試描繪 $y=|\cos x|$ 的圖形，並求出其週期。

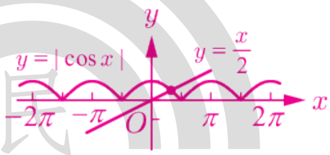
(2) 試求方程式 $|\cos x|=\dfrac{x}{2}$ 的實根個數。

解 (1) $y=|\cos x|$ 的圖形如下所示



由上圖可知，$y=|\cos x|$ 圖形的週期 $=\pi$

(2) 方程式 $|\cos x|=\dfrac{x}{2}$ 的實根個數，即 $y=|\cos x|$ 圖形與直線 $y=\dfrac{x}{2}$ 的交點個數



如上圖

$\because y=|\cos x|$ 圖形與直線 $y=\dfrac{x}{2}$ 有 1 個交點

$\therefore$ 所求方程式 $|\cos x|=\dfrac{x}{2}$ 有 1 個實根

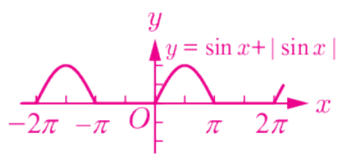
類題

試描繪 $y=\sin x+|\sin x|$ 的圖形，並求出其週期。

解 當 x 在第一與第二象限時，$y=\sin x+|\sin x|=\sin x+\sin x=2\sin x$

當 x 在第三與第四象限時，$y=\sin x+|\sin x|=\sin x+(-\sin x)=0$

由圖可知，$y=\sin x+|\sin x|$ 圖形的週期 $=2\pi$



2–2 自我評量

基礎題

1. 試比較 $a=\cos 1,\ b=\cos 2,\ c=\cos 3,\ d=\cos 4,\ e=\cos 5$ 五數的大小關係。（以 a, b, c, d, e 表示）

解 $a>e>b>d>c$

2. 試比較 $a=\tan 1,\ b=\tan 2,\ c=\tan 3,\ d=\tan 4$ 的大小關係。（以 a, b, c, d 表示）

解 $a>d>c>b$

3. 若 $y=\sin x$ 與 $y=\frac{1}{3}$ 的圖形在 $0\le x\le 2\pi$ 之交點為 $A(\alpha, \frac{1}{3}), B(\beta, \frac{1}{3})$，則 $\alpha+\beta$ 之值為何？

解 π

4. 試求方程式 $8\cos x=x$ 的實根個數。

解 5

5. 在 $-\pi<x<\pi$ 的範圍中，試求方程式 $\tan x=1-x$ 的實根個數。

解 3

6. 若 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的圖形是由 $y=\sin x$ 圖形，先以 y 軸為基準，水平方向伸縮為原來的 a 倍，再向左移 b 得到，則數對 $(a,\ b)$ 之值為何？

解 $(\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{6})$

7. 試求函數 $y=\pi\cos(3x-2)$ 的週期。

解 $\frac{2\pi}{3}$

8. 試求函數 $y=\cos(\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{4})-2$ 的週期。

解 4

9. 將函數 $y=\sin x$ 的圖形向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位，所得新函數為何？

(A) $y=\cos(-x)$　(B) $y=-\cos x$　(C) $y=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

(D) $y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$　(E) $y=-\sin x$

解 (B)(D)

10. 關於函數 $f(x)=2\sin 3x$ 的敘述，下列哪些選項是正確的？

(A) $-2\leq f(x)\leq 2$　(B) $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 時有最大值　(C) $f(x)$ 的週期為 $\frac{2\pi}{3}$

(D) $y=f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x=\frac{\pi}{2}$　(E) $f(2)>0$

解 (A)(B)(C)(D)

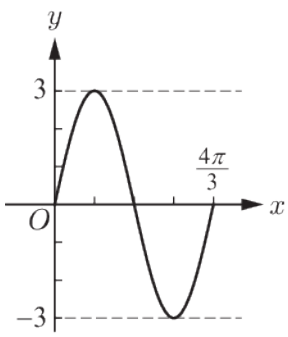
11. 有關 $y=f(x)=2\sin(3x-\frac{\pi}{6})+1$（$x$ 為實數）之圖形，下列哪些敘述是正確的？

(A) 週期為 $\frac{2\pi}{3}$　(B) $-2\le f(x)\le 2$　(C) $f(x)$ 在 $x=\frac{5\pi}{9}$ 時有最小值

(D) 其圖形對稱於 $x=\frac{\pi}{6}$　(E) 與直線 $y+\frac{3}{2}=0$ 之交點有無限多個

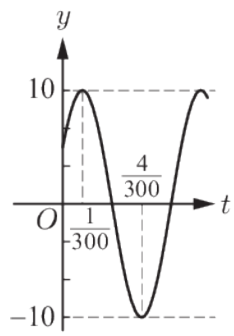
解　(A)(C)

12. 右圖為函數 $y=a\sin bx,\ b>0$ 之部分圖形，則 $a+b$ 之值為何？



解　$\frac{9}{2}$

13. 電流強度 I（安培）隨時間 t（秒）變化的函數 $I(t)=a\sin(bt+c)$ 如圖所示，其中 $a,\ b>0,\ 0\le c<\pi$，則序組 $(a,\ b,\ c)$ 之值為何？



解　$(10,\ 100\pi,\ \frac{\pi}{6})$

14. 設 $-\pi\le x\le 2\pi$，函數 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，試問：

(1) 其圖形之振幅、角速度與相位角？

(2) 其圖形與 x 軸有幾個交點？

解　(1) 3；2；$\frac{\pi}{3}$　(2) 6

15. 若 $-\pi\le x\le\pi$，則滿足 $\sin x<\cos x$ 之 x 的範圍為何？

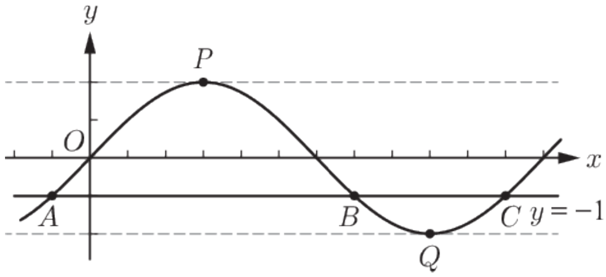
解　$-\frac{3\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$

進階題

16. 設 $a=\sin 1,\ b=\sin 2,\ c=\sin 3,\ d=\cos 4,\ e=\cos 5$，則 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 的大小順序為何？

解　$b>a>e>c>d$

17. 如圖，已知 $a>0,\ b>0$，函數 $f(x)=a\sin bx$ 的圖形通過最高點 $P(3,\ 2)$ 及最低點 $Q(9,\ -2)$，且與直線 $y=-1$ 交於 $A,\ B,\ C$ 三點，試求 $\overline{AB}$ 的值。

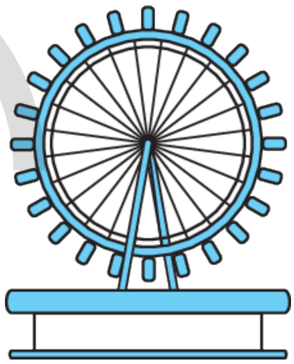


解　8

18. 美麗華摩天輪直徑為 70 公尺，在最低位置時離地面 30 公尺，並且依逆時針方向等速率運轉，每轉一圈需時 15 分鐘。阿三在摩天輪最低位置時入座，試問：

(1) 阿三入座 10 分鐘後離地面的高度？

(2) 若阿三入座 x 分鐘後，離地面的高度可表為 $a\sin(bx-\frac{\pi}{2})+c$ 公尺，$a>0,\ b>0$，則序組 $(a,\ b,\ c)$ 之值為何？



解　(1) $82\frac{1}{2}$　(2) $(35,\ \frac{2\pi}{15},\ 65)$

19. 設 $f(x)=4\cos^2 x+4\sin x+3,\ x$ 為實數，試問：

(1) $f(x)$ 的最大值？

(2) $f(x)$ 的最小值？

(3) 使 $f(x)$ 有最大值的最小正數 x 之值為何？

解　(1) 8　(2) -1　(3) $\frac{\pi}{6}$

2-3 三角的和角與差角公式

主題 1 和角公式與差角公式

配合課本 P.97～P.106

1. 正餘弦的和差角公式

設 α 和 β 為廣義角，則

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。

(2) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$。

(3) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。

(4) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。

2. 正切的和角與差角公式

設 α 和 β 為廣義角，當 $\tan\alpha, \tan\beta, \tan(\alpha\pm\beta)$ 皆有意義時，滿足

(1) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$。

(2) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$。

3. 坐標平面上，若直線 $L: y=mx+k$ 與 x 軸正向的夾角為 θ，則 L 的斜率 $m=\tan\theta$。

例題 1 正餘弦的和差角公式 ●●●○○

配合課本例題 1、例題 2

試利用正餘弦的和差角公式求出 $\sin 15°$, $\sin 75°$, $\cos 15°$ 以及 $\cos 75°$ 的值。

解

$\sin 15°=\sin(60°-45°)$
$=\sin 60°\cos 45°-\cos 60°\sin 45°$
$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\sin 75°=\sin(45°+30°)$
$=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°$
$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cos 15°=\cos(60°-45°)$
$=\cos 60°\cos 45°+\sin 60°\sin 45°$
$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cos 75°=\cos(30°+45°)$
$=\cos 30°\cos 45°-\sin 30°\sin 45°$
$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

練習

試利用正餘弦的和差角公式求出 $\sin 105°$, $\sin 165°$, $\cos 105°$ 以及 $\cos 165°$ 的值。

解

$\sin 105°=\sin(60°+45°)$
$=\sin 60°\cos 45°+\cos 60°\sin 45°$
$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin 165°=\sin(120°+45°)$
$=\sin 120°\cos 45°+\cos 120°\sin 45°$
$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+(\dfrac{-1}{2})\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\cos 105°=\cos(60°+45°)$
$=\cos 60°\cos 45°-\sin 60°\sin 45°$
$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\cos 165°=\cos(120°+45°)$
$=\cos 120°\cos 45°-\sin 120°\sin 45°$
$=(-\dfrac{1}{2})\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2 例題　正餘弦的和差角公式

配合課本例題 3

試求下列各式的值：

(1) $\cos 17°\cos 43° - \sin 17°\sin 43°$。

(2) $\sin 8°\cos 37° + \cos 8°\sin 37°$。

解

(1) 所求 $= \cos(17° + 43°) = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

(2) 所求 $= \sin(8° + 37°) = \sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

練習

試求下列各式的值：

(1) $\sin 110°\cos 20° - \cos 110°\sin 20°$。

(2) $\cos 8°\cos 158° + \sin 8°\sin 158°$。

解

(1) 所求 $= \sin(110° - 20°) = \sin 90° = 1$

(2) 所求 $= \cos(158° - 8°) = \cos 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3 例題　正餘弦的和差角公式

配合課本例題 4

設 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$，若已知 $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\sin\beta = \dfrac{1}{4}$，試求出 $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ 的值。

解

$\because 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ 且 $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$

$\therefore \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \dfrac{4}{5}$

$\because \dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ 且 $\sin\beta = \dfrac{1}{4}$

$\therefore \cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = \dfrac{-\sqrt{15}}{4}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$= \dfrac{4}{5}\times(-\dfrac{\sqrt{15}}{4}) + \dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{3-4\sqrt{15}}{20}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$= \dfrac{3}{5}\times(-\dfrac{\sqrt{15}}{4}) - \dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{-4-3\sqrt{15}}{20}$

練習

設 α 是第四象限角、β 是第三象限角，若已知 $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$, $\sin\beta = -\dfrac{4}{5}$，試求出 $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ 的值。

解

$\because \alpha$ 是第四象限角且 $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$

$\therefore \sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\dfrac{12}{13}$

$\because \beta$ 是第三象限角且 $\sin\beta = -\dfrac{4}{5}$

$\therefore \cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\dfrac{3}{5}$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$= (-\dfrac{12}{13})\cdot(-\dfrac{3}{5}) - \dfrac{5}{13}\cdot(-\dfrac{4}{5}) = \dfrac{56}{65}$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$= \dfrac{5}{13}\cdot(-\dfrac{3}{5}) + (-\dfrac{12}{13})\cdot(-\dfrac{4}{5}) = \dfrac{33}{65}$

類題

若 α, β 均為鈍角，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\beta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，則 $\alpha+\beta$ 為何？

解 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{5}{25}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\frac{90}{100}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}\times(-\frac{3\sqrt{10}}{10})+(-\frac{2\sqrt{5}}{5})\times\frac{\sqrt{10}}{10}=-\frac{25\sqrt{2}}{50}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=(-\frac{2\sqrt{5}}{5})\times(-\frac{3\sqrt{10}}{10})-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{25\sqrt{2}}{50}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

又 $\frac{\pi}{2}<\alpha, \beta<\pi\Rightarrow\pi<\alpha+\beta<2\pi$，$\therefore\alpha+\beta=\frac{7\pi}{4}$（或 $315°$）

4 例題　正切的和差角公式　●●●○○　練習

配合課本 P.103 隨堂練習

試利用正切的和差角公式求出 $\tan 15°$ 以及 $\tan 75°$ 的值。

解 $\tan 15°=\tan(45°-30°)$

$=\frac{\tan 45°-\tan 30°}{1+\tan 45°\tan 30°}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\times\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=2-\sqrt{3}$

$\tan 75°=\tan(45°+30°)$

$=\frac{\tan 45°+\tan 30°}{1-\tan 45°\tan 30°}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\times\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=2+\sqrt{3}$

試利用正切的和差角公式求出 $\tan 105°$ 以及 $\tan 165°$ 的值。

解 $\tan 105°=\tan(60°+45°)$

$=\frac{\tan 60°+\tan 45°}{1-\tan 60°\tan 45°}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times 1}$

$=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=-2-\sqrt{3}$

$\tan 165°=\tan(120°+45°)$

$=\frac{\tan 120°+\tan 45°}{1-\tan 120°\tan 45°}=\frac{-\sqrt{3}+1}{1-(-\sqrt{3})\times 1}$

$=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{(1-\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=-2+\sqrt{3}$

5 例題　正切的和差角公式　●●●○○　練習

配合課本例題 5

已知 α, β 皆為銳角，且 $\tan\alpha=\frac{1}{7}$, $\tan\beta=\frac{3}{4}$，試求 $\alpha+\beta$ 的度數。

解 $\because\alpha, \beta$ 皆為銳角，$\therefore 0°<\alpha+\beta<180°$

$\because\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{3}{4}}=1$

$\therefore\alpha+\beta=45°$

已知 α, β 皆為銳角，且 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$, $\tan\beta=3$，試求 $\alpha-\beta$ 的度數。

解 $\because\alpha, \beta$ 皆為銳角，$\therefore -90°<\alpha-\beta<90°$

$\because\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}-3}{1+\frac{1}{2}\times 3}=-1$

$\therefore\alpha-\beta=-45°$

類題

(1) 已知 $\alpha+\beta=45°$，求 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$ 的值。

(2) 試求 $\tan 12°+\tan 33°+\tan 12°\tan 33°$ 的值。

解

(1) $\because \tan 45°=\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\therefore \tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta$

$\Rightarrow \tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta=1$

所求 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=1+(\tan\alpha+\tan\beta)+\tan\alpha\tan\beta=1+1=2$

(2) 由(1)知當 $\alpha+\beta=45°$ 時

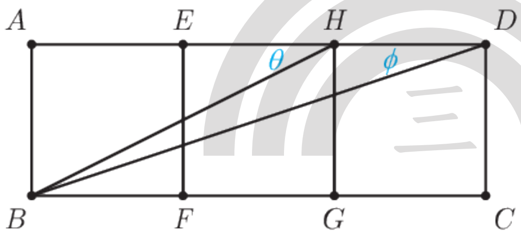
$(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=1+(\tan\alpha+\tan\beta)+\tan\alpha\tan\beta=2$

$\therefore \tan 12°+\tan 33°+\tan 12°\tan 33°=1$

配合課本 P.104 隨堂練習

6 例題　正切和差角公式的應用 ●●●●○

如圖，$ABFE$, $EFGH$, $HGCD$ 皆為正方形，設 $\angle AHB=\theta$, $\angle ADB=\phi$，求 $\theta+\phi$ 的度數。



解

在 $\triangle ABH$ 中，$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$

在 $\triangle ABD$ 中，$\tan\phi=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \tan(\theta+\phi)=\dfrac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1$

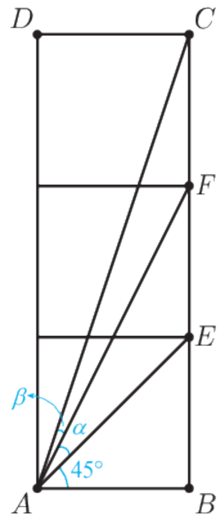
又 θ, ϕ 均為銳角 $\Rightarrow 0°<\theta+\phi<180°$

$\therefore \theta+\phi=45°$

練習

如圖，$ABCD$ 為一矩形，且 $\overline{AB}=\overline{BE}=\overline{EF}=\overline{FC}$，若 $\angle EAF=\alpha$, $\angle FAC=\beta$，試求：

(1) $\tan\alpha$。　(2) $\tan\beta$。



解

(1) 在 $\triangle FAB$ 中，$\tan\angle FAB=2$

$\therefore \tan\alpha=\tan(\angle FAB-45°)$

$=\dfrac{\tan\angle FAB-\tan 45°}{1+\tan\angle FAB\times\tan 45°}$

$=\dfrac{2-1}{1+2\times 1}=\dfrac{1}{3}$

(2) 在 $\triangle CAB$ 中，$\tan\angle CAB=3$

$\therefore \tan\beta=\tan(\angle CAB-\angle FAB)$

$=\dfrac{\tan\angle CAB-\tan\angle FAB}{1+\tan\angle CAB\times\tan\angle FAB}$

$=\dfrac{3-2}{1+3\times 2}=\dfrac{1}{7}$

配合課本例題 6

7 例題　正切和差角公式的應用　練習

●●●○○

例題

$\triangle ABC$ 中，已知 $\tan A=3,\ \tan B=\dfrac{1}{5}$，

(1) 試求 $\tan C$ 的值。

(2) 試利用計算機求 $\angle C$ 的度數。(四捨五入到整數位)

解 (1) $\tan C=\tan[180°-(A+B)]=-\tan(A+B)$

$$=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\frac{3+\frac{1}{5}}{1-3\times\frac{1}{5}}=-8$$

(2) $\tan(A+B)=8 \Rightarrow \angle A+\angle B\approx 83°$

$\therefore \angle C=180°-(\angle A+\angle B)\approx 180°-83°=97°$

練習

$\triangle ABC$ 中，已知 $\tan A=-3,\ \tan B=\dfrac{1}{3}$，

(1) 試求 $\tan C$ 的值。

(2) 試利用計算機求 $\angle C$ 的度數。(四捨五入到整數位)

解 (1) $\tan C=\tan[180°-(A+B)]=-\tan(A+B)$

$$=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\frac{-3+\frac{1}{3}}{1-(-3)\times\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{4}{3}$$

(2) $\because \tan C=\dfrac{4}{3}$，$\therefore \angle C\approx 53°$

配合課本例題 7

8 例題　平面上兩直線的交角　練習

●●●○○

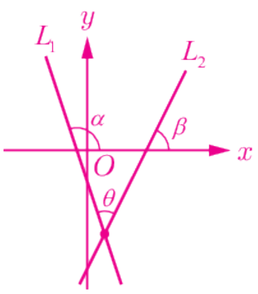
例題

坐標平面上，已知兩直線 $L_1: 3x+y+1=0$, $L_2: 2x-y-3=0$，試求此二直線的交角。

解 設 L_1, L_2 與 x 軸正向的夾角分別為 α, β

則 $\tan\alpha=-3,\ \tan\beta=2$

由圖形可知，兩直線的銳夾角 $\theta=\alpha-\beta$



$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{-3-2}{1+(-3)\times 2}=1$$

$\Rightarrow \theta=45°$

故兩直線的夾角為 $45°$ 和 $180°-45°=135°$

練習

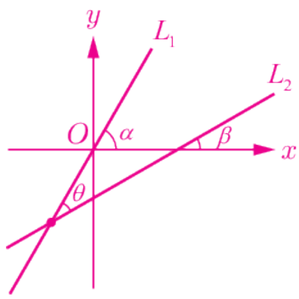
坐標平面上，已知兩直線 $L_1: \sqrt{3}x-y=0$, $L_2: \sqrt{3}x-3y-1=0$，試求此二直線的交角。

解 設 L_1, L_2 與 x 軸正向的夾角分別為 α, β

則 $\tan\alpha=\sqrt{3}$

$\tan\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

由圖形可知，兩直線的銳夾角 $\theta=\alpha-\beta$



$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow \theta=30°$

故兩直線的夾角為 $30°$ 和 $180°-30°=150°$

主題 2 倍角、半角公式

配合課本 P.107～P.111

1. 二倍角公式

(1) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$。

(2) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$。

(3) $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$, $\tan^2\theta \neq 1$。

2. 半角公式

設 θ 為廣義角，則

(1) $\sin\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$。

(2) $\cos\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$。

(3) $\tan\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$, $\cos\theta \neq -1$。

其中，$\sin\dfrac{\theta}{2}$, $\cos\dfrac{\theta}{2}$ 及 $\tan\dfrac{\theta}{2}$ 的正負，必須依據 $\dfrac{\theta}{2}$ 所在的象限來判斷。

9 例題　二倍角公式　練習

例題

試求下列各式的值：

(1) $2\sin 112.5^\circ\cos 112.5^\circ$。

(2) $\cos^2 22.5^\circ - \sin^2 22.5^\circ$。

(3) $\dfrac{2\tan 22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}$。

解 (1) 所求 $= \sin(2\times 112.5^\circ) = \sin 225^\circ = -\sin 45^\circ$

$= -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 所求 $= \cos(2\times 22.5^\circ) = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(3) 所求 $= \tan(2\times 22.5^\circ) = \tan 45^\circ = 1$

練習

試求下列各式的值：

(1) $1 - 2\sin^2 67.5^\circ$。

(2) $2\cos^2 15^\circ - 1$。

(3) $\dfrac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$。

解 (1) 所求 $= \cos(2\times 67.5^\circ) = \cos 135^\circ = -\cos 45^\circ$

$= -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 所求 $= \cos(2\times 15^\circ) = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) 所求 $= \tan(2\times 15^\circ) = \tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

配合課本例題 8

10 例題 二倍角公式 ●●●○○ 練習

已知 θ 為第二象限角且 $\sin\theta=\frac{1}{3}$，試求：

(1) $\sin 2\theta$。 (2) $\cos 2\theta$。 (3) $\tan 2\theta$。

解 $\because \sin\theta=\frac{1}{3}$，且 θ 為第二象限角

$\therefore \cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\theta=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta=2\times\frac{1}{3}\times(-\frac{2\sqrt{2}}{3})$

$=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

(2) $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times(\frac{1}{3})^2=\frac{7}{9}$

(3) $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\times(-\frac{1}{2\sqrt{2}})}{1-(-\frac{1}{2\sqrt{2}})^2}=-\frac{4\sqrt{2}}{7}$

已知 $90°<\theta<180°$ 且 $\sin\theta=\frac{2}{3}$，試求：

(1) $\cos 2\theta$。 (2) $\sin 2\theta$。 (3) $\tan 2\theta$。

解 $\because 90°<\theta<180°$

$\therefore \cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

(1) $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times(\frac{2}{3})^2=\frac{1}{9}$

(2) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{2}{3}\times(-\frac{\sqrt{5}}{3})$

$=-\frac{4\sqrt{5}}{9}$

(3) $\tan 2\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\dfrac{-\frac{4\sqrt{5}}{9}}{\frac{1}{9}}=-4\sqrt{5}$

配合課本例題 9

11 例題 二倍角公式 ●●●○○ 練習

設 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$，試求 $\sin 2\theta$ 之值。

解 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow \sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow 1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{5}$

$\Rightarrow \sin 2\theta=\frac{4}{5}$

設 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$，試求 $\sin 2\theta$ 之值。

解 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow 1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \sin 2\theta=-\frac{2}{3}$

配合課本例題 10

12 例題　半角公式 ●●●○○

試利用半角公式，求 $\sin 22.5°$, $\cos 22.5°$ 與 $\tan 22.5°$ 的值。

解

$$\sin 22.5° = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 22.5° = \sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan 22.5° = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{1+\cos 45°}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2}-1$$

練習

試利用半角公式，求 $\sin\frac{5\pi}{12}$, $\cos\frac{5\pi}{12}$ 與 $\tan\frac{5\pi}{12}$ 的值。

解

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{5\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1-(-\frac{\sqrt{3}}{2})}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{5\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1+(-\frac{\sqrt{3}}{2})}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan\frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{5\pi}{6}}{1+\cos\frac{5\pi}{6}}} = \sqrt{\frac{1-(-\frac{\sqrt{3}}{2})}{1+(-\frac{\sqrt{3}}{2})}}$$

$$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = 2+\sqrt{3}$$

配合課本例題 11

13 例題　半角公式 ●●●○○

已知 $180° < \theta < 270°$ 且 $\cos\theta = -\frac{3}{5}$，試求 $\sin\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$ 與 $\tan\frac{\theta}{2}$ 的值。

解

$$\because 180° < \theta < 270° \Rightarrow 90° < \frac{\theta}{2} < 135°$$

$$\therefore \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-(-\frac{3}{5})}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = -\sqrt{\frac{1+(-\frac{3}{5})}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = -2$$

練習

已知 $540° < \theta < 630°$ 且 $\cos\theta = -\frac{4}{5}$，試求 $\sin\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$ 與 $\tan\frac{\theta}{2}$ 的值。

解

$$\because 540° < \theta < 630° \Rightarrow 270° < \frac{\theta}{2} < 315°$$

$$\therefore \sin\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = -\sqrt{\frac{1-(-\frac{4}{5})}{2}}$$

$$= -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+(-\frac{4}{5})}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = -3$$

資優園地

1. 三倍角公式

(1) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$。

註： 記法「三上富士山」。

(2) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$。

註： 記法（台語）「塊 3＝4 塊 3－3 塊」（1.3 元＝4.3 元－3 元）。

2. 常用解題公式

(1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$。

(2) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$。

(3) $\sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$。

(4) $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$。

(5) $\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta) = \dfrac{1}{4}\sin 3\theta$。

(6) $\cos\theta\cos(60^\circ-\theta)\cos(60^\circ+\theta) = \dfrac{1}{4}\cos 3\theta$。

14 例題　二倍角公式 ●●●●●　練習

例題

試求 $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$ 的值。

解題關鍵

$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta \Rightarrow \sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$。

解 令 $k = \cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$

則 $k\sin 20^\circ = \sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$

$= \dfrac{1}{2}\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$

$= \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}\sin 80^\circ)\cos 80^\circ$

$= \dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{2}\sin 160^\circ)$

$= \dfrac{1}{8}\sin 160^\circ = \dfrac{1}{8}\sin 20^\circ$

$\Rightarrow k\sin 20^\circ = \dfrac{1}{8}\sin 20^\circ$，$\therefore k = \dfrac{1}{8}$

練習

試求 $\cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{8\pi}{15}$ 的值。

解 令 $k = \cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{8\pi}{15}$

則 $k\sin\dfrac{\pi}{15} = \sin\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{8\pi}{15}$

$= \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{8\pi}{15}$

$= \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{8\pi}{15}$

$= \dfrac{1}{8}\sin\dfrac{8\pi}{15}\cos\dfrac{8\pi}{15}$

$= \dfrac{1}{16}\sin\dfrac{16\pi}{15} = -\dfrac{1}{16}\sin\dfrac{\pi}{15}$

$\Rightarrow k\sin\dfrac{\pi}{15} = -\dfrac{1}{16}\sin\dfrac{\pi}{15}$，$\therefore k = -\dfrac{1}{16}$

15 例題 三倍角公式 練習

設 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，若 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$，則 $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$ 之值為何？

解 $\because \frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 且 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$

$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-(-\frac{1}{3})^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

因此，$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$=4\times(-\frac{1}{3})^3-3\times(-\frac{1}{3})=\frac{23}{27}$

$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

$=3\times(\frac{2\sqrt{2}}{3})-4\times(\frac{2\sqrt{2}}{3})^3=\frac{-10\sqrt{2}}{27}$

若 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$，則 $\cos 3\theta-\sin 3\theta$ 之值為何？

解 $\because \sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$，$\therefore(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{9}$

$\Rightarrow 1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}\Rightarrow \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$

因此，$\cos 3\theta-\sin 3\theta$

$=(4\cos^3\theta-3\cos\theta)-(3\sin\theta-4\sin^3\theta)$

$=4(\sin^3\theta+\cos^3\theta)-3(\sin\theta+\cos\theta)$

$=4(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)-3\times\frac{1}{3}$

$=4\times(\frac{1}{3})[1-(-\frac{4}{9})]-1=\frac{25}{27}$

類題

試化簡 $\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}$。

解 所求 $=\frac{3\sin\theta-4\sin^3\theta}{\sin\theta}-\frac{4\cos^3\theta-3\cos\theta}{\cos\theta}=3-4\sin^2\theta-4\cos^2\theta+3=6-4(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=6-4=2$

16 例題 三倍角公式 練習

設多項式 $f(x)=4x^3-3x+3$，試求 $f(x)$ 除以 $(x-\cos 70°)$ 的餘式。

解 由餘式定理可得

$f(x)$ 除以 $(x-\cos 70°)$ 的餘式

$=f(\cos 70°)$

$=4\cos^3 70°-3\cos 70°+3$

$=(4\cos^3 70°-3\cos 70°)+3$

$=\cos 210°+3$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}+3$

$=3-\frac{\sqrt{3}}{2}$

設多項式 $f(x)=8x^3+4x^2-6x-2$，試求 $f(x)$ 除以 $(x-\sin 105°)$ 的餘式。

解 由餘式定理可得

$f(x)$ 除以 $(x-\sin 105°)$ 的餘式

$=f(\sin 105°)$

$=8\sin^3 105°+4\sin^2 105°-6\sin 105°-2$

$=-2(3\sin 105°-4\sin^3 105°)-2(1-2\sin^2 105°)$

$=-2\sin 315°-2\cos 210°$

$=-2\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})-2\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

17 例題　常用解題公式 ●●●○○　練習

已知 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{3}{4}$，試求 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$。

解 $\sin\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{2\times\frac{3}{4}}{1+(\frac{3}{4})^2}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{25}{16}}=\dfrac{24}{25}$

$\cos\theta=\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{1-(\frac{3}{4})^2}{1+(\frac{3}{4})^2}=\dfrac{7}{25}$

練習

已知 $\tan\frac{\theta}{2}=3$，試求 $\sin 2\theta$。

解 $\sin\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{2\times 3}{1+3^2}=\dfrac{3}{5}$

$\cos\theta=\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{1-3^2}{1+3^2}=-\dfrac{4}{5}$

因此，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{3}{5}\times(-\frac{4}{5})=-\frac{24}{25}$

18 例題　常用解題公式 ●●●○○　練習

試求 $\sin^2 37.5^\circ-\sin^2 7.5^\circ$。

解 所求 $=\sin(37.5^\circ+7.5^\circ)\sin(37.5^\circ-7.5^\circ)$

$=\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

練習

已知 $\alpha+\beta=30^\circ$，試求 $\sin^2\alpha-\sin^2\beta$ 的最大值與最小值。

解 $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$=\sin 30^\circ\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$

$\because -1\le\sin(\alpha-\beta)\le 1$

$\therefore$ 當 $\sin(\alpha-\beta)=1$ 時

$\sin^2\alpha-\sin^2\beta$ 有最大值 $=\frac{1}{2}$

當 $\sin(\alpha-\beta)=-1$ 時

$\sin^2\alpha-\sin^2\beta$ 有最小值 $=-\frac{1}{2}$

19 例題　常用解題公式 ●●●○○　練習

試求 $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$。

解 所求 $=\sin 20^\circ\sin(60^\circ-20^\circ)\sin(60^\circ+20^\circ)$

$=\frac{1}{4}\sin 60^\circ=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$

練習

試求 $\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ$。

解 所求 $=\sin 10^\circ\sin(60^\circ-10^\circ)\sin(60^\circ+10^\circ)$

$=\frac{1}{4}\sin 30^\circ=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

2–3 自我評量

基礎題

1. 試求下列各式的值：

(1) $\sin 42°\cos 18° + \cos 42°\sin 18°$。

(2) $\cos 179°\cos 61° - \sin 179°\sin 61°$。

(3) $\sin 100°\sin 160° - \cos 200°\cos 280°$。

(4) $\tan 20° + \tan 40° + \sqrt{3}\tan 20°\tan 40°$。

(5) $(1 + \tan 37.5°)(1 + \tan 7.5°)$。

解 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\sqrt{3}$ (5) 2

2. 若 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi,\ \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$，且 $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$，則 $\cos(\alpha + \beta)$ 之值為何？

解 $\frac{\sqrt{2}}{10}$

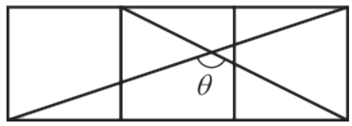
3. 若 α, β 均為銳角，且 $\sin\alpha = \frac{13}{14},\ \sin\beta = \frac{11}{14}$，則 $\alpha + \beta$ 為幾度？

解 120°

4. 若 $\tan\alpha = 1$，$\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$，則 $\tan\beta$ 之值為何？

解 $\frac{1}{2}$

5. 如圖，將三個大小相同的正方形排成一列，試求 θ。



解　$135°$

6. 坐標平面上，已知兩直線 $L_1: 2x+y+3=0,\ L_2: 3x-y+1=0$，試求 L_1 與 L_2 的交角。

解　$45°$ 與 $135°$

7. $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B=2\angle A$，且 $\sin A=\dfrac{1}{3}$，試問：

(1) $\cos B$ 之值為何？

(2) $\sin C$ 之值為何？

解　(1) $\dfrac{7}{9}$　(2) $\dfrac{23}{27}$

8. 設 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2},\ 90°<\theta<135°$，試問：

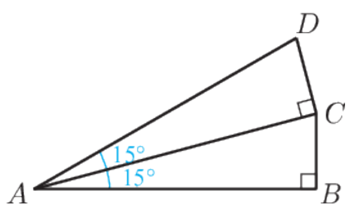
(1) $\sin 2\theta$ 之值？

(2) $\sin\theta-\cos\theta$ 之值？

(3) $\sin\theta$ 之值？

解　(1) $-\dfrac{3}{4}$　(2) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　(3) $\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$

9. 如圖，若 $\angle BAC=\angle CAD=15°,\ \overline{AD}=4$，則 $\overline{BC}$ 之值為何？



解　1

10. 若 $\dfrac{\cos\theta+3\sin\theta}{2\cos\theta-\sin\theta}=3$，則 $\tan 2\theta$ 之值為何？

解 $\dfrac{60}{11}$

11. 下列各選項中，哪些值大於 $\dfrac{1}{2}$？

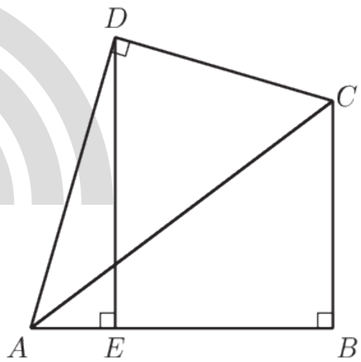
(A) $2\sin 40°\cos 40°$ (B) $2\cos^2 40°-1$ (C) $1-2\sin^2 20°$

(D) $\dfrac{2\tan 25°}{1-\tan^2 25°}$ (E) $3\sin 10°-4\sin^3 10°$

解 (A)(C)(D)

12. 如圖，$\angle CBA=\angle CDA=90°$, $\overline{AB}=\overline{AD}=4$, $\overline{CB}=\overline{CD}=3$，若 $\overline{DE}\perp\overline{AB}$，則 $\overline{DE}$ 之值為何？

解 $\dfrac{96}{25}$



13. 設 $\dfrac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$，試化簡 $\sqrt{1+\sin\theta}-\sqrt{1-\sin\theta}$。（化簡至三角函數不在根號或絕對值符號內）

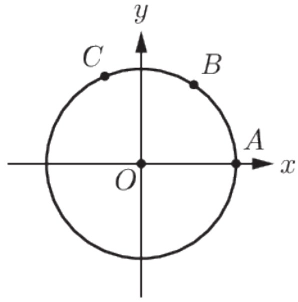
解 $-2\sin\dfrac{\theta}{2}$

14. 設 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$，若 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 為方程式 $25x^2-5x+a=0$ 的兩根，則下列各選項中，哪些是正確的？

(A) $a=-12$ (B) $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$ (C) $\sin 2\theta=\dfrac{24}{25}$ (D) $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (E) $\tan\dfrac{\theta}{2}=2$

解 (A)(B)(D)(E)

15. 如圖，單位圓的圓心在原點 O，已知 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$，若點 C 的坐標為 $(-\frac{5}{13},\frac{12}{13})$，則點 B 的坐標為何？



解　$(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}})$

進階題

16. 已知 $\tan A=-2$, $\tan B=3$，求 $\dfrac{\cos(A-B)}{\sin(A+B)}$ 的值。

解　-5

17. 設 $a=\sin 11^\circ+\cos 11^\circ$, $b=\sin 33^\circ+\cos 33^\circ$, $c=\sin 55^\circ+\cos 55^\circ$, $d=\sin 77^\circ+\cos 77^\circ$，試比較 a, b, c, d 四數的大小順序。

解　$c>b>d>a$

18. 若 $\begin{cases}\sin\alpha+\cos\beta=\sqrt{3}\\ \cos\alpha+\sin\beta=1\end{cases}$，試求(1) $\sin(\alpha+\beta)$ 的值。　(2) $\tan(\dfrac{\alpha+\beta}{2})$ 的值。

解　(1) 1　(2) 1

19. (1) 試求多項式 $f(x)=4x^3-3x+1$ 除以 $x-\cos 20^\circ$ 之餘式。

(2) 試求多項式 $g(x)=16x^3-4x^2-12x+2$ 除以 $x+\sin 15^\circ$ 之餘式。

解　(1) $\frac{3}{2}$　(2) $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

2-4 正餘弦的疊合

主題 1 正餘弦的疊合

配合課本 P.116～P.119

1. 正弦與餘弦函數的疊合

若 a, b 是不全為 0 的實數，則函數 $y=a\sin x+b\cos x$ 可表示成 $y=r\sin(x+\theta)$，其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$，θ 滿足 $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 且 $\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$；

函數 $y=a\sin x+b\cos x$ 也可以表示成 $y=r\cos(x-\phi)$，其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$，θ 滿足 $\cos\phi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 且 $\sin\phi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

因此，一個正弦波和一個同週期的餘弦波之和，仍是一個同週期的正弦波或餘弦波。

配合課本例題 1

例題 1　正餘弦的疊合

試將函數 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 表示成 $y=r\sin(x+\theta)$ 的形式，其中 $r>0$, $0<\theta<2\pi$，並描述如何利用 $y=\sin x$ 的圖形作鉛直伸縮與平移得到 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的圖形。

解

$$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$$
$$=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}\cos x\right]$$
$$=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$$
$$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

因此，將 $y=\sin x$ 的圖形沿鉛直方向拉伸為原來的 2 倍，再向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 單位，就可得 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的圖形

練習

試將函數 $y=\sin x-\cos x$ 表示成 $y=r\sin(x-\theta)$ 的形式，其中 $r>0$, $0<\theta<2\pi$，並描述如何利用 $y=\sin x$ 的圖形作鉛直伸縮與平移得到 $y=\sin x-\cos x$ 的圖形。

解

$$y=\sin x-\cos x$$
$$=\sqrt{1^2+(-1)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

因此，將 $y=\sin x$ 的圖形沿鉛直方向拉伸為原來的 $\sqrt{2}$ 倍，再向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位，就可得 $y=\sin x-\cos x$ 的圖形

配合課本 P.118 隨堂練習

2 例題 正餘弦的疊合 ●●●○○

試將函數 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 表示成 $y=r\cos(x-\theta)$ 的形式，其中 $r>0$, $0<\theta<2\pi$，並描述如何利用 $y=\cos x$ 的圖形作鉛直伸縮與平移得到 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的圖形。

解

$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}\cos x\right]$

$=2(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)$

$=2(\sin x\sin\frac{\pi}{6}+\cos x\cos\frac{\pi}{6})$

$=2\cos(x-\frac{\pi}{6})$

因此，將 $y=\cos x$ 的圖形沿鉛直方向拉伸為原來的 2 倍，再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 單位，就可得 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的圖形

練習

試將函數 $y=\sin x-\cos x$ 表示成 $y=r\cos(x+\theta)$ 的形式，其中 $r>0$, $0<\theta<2\pi$，並描述如何利用 $y=\cos x$ 的圖形作鉛直伸縮與平移得到 $y=\sin x-\cos x$ 的圖形。

解

$y=\sin x-\cos x$

$=\sqrt{1^2+(-1)^2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x)$

$=\sqrt{2}(-\sin x\sin\frac{5\pi}{4}+\cos x\cos\frac{5\pi}{4})$

$=\sqrt{2}\cos(x+\frac{5\pi}{4})$

因此，將 $y=\cos x$ 的圖形沿鉛直方向拉伸為原來的 $\sqrt{2}$ 倍，再向左平移 $\frac{5\pi}{4}$ 單位，就可得 $y=\sin x-\cos x$ 的圖形

主題 2 正餘弦疊合的應用

配合課本 P.119～P.126

1. 函數 $y=a\sin x+b\cos x$ 的最大值與最小值問題

函數 $y=a\sin x+b\cos x$ 都可化為 $y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$ 的形式，並且滿足以下性質：

(1) 函數 $y=a\sin x+b\cos x$ 圖形的週期為 2π，振幅為 $\sqrt{a^2+b^2}$。

(2) $\because -\sqrt{a^2+b^2}\le\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)\le\sqrt{a^2+b^2}$，

$\therefore$函數 $y=a\sin x+b\cos x$ 的最大值為 $\sqrt{a^2+b^2}$，最小值為 $-\sqrt{a^2+b^2}$。

配合課本例題 2

3 例題　函數 $y=a\sin x+b\cos x$ 的最大值與最小值　●●●○○

試求下列各函數的最大值、最小值與週期：

(1) $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$。

(2) $y=3\sin 2x+\cos 2x$。

解 (1) $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$

$=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x)$

$=2(\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6})$

$=2\sin(x-\frac{\pi}{6})$

$\because -1\le\sin(x-\frac{\pi}{6})\le 1$

$\therefore y$ 的最大值為 $2\times 1=2$

最小值為 $2\times(-1)=-2$

且知函數 $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ 圖形的週期為 2π

(2) $y=3\sin 2x+\cos 2x$

$=\sqrt{3^2+1^2}(\frac{3}{\sqrt{10}}\sin 2x+\frac{1}{\sqrt{10}}\cos 2x)$

$=\sqrt{10}(\frac{3}{\sqrt{10}}\sin 2x+\frac{1}{\sqrt{10}}\cos 2x)$

令 $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$

則 $y=\sqrt{10}(\sin 2x\cos\theta+\cos 2x\sin\theta)$

$=\sqrt{10}\sin(2x+\theta)$

$\because -1\le\sin(2x+\theta)\le 1$

$\therefore y$ 的最大值為 $\sqrt{10}\times 1=\sqrt{10}$

最小值為 $\sqrt{10}\times(-1)=-\sqrt{10}$

且知函數 $y=3\sin 2x+\cos 2x$ 圖形的週期為 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

練習

試求下列各函數的最大值、最小值與週期：

(1) $y=\sin x+\cos x$。

(2) $y=3\sin\frac{x}{2}-4\cos\frac{x}{2}$。

解 (1) $y=\sin x+\cos x$

$=\sqrt{1^2+1^2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x)$

$=\sqrt{2}(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4})$

$=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$

$\because -1\le\sin(x+\frac{\pi}{4})\le 1$

$\therefore y$ 的最大值為 $\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}$

最小值為 $\sqrt{2}\times(-1)=-\sqrt{2}$

且知函數 $y=\sin x+\cos x$ 圖形的週期為 2π

(2) $y=3\sin\frac{x}{2}-4\cos\frac{x}{2}$

$=\sqrt{3^2+(-4)^2}(\frac{3}{5}\sin\frac{x}{2}-\frac{4}{5}\cos\frac{x}{2})$

$=5(\frac{3}{5}\sin\frac{x}{2}-\frac{4}{5}\cos\frac{x}{2})$

令 $\cos\theta=\frac{3}{5}$，$\sin\theta=\frac{4}{5}$

則 $y=5(\sin\frac{x}{2}\cos\theta-\cos\frac{x}{2}\sin\theta)$

$=5\sin(\frac{x}{2}-\theta)$

$\because -1\le\sin(\frac{x}{2}-\theta)\le 1$

$\therefore y$ 的最大值為 $5\times 1=5$

最小值為 $5\times(-1)=-5$

且知函數 $y=3\sin\frac{x}{2}-4\cos\frac{x}{2}$ 圖形的週期為 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

配合課本例題 3

4 例題 函數 $y=a\sin x+b\cos x$ 的最大值與最小值 ●●●○○

試求函數 $y=2\sin x-2\sqrt{3}\cos x+1$ 在下列各範圍內的最大值與最小值，並求發生最大值與最小值時所對應的 x 值。

(1) $0\le x<2\pi$。　　(2) $0\le x\le \pi$。

解 $y=2\sin x-2\sqrt{3}\cos x+1$

$=\sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2}(\frac{2}{4}\sin x-\frac{2\sqrt{3}}{4}\cos x)+1$

$=4(\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3})+1$

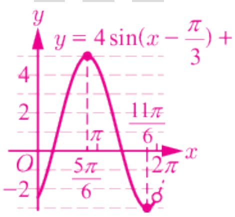
$=4\sin(x-\frac{\pi}{3})+1$

(1) $\because 0\le x<2\pi$，$\therefore -\frac{\pi}{3}\le x-\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}$

由正弦函數的圖形得知 $-1\le\sin(x-\frac{\pi}{3})\le 1$

$\therefore$ ① 當 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{5\pi}{6}$ 時，y 有最大值為 $4\times1+1=5$

② 當 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$，即 $x=\frac{11\pi}{6}$ 時，y 有最小值為 $4\times(-1)+1=-3$

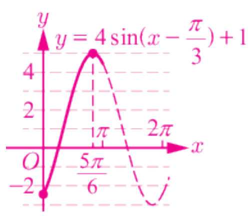


(2) $\because 0\le x\le\pi$，$\therefore -\frac{\pi}{3}\le x-\frac{\pi}{3}\le\frac{2\pi}{3}$

由正弦函數的圖形得知 $-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\sin(x-\frac{\pi}{3})\le 1$

$\therefore$ ① 當 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{5\pi}{6}$ 時，y 有最大值為 $4\times1+1=5$

② 當 $x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$，即 $x=0$ 時，y 有最小值為 $4\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})+1=-2\sqrt{3}+1$



練習

試求函數 $y=\sin 2x+\cos 2x-2$ 在下列各範圍內的最大值與最小值，並求發生最大值與最小值時所對應的 x 值。

(1) $0\le x<\pi$。　　(2) $0\le x\le\frac{\pi}{2}$。

解 $y=\sin 2x+\cos 2x-2$

$=\sqrt{1^2+1^2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x)-2$

$=\sqrt{2}(\sin 2x\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{4})-2$

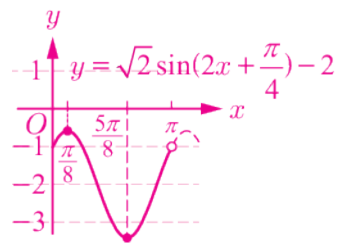
$=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})-2$

(1) $\because 0\le x<\pi$，$\therefore \frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}<\frac{9\pi}{4}$

由正弦函數的圖形得知 $-1\le\sin(2x+\frac{\pi}{4})\le 1$

$\therefore$ ① 當 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{8}$ 時，y 有最大值為 $\sqrt{2}\times1-2=\sqrt{2}-2$

② 當 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$，即 $x=\frac{5\pi}{8}$ 時，y 有最小值為 $\sqrt{2}\times(-1)-2=-\sqrt{2}-2$

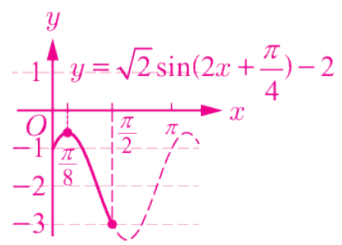


(2) $\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}$，$\therefore \frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{4}$

由正弦函數的圖形得知 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin(2x+\frac{\pi}{4})\le 1$

$\therefore$ ① 當 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{8}$ 時，y 有最大值為 $\sqrt{2}\times1-2=\sqrt{2}-2$

② 當 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 時，y 有最小值為 $\sqrt{2}\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})-2=-3$



配合課本例題 4

5 例題　函數 $y=a\sin x+b\cos x$ 的最大值與最小值　練習

試在 $0\le x<2\pi$ 的範圍內，求函數 $y=\sin(\frac{\pi}{6}+x)-\cos x$ 的最大值與最小值，以及發生最大值與最小值時所對應的 x 值。

解

$y=\sin(\frac{\pi}{6}+x)-\cos x$

$=\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\sin x-\cos x$

$=\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\cos x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$

$=\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}$

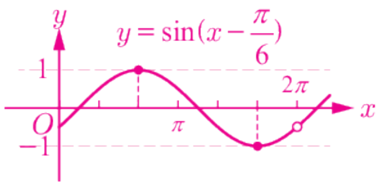
$=\sin(x-\frac{\pi}{6})$

$\because 0\le x<2\pi$，$\therefore -\frac{\pi}{6}\le x-\frac{\pi}{6}<\frac{11\pi}{6}$

由正弦函數的圖形得知 $-1\le\sin(x-\frac{\pi}{6})\le 1$

$\therefore$ ① 當 $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{2\pi}{3}$ 時，y 有最大值為 1

② 當 $x-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$，即 $x=\frac{5\pi}{3}$ 時，y 有最小值為 -1



練習

試在 $0\le x\le\pi$ 的範圍內，求函數 $y=2\sin(\frac{\pi}{6}-x)-2\cos x$ 的最大值與最小值，以及發生最大值與最小值時所對應的 x 值。

解

$y=2\sin(\frac{\pi}{6}-x)-2\cos x$

$=2(\sin\frac{\pi}{6}\cos x-\cos\frac{\pi}{6}\sin x)-2\cos x$

$=\cos x-\sqrt{3}\sin x-2\cos x$

$=-\sqrt{3}\sin x-\cos x$

$=-(\sqrt{3}\sin x+\cos x)$

$=-2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)$

$=-2(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6})$

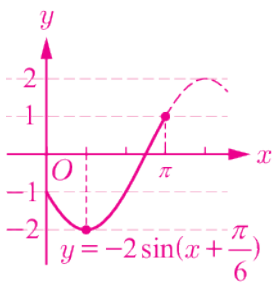
$=-2\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$\because 0\le x\le\pi$，$\therefore \frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{6}\le\frac{7\pi}{6}$

由正弦函數的圖形得知 $-\frac{1}{2}\le\sin(x+\frac{\pi}{6})\le 1$

$\therefore$ ① 當 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$，即 $x=\pi$ 時，y 有最大值為 $-2\times(-\frac{1}{2})=1$

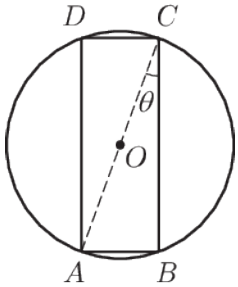
② 當 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$ 時，y 有最小值為 $-2\times 1=-2$



配合課本例題 5

6 例題　正餘弦疊合的應用 ●●●●○

設矩形 $ABCD$ 內接於半徑為 5 的圓，令 $\angle ACB=\theta\ (0<\theta<\frac{\pi}{2})$，



(1) 試以 θ 表示矩形 $ABCD$ 的周長。

(2) 試求矩形 $ABCD$ 周長的最大值。

解 由圖可知，$\overline{AB}=10\sin\theta,\ \overline{BC}=10\cos\theta$

(1) 矩形 $ABCD$ 的周長 $=2(\overline{AB}+\overline{BC})$

$=2(10\sin\theta+10\cos\theta)=20\sin\theta+20\cos\theta$

(2) 由(1)得矩形 $ABCD$ 的周長

$=20\sin\theta+20\cos\theta$

$=20\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta)$

$=20\sqrt{2}(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4})$

$=20\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$

$\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \frac{\pi}{4}<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$

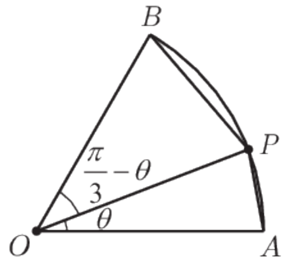
因此，當 $\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 時

矩形 $ABCD$ 的周長有最大值

$=20\sqrt{2}\times 1=20\sqrt{2}$

練習

如圖，已知扇形 OAB 的圓心角為 $\frac{\pi}{3}$，半徑為 2，P 為 $\overset{\frown}{AB}$ 弧上的一個動點，$\angle POA=\theta$，



(1) 試以 θ 表示四邊形 $OAPB$ 的面積。

(2) 試求四邊形 $OAPB$ 的最大面積。

解 (1) 由圖可知

四邊形 $OAPB$ 面積

$=\triangle POA$ 面積 $+\triangle POB$ 面積

$=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)$

$=2\sin\theta+2\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)$

$=2\sin\theta+2(\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta-\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta)$

$=2\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta$

$=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

(2) 由(1)得四邊形 $OAPB$ 面積

$=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

$=2(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta)$

$=2(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3})$

$=2\sin(\theta+\frac{\pi}{3})$

$\because 0<\theta<\frac{\pi}{3}$，$\therefore \frac{\pi}{3}<\theta+\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$

因此，當 $\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 時

四邊形 $OAPB$ 有最大面積 $=2\times 1=2$

7 例題 正餘弦疊合的應用 ●●●●○

試求 $\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$ 的值。

解

所求 $=\dfrac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}$

$=\dfrac{2(\frac{1}{2}\cos 10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ)}{\frac{1}{2}\times 2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}$

$=\dfrac{2(\sin 30^\circ\cos 10^\circ-\cos 30^\circ\sin 10^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}$

$=\dfrac{2\sin(30^\circ-10^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}$

$=\dfrac{2\sin 20^\circ}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}=4$

配合課本例題 6

練習

試求 $\dfrac{1}{\cos 340^\circ}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 340^\circ}$ 的值。

解

所求 $=\dfrac{\sin 340^\circ+\sqrt{3}\cos 340^\circ}{\sin 340^\circ\cos 340^\circ}$

$=\dfrac{2(\frac{1}{2}\sin 340^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 340^\circ)}{\frac{1}{2}\times 2\sin 340^\circ\cos 340^\circ}$

$=\dfrac{2(\sin 340^\circ\cos 60^\circ+\cos 340^\circ\sin 60^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 680^\circ}$

$=\dfrac{2\sin(340^\circ+60^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 320^\circ}$

$=\dfrac{2\sin 400^\circ}{-\frac{1}{2}\sin 40^\circ}$

$=\dfrac{2\sin 40^\circ}{-\frac{1}{2}\sin 40^\circ}=-4$

8 例題 正餘弦疊合的應用 ●●●○○

試在 $0\le x<2\pi$ 的範圍內，求方程式 $\sqrt{3}\cos x-\sin x=\sqrt{2}$ 的解。

解

$\because \sqrt{3}\cos x-\sin x=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x)$

$=2(\sin\frac{\pi}{3}\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\sin x)=2\sin(\frac{\pi}{3}-x)$

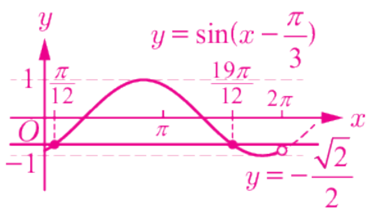
$\therefore$原方程式可改寫為 $2\sin(\frac{\pi}{3}-x)=\sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{3}-x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\because 0\le x<2\pi$，$\therefore -\frac{\pi}{3}\le x-\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}$

因此，$x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{5\pi}{4}$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{12}$ 或 $\frac{19\pi}{12}$



配合課本例題 7

練習

試在 $0\le x<2\pi$ 的範圍內，求方程式 $\sin x-\cos x=\sqrt{2}$ 的解。

解

$\because \sin x-\cos x=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x)$

$=\sqrt{2}(\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$

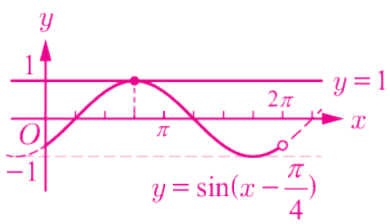
$\therefore$原方程式可改寫為 $\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4})=1$

$\because 0\le x<2\pi$，$\therefore -\frac{\pi}{4}\le x-\frac{\pi}{4}<\frac{7\pi}{4}$

因此，$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}$



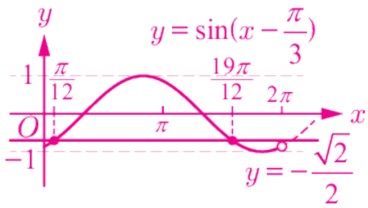
類題

試在 $0 \le x < 2\pi$ 的範圍內，求不等式 $\sqrt{3}\cos x - \sin x \le \sqrt{2}$ 的解。

解

$\because \sqrt{3}\cos x - \sin x = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x)$

$= 2(\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x) = 2\sin(\frac{\pi}{3} - x)$



$\therefore$ 原不等式可改寫為 $2\sin(\frac{\pi}{3} - x) \le \sqrt{2} \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{3} - x) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow -\sin(x - \frac{\pi}{3}) \le \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{3}) \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\because 0 \le x < 2\pi$，$\therefore -\frac{\pi}{3} \le x - \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{3}$

由圖形可知 $\frac{\pi}{12} \le x \le \frac{19\pi}{12}$

資優園地

9 例題　正餘弦疊合的應用　練習

設 $0 \le x < \pi$，試求 $y = 3\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x$ 的最大值與最小值。

解

$y = 3\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x$

$= 3 \times \frac{1 - \cos 2x}{2} - \sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$= -\sin 2x - \cos 2x + 2$

$= \sqrt{2}\sin(2x - \frac{3\pi}{4}) + 2$

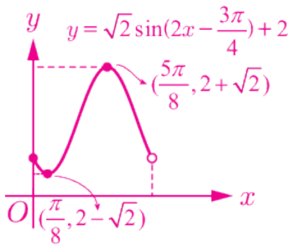
$\because 0 \le x < \pi$，$\therefore -\frac{3\pi}{4} \le 2x - \frac{3\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}$

因此，當 $2x - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 時

y 有最大值 $= \sqrt{2} \times 1 + 2 = 2 + \sqrt{2}$

當 $2x - \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$ 時

y 有最小值 $= \sqrt{2} \times (-1) + 2 = 2 - \sqrt{2}$



設 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$，試求 $y = \sin^2 x + \sin x\cos x + 2\cos^2 x$ 的最大值與最小值。

解

$y = \sin^2 x + \sin x\cos x + 2\cos^2 x$

$= \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x + 2 \times \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$= \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \frac{3}{2}$

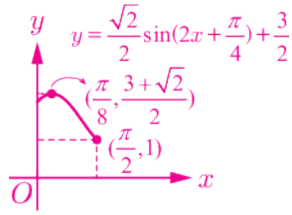
$\because 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$，$\therefore \frac{\pi}{4} \le 2x + \frac{\pi}{4} \le \frac{5\pi}{4}$

因此，當 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 時

y 有最大值 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 + \frac{3}{2} = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$

當 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ 時

y 有最小值 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{3}{2} = 1$



10 例題　正餘弦疊合的應用 ●●●●○

已知函數 $f(x)=\sin x+\cos x+2\sin x\cos x$，$x$ 為實數，

(1) 令 $\sin x+\cos x=t$，試求 t 的範圍。

(2) 承第(1)題，試以 t 來表示 $f(x)$。

(3) 由第(1)、(2)題，試求出 $f(x)$ 的最大值與最小值。

解

(1) $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x)$

$=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$

$\therefore$當 $\sin(x+\frac{\pi}{4})=1$ 時

t 有最大值 $=\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}$

當 $\sin(x+\frac{\pi}{4})=-1$ 時

t 有最小值 $=\sqrt{2}\times(-1)=-\sqrt{2}$

(2) $\because \sin x+\cos x=t$

$t^2=(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$

$\Rightarrow 2\sin x\cos x=t^2-1$

因此，$f(x)=\sin x+\cos x+2\sin x\cos x$

$=t+(t^2-1)=t^2+t-1$

(3) 由(2)可得 $f(x)=t^2+t-1=(t+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}$

又 $-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$

$\therefore$當 $t=-\frac{1}{2}$ 時，$f(x)$ 有最小值 $=-\frac{5}{4}$

當 $t=\sqrt{2}$ 時，$f(x)$ 有最大值

$=(\sqrt{2})^2+\sqrt{2}-1=1+\sqrt{2}$

練習

設 $f(x)=(1+\sin x)(1+\cos x)$，其中 x 為實數，試求 $f(x)$ 的最大值與最小值。

解

$f(x)=(1+\sin x)(1+\cos x)$

$=1+\sin x+\cos x+\sin x\cos x$

令 $\sin x+\cos x=t$，則 $-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$

且 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

$f(x)=1+\sin x+\cos x+\sin x\cos x$

$=1+t+\frac{t^2-1}{2}=\frac{(t+1)^2}{2}$

$\therefore$當 $t=-1$ 時，$f(x)$ 有最小值 $=0$

當 $t=\sqrt{2}$ 時，$f(x)$ 有最大值

$=\frac{(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}+1}{2}=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

11 例題 正餘弦疊合的應用 ●●●●○ 練習

設 x 為實數，$y=\dfrac{3+\sin x}{2-\cos x}$，試求 y 的範圍。

解

$y=\dfrac{3+\sin x}{2-\cos x}$

$\Rightarrow 3+\sin x=2y-y\cos x$

$\Rightarrow 2y-3=\sin x+y\cos x$

$=\sqrt{1+y^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}\sin x+\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}\cos x\right)$

$=\sqrt{1+y^2}\sin(x+\theta)$

(其中 $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$, $\sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$)

$\because x$ 為實數

$\therefore |2y-3|=|\sin x+y\cos x|\le\sqrt{1+y^2}$

$\Rightarrow (2y-3)^2\le 1+y^2\Rightarrow 3y^2-12y+8\le 0$

$\Rightarrow \left(y-\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}\right)\left(y-\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)\le 0$

$\therefore \dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}\le y\le\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}$

設 x 為實數，$y=\dfrac{2\cos x}{3+\sin x}$，試求 y 的範圍。

解

$y=\dfrac{2\cos x}{3+\sin x}$

$\Rightarrow 3y+y\sin x=2\cos x$

$\Rightarrow 3y=2\cos x-y\sin x$

$=\sqrt{4+y^2}\left(\dfrac{2}{\sqrt{4+y^2}}\cos x-\dfrac{y}{\sqrt{4+y^2}}\sin x\right)$

$=\sqrt{4+y^2}\sin(\theta-x)$

(其中 $\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{4+y^2}}$, $\cos\theta=\dfrac{y}{\sqrt{4+y^2}}$)

$\because x$ 為實數

$\therefore |3y|=|2\cos x-y\sin x|\le\sqrt{4+y^2}$

$\Rightarrow 9y^2\le 4+y^2\Rightarrow 8y^2\le 4\Rightarrow y^2\le\dfrac{1}{2}$

$\therefore -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le y\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2–4 自我評量

基礎題

1. 試求下列各函數的最大值、最小值與其週期：

(1) $y=2\sin x-2\cos x$。 (2) $y=2\sqrt{3}\cos 2x-2\sin 2x$。 (3) $y=\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}$。

解 (1) $2\sqrt{2}$；$-2\sqrt{2}$；2π (2) 4；-4；π (3) $\sqrt{5}$；$-\sqrt{5}$；4π

2. 若 $\sin x-\sqrt{3}\cos x=a\cos(x-\theta)$，其中 $a>0,\ 0°\le\theta\le 360°$，則 a 與 θ 之值為何？

解 2；150°

3. 設 $180°<A<270°$ 且 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin 2020°$，若 $A=m°$，則 m 之值為何？

解 190

4. 關於函數 $f(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x$，其中 x 為任意實數，請選出正確的選項。

(A) $f(x)$ 有最大值 $\sqrt{3}+1$

(B) $f(x)$ 是一個週期函數，其最小正週期為 2π

(C) $y=f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x=-\frac{\pi}{6}$

(D) $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸的交點中，離原點最近的為 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$

(E) $y=f(x)$ 的圖形對稱於原點

解 (B)(C)

5. 設 $y=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta+1,\ 30°\le\theta\le 150°$，則

(1) 當 θ 幾度時，y 有最大值，其值為何？

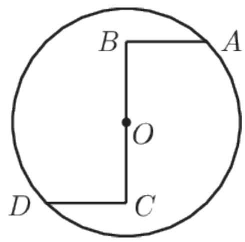
(2) 當 θ 幾度時，y 有最小值，其值為何？

解　(1) 120°；3　(2) 30°；1

6. 設 $0°\le x\le 90°$，則 $f(x)=3\sin x+4\cos x+9$ 之最大值與最小值的和為何？

解　26

7. 如圖，一半徑為 100 公尺的圓形水池上，建有一「＿┌」字型的木橋，且 $\overline{BO}=\overline{CO},\ \angle ABC=\angle BCD=90°$，則

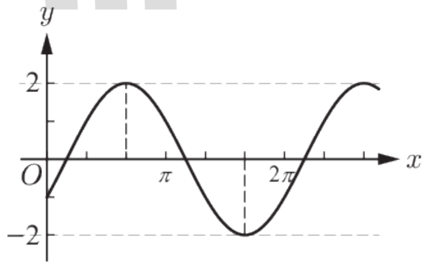


(1) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$ 之木橋總長最長為幾公尺？

(2) 此時 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 為幾公尺？

解　(1) $200\sqrt{2}$　(2) $50\sqrt{2}$；$100\sqrt{2}$

8. 附圖是曲線 $y=a\sin x+b\cos x$ 圖形的一部分，則 y 之週期、a 與 b 之值為何？



解　2π；$\sqrt{3}$；-1

9. 關於函數 $y=f(x)=2\cos(\frac{\pi}{3}-x)-2\cos x$，請問下列各敘述何者為真？

(A) 函數 $y=f(x)$ 的週期為 2π　　(B) 函數 $y=f(x)$ 的最大值為 1

(C) $f(3)>0$　　(D) 在 $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$ 時，$y=f(x)$ 的圖形為遞減

解　(A)(C)

10. 若 $0\le x<2\pi$，則方程式 $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$ 的解為何？(有兩解)

解　$x=\frac{\pi}{3}$ 或 π

進階題

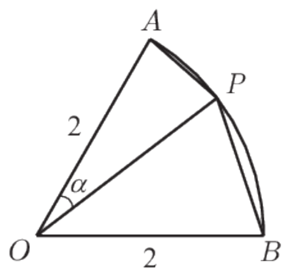
11. 試求 $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 290°}+\dfrac{1}{\sin 250°}$。

解 4

12. 設 $f(x)=2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x$，則 $f(x)$ 之最大值為何？

解 3

13. 如圖所示，扇形 OAB 的半徑為 2，$\angle AOB=60°$，若 P 為 $\overset{\frown}{AB}$ 上一點，$\angle AOP=\alpha$，則四邊形 $OAPB$ 面積的最大值為何？



解 2

14. 函數 $f(x)=\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x$，且 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$，則 $x=a$ 時，$f(x)$ 有最小值 b，試求數對 (a, b)。

解 $(0, -1)$

15. 設 $0\le x\le\pi$，若 $y=\sin 2x-\sin x-\cos x+4$ 之最大值 M，最小值 m，則數對 (M, m) 為何？

解 $(5, \dfrac{11}{4})$

16. 若 $\dfrac{\pi}{12}\le\theta\le\dfrac{3\pi}{4}$, $f(\theta)=3\sin^2\theta+4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$ 可化成 $a\sin(2\theta-b)+c,\ 0<b<\dfrac{\pi}{2}$，且當 $\theta=\alpha$ 時，$f(\theta)$ 有最大值 β，則

(A) $a=4$ (B) $b=\dfrac{\pi}{6}$ (C) $c=1$ (D) $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ (E) $\beta=5$

解 (A)(B)(C)(D)(E)

第 2 章　綜合練習

基礎題

1. 已知圓的半徑為 10，扇形圓心角為 $\frac{5\pi}{6}$ 弳，則此扇形之周長與面積為何？ [2－1]

解　$20+\frac{25\pi}{3}$；$\frac{125\pi}{3}$

2. 試求下列各小題之值：

(1) $\tan\frac{\pi}{3}+\cos\frac{3\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\times\tan\pi$。

(2) $\tan^2\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}-\sin\frac{7\pi}{10}+\sin^2\frac{3\pi}{10}$。 [2－1]

解　(1) $\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}$　(2) 1

3. 關於三角函數值的大小，下列哪些選項是正確的？

(A) $\cos 1>\sin 1°$　(B) $\cos 10>\cos 1$　(C) $\cos 10>\cos 10°$　(D) $\tan 3>\tan 3°$　(E) $\sin\pi<\sin\pi°$

[2－1]

解　(A)(E)

4. 下列哪些選項正確？

(A) 100 的最大負同界角為 $100-32\pi$　(B) $\sin 100>0$　(C) $\cos 100>0$　(D) $\tan 100>0$

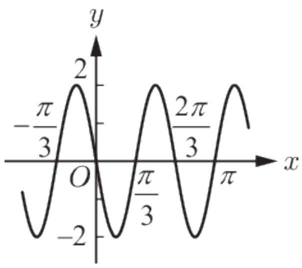
(E) $\cos 100<\frac{\sqrt{2}}{2}$ [2－1]

解　(A)(C)

5. 右圖可為下列哪些函數的（部分）圖形？

(A) $y=2\sin 3x$　(B) $y=-2\sin 3x$　(C) $y=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$

(D) $y=2\cos 3(x+\frac{\pi}{6})$　(E) $y=-2\cos 3(x-\frac{\pi}{6})$ [2－2]



解　(B)(D)(E)

6. 試判斷下列哪些選項是正確的？

(A) $\sin 1>\sin 2>\sin 3$　(B) $\cos 1>\cos 3>\cos 2$　(C) $\tan 1>\tan 3>\tan 2$

(D) 圖形 $y=\sin x$ 的週期為 π　(E) 方程式 $5\sin x=x$ 共有 3 個實根　[2－2]

解　(C)(E)

7. 下列選項哪些是正確的？

(A) $y=3\cos 2x$ 圖形的週期為 2π

(B) $y=3\cos 2x$ 圖形的振幅為 3

(C) $y=\cos^2 x$ 圖形的週期為 2π

(D) $y=\cos^2 x$ 圖形的振幅為 $\frac{1}{2}$

(E) 在 $0\leq x\leq 4\pi$ 範圍內，$y=\sin 2x$ 的圖形與 $y=\cos x$ 的圖形共有 8 個交點　[2－2]

解　(B)(D)(E)

8. 若 $\triangle ABC$ 內角滿足 $\cos A\cos B>\sin A\sin B$，則此三角形必為何種三角形？

(A) 銳角三角形　(B) 鈍角三角形　(C) 直角三角形　(D) 等腰三角形　(E) 正三角形　[2－3]

解　(B)

9. 若 $\tan(A-B)=-2$，$\tan A=7$，則

(1) $\tan B$ 之值為何？　(2) $\tan(A+B)$ 之值為何？　[2－3]

解　(1) $-\frac{9}{13}$　(2) $\frac{41}{38}$

10. 已知 θ 為第二象限角，且 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，則

(1) $\sin 2\theta$ 之值為何？　(2) $\cos 2\theta$ 之值為何？　[2－3]

解　(1) $-\frac{24}{25}$　(2) $\frac{7}{25}$

11. 阿三和小民將老師指派的功課 $\sqrt{3}\sin x+\cos x$ 分別疊合成 $a\sin(bx+c)$ 與 $d\cos(ex+f)$，已知 $a, b, d, e>0$，$0<c, f<2\pi$，則

(1) 數組 (a, b, d, e) 之值為何？ (2) 數組 (c, f) 之值為何？ [2－4]

解 (1) $(2, 1, 2, 1)$ (2) $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{3})$

12. 在 $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{11\pi}{6}$ 的範圍內，若函數 $y=2\sqrt{3}\sin(x-\frac{\pi}{6})-4\sin x$ 的最大值為 M，最小值為 m，則數對 (M, m) 之值為何？ [2－4]

解 $(2, -\sqrt{3})$

13. 已知函數 $f(x)=3\sin x-3\cos x-2$，在 $x=\theta_1$ 時有最大值 M，在 $x=\theta_2$ 時有最小值 m，則下列那些選項正確？

(A) $\cos\theta_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

(B) $\sin\theta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(C) 數對 $(M, m)=(3\sqrt{2}-2, -3\sqrt{2}-2)$

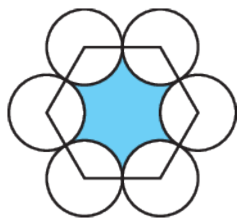
(D) $y=f(x)$ 是週期為 2π 的週期函數

(E) 若 $f(x)=0$ 的正實根分別為 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$，則 $x_{10}-x_9=x_{100}-x_{99}$ [2－4]

解 (A)(C)(D)(E)

進階題

14. 如圖，6 個半徑為 1 的小圓彼此相切，其圓心都在某一個正六邊形的頂點上，則陰影區域的面積為何？ [2－1]

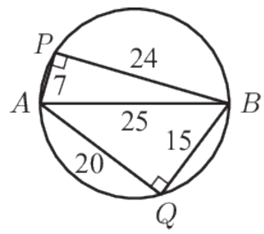


解 $6\sqrt{3}-2\pi$

15. 設 $0\le x\le 6\pi$，則方程式 $\sin x=\frac{1}{2}$ 的所有解之和為何？ [2－2]

解 15π

16. 如右圖，$\overline{AB}$ 為直徑，P、Q 在圓周上且 $\overline{AP}=7$，$\overline{AQ}=20$，試求 $\sin\angle PAQ$ 與 $\overline{PQ}$。 [2－3]



解　$\frac{117}{125}$；$\frac{117}{5}$

17. 試求 $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$。 [2－3]

解　$-\frac{1}{8}$

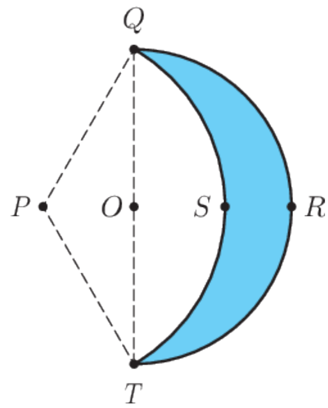
18. 若 x 為任意實數，則 $f(x)=6\sin^2 x+4\sin x\cos x+3$ 的最大值為何？又此時 $\sin 4x$ 之值為何？ [2－4]

解　$6+\sqrt{13}$；$-\frac{12}{13}$

2

大考題

19. 設計師為天文館設計以不銹鋼片製成的月亮形狀，其中有一款設計圖如右圖所示：圖中，圓弧 QRT 是一個以 O 點為圓心、$\overline{QT}$ 為直徑的半圓，$\overline{QT}=2\sqrt{3}$。圓弧 QST 的圓心在 P 點，$\overline{PQ}=\overline{PT}=2$。圓弧 QRT 與圓弧 QST 所圍出的塗色區域 $QRTSQ$ 即為某一天所見的月亮形狀。設此塗色區域的面積為 $a\pi+\sqrt{b}$，其中 π 為圓周率，a 為有理數，b 為整數，則 $a=$________（化為最簡分數），$b=$________。 【109 學測】



解　$\frac{1}{6}$；3

20. 試問共有幾個角度 θ 滿足 $0°<\theta<180°$，且 $\cos(3\theta-60°)$, $\cos 3\theta$, $\cos(3\theta+60°)$ 依序成一個等差數列？

(A) 1 個　(B) 2 個　(C) 3 個　(D) 4 個　(E) 5 個 【107 學測】

解　(C)

21. 試問在 $0 \le x \le 2\pi$ 的範圍中，$y=3\sin x$ 的函數圖形與 $y=2\sin 2x$ 的函數圖形有幾個交點？

(A) 2 個交點　(B) 3 個交點　(C) 4 個交點　(D) 5 個交點　(E) 6 個交點　【106 數甲】

解　(D)

22. 有一時鐘的時針長度為 5 公分，分針長度為 8 公分。假設時針針尖每分鐘所移動的弧長都相等。

(1) 試求時針針尖每分鐘所移動的弧長。

(2) 已知時針針尖與分針針尖距離為 7 公分，求時針和分針所夾的角度。

(3) 試問在六點與六點半之間，時針針尖與分針針尖的距離最接近 7 公分是在六點幾分（取至最接近的整數分鐘）？　【104 數甲】

解　(1) $\frac{\pi}{72}$ 公分　(2) $60°$　(3) 6 點 22 分

23. 設 $0 \le \theta < 2\pi$，且方程式 $x^2-a=0$ 之兩根恰為 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$。請選出正確的選項。

(A) $\tan\theta=1$　(B) $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=0$　(C) $\sin 2\theta=-1$　(D) $a=\frac{1}{2}$　(E) 滿足題設的 θ 只有一個

【101 數甲】

解　(B)(C)(D)

得 分

第 2 章　實戰演練

一、多選題（每題 7 分）

(　CE　) 1. 下列哪些不等式成立？

(A) $\sin\pi > \sin\pi°$　(B) $\cos\pi > \cos\pi°$　(C) $\cos\pi° > \sin\pi°$　(D) $\tan\pi > \tan\pi°$

(E) $\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{3}$　【108 成功高中】

解

(A) ×：$\sin\pi = \sin 180° = 0,\ \sin\pi° \approx \sin 3.14° > 0$，$\therefore \sin\pi < \sin\pi°$

(B) ×：$\cos\pi = \cos 180° = -1,\ \cos\pi° \approx \cos 3.14° > 0$，$\therefore \cos\pi < \cos\pi°$

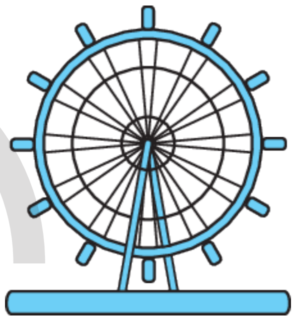
(C) ○：$\because 0° < \pi° < 45°$，$\therefore \cos\pi° > \sin\pi°$

(D) ×：$\tan\pi = \tan 180° = 0,\ \tan\pi° \approx \tan 3.14° > 0$，$\therefore \tan\pi < \tan\pi°$

(E) ○：$\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2} \le 1 < \sqrt{3}$

故選(C)(E)

(　ABDE　) 2. 遊樂中心有一直徑 36 公尺的圓形摩天輪，中心軸距地面高 21 公尺，運轉一圈需費時 15 分鐘，當摩天輪剛開始要運轉時，小明恰坐在離地面最近的位置上，則下列哪些選項正確？



(A) 轉 5 分鐘後，小明繞圓心旋轉 $\dfrac{2\pi}{3}$ 弧度

(B) 轉 5 分鐘後，小明共繞行 12π 公尺

(C) 轉 5 分鐘後，小明離地面約 26 公尺

(D) 轉 x 分鐘後，小明離地面高度可表示成 $y = 21 - 18\cos(\dfrac{2\pi}{15}x)$ 公尺

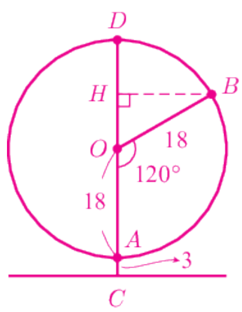
(E) 轉 x 分鐘後，小明離地面高度可表示成 $y = 21 + 18\sin(\dfrac{2\pi}{15}x - \dfrac{\pi}{2})$ 公尺

【107 建國中學】

解

(A) ○：$\because$ 運轉一圈需費時 15 分鐘，$\therefore$ 轉 5 分鐘後，小明繞圓心旋轉 $2\pi \times \dfrac{5}{15} = \dfrac{2\pi}{3}$ 弧度

(B) ○：如圖，$\because \angle AOB = \dfrac{2\pi}{3}$，$\therefore \overset{\frown}{AB} = 18 \times \dfrac{2\pi}{3} = 12\pi$，即小明共繞行 12π 公尺



(C) ×：承(B)，小明離地面高度為 $\overline{OC} + \overline{OH} = 21 + 18 \times \cos(\pi - \dfrac{2\pi}{3}) = 21 + 18 \times \dfrac{1}{2} = 30$ 公尺

(D)(E) ○：轉 x 分鐘後，小明繞圓心旋轉 $2\pi \times \dfrac{x}{15} = \dfrac{2\pi}{15}x$ 弧度

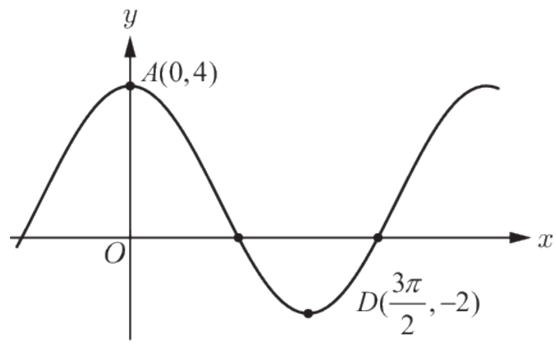
又當 $\dfrac{\pi}{2} \le \dfrac{2\pi}{15}x \le \dfrac{3\pi}{2}$ 時，即 $\dfrac{15}{4} \le x \le \dfrac{45}{4}$ 時，$\cos(\pi - \dfrac{2\pi}{15}x) = -\cos(\dfrac{2\pi}{15}x) \ge 0$

因此，小明離地面的高度可表示成

$y = 21 + 18\cos(\pi - \dfrac{2\pi}{15}x) = 21 - 18\cos(\dfrac{2\pi}{15}x) = 21 - 18\sin(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\pi}{15}x) = 21 + 18\sin(\dfrac{2\pi}{15}x - \dfrac{\pi}{2})$ 公尺

故選(A)(B)(D)(E)

(BCE) 3. 下圖是函數 $y=b\cos ax+c$ 的部分圖形，其中 $a>0$，則下列哪些選項是正確的？



(A) 週期為 $\frac{3\pi}{2}$

(B) $a=\frac{2}{3}$

(C) $b=3$

(D) $c=4$

(E) 點 $(\frac{\pi}{2},\frac{5}{2})$ 在圖形上　　【108 台中一中】

解　由圖形可知，函數 $y=b\cos ax+c$ 圖形的最高點為 $A(0,4)$、最低點為 $B(\frac{3\pi}{2},-2)$

(A) ×(B) ○：$\because$ 函數圖形的週期為 $2\times(\frac{3\pi}{2}-0)=3\pi$

$\therefore \frac{2\pi}{a}=3\pi \Rightarrow a=\frac{2}{3}$

(C) ○：振幅 $b=\frac{4-(-2)}{2}=3$

(D) ×：$c=4-3=1$

(E) ○：由(B)(C)(D)可知，函數 $y=3\cos(\frac{2}{3}x)+1$

$\because$ 點 $(\frac{\pi}{2},\frac{5}{2})$ 代入 $y=3\cos(\frac{2}{3}x)+1$ 得 $\frac{5}{2}=3\cos(\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2})+1=3\cos\frac{\pi}{3}+1=3\times\frac{1}{2}+1$

$\therefore$ 點 $(\frac{\pi}{2},\frac{5}{2})$ 在圖形上

故選(B)(C)(E)

(ADE) 4. 關於 $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ 與 $g(x)=\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$ 兩個週期函數，下列敘述哪些正確？

(A) $f(x)$ 與 $g(x)$ 的週期相同

(B) $y=f(x)$ 的圖形向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 可得 $y=g(x)$

(C) $y=f(x)$ 的圖形對稱於 $x=\frac{\pi}{2}$

(D) 方程式 $f(x)=\frac{1}{4\pi}x$ 恰有 3 個相異實根

(E) 方程式 $g(x)=\sqrt{2}$ 有無限多解　　【107 北一女中】

解

$g(x)=\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{2})=\sqrt{2}(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})$

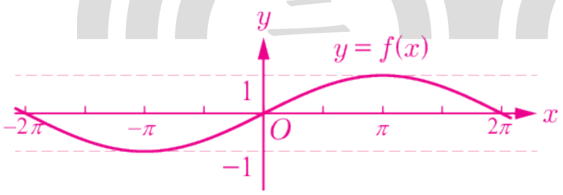
(A) ○：$f(x)=\sin\frac{x}{2}$ 的週期 $=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

$g(x)=\sqrt{2}\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})$ 的週期 $=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

$\therefore f(x)$ 與 $g(x)$ 的週期相同

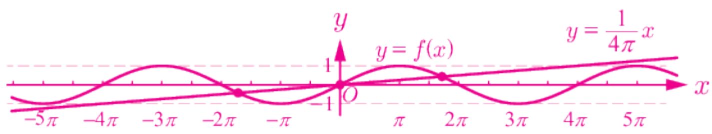
(B) ×：$y=f(x)$ 的圖形向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 可得 $y=\sin\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4})=\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8})$ 與 $g(x)=\sqrt{2}\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})$ 不同

(C) ×：$y=f(x)=\sin\frac{x}{2}$ 的圖形如下：



由圖形可知，$y=f(x)$ 的圖形對稱於 $x=k\pi$，k 為整數

(D) ○：由圖形可知，$y=f(x)=\sin\frac{x}{2}$ 的圖形與直線 $y=\frac{1}{4\pi}x$ 有 3 個相異交點



因此，方程式 $f(x)=\frac{1}{4\pi}x$ 恰有 3 個相異實根

(E) ○：$g(x)=\sqrt{2}\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\Rightarrow\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})=1$

$\Rightarrow\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{4k+1}{2}\pi$, k 為整數

$\therefore x=(4k+\frac{3}{2})\pi$, k 為整數，有無限多解

故選(A)(D)(E)

（　CD　）5. 設 k 為實數，且方程式 $2\sin x+\cos x=k$ 在 $0\le x\le \frac{\pi}{2}$ 的範圍內有兩個相異的實數解。下列各數中，請選出 k 值的可能選項。

(A) 1　(B) $\frac{3}{2}$　(C) 2　(D) $\sqrt{\pi+1}$　(E) $\sqrt{5}$　【108 台中一中】

解 令 $y=2\sin x+\cos x$

$=\sqrt{5}(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{5}}\cos x)$

$=\sqrt{5}(\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta)$，其中 θ 是一個銳角且 $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$

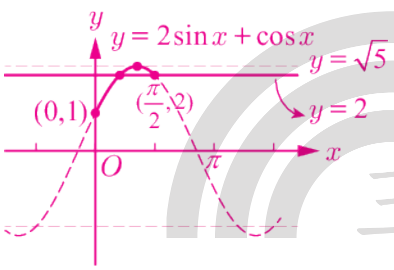
$=\sqrt{5}\sin(x+\theta)$

$\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}$，$\therefore \theta\le x+\theta\le\frac{\pi}{2}+\theta$

又當 $x=0$ 時，$y=\sqrt{5}\sin(0+\theta)=\sqrt{5}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=1$

當 $x=\frac{\pi}{2}$ 時，$y=\sqrt{5}\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sqrt{5}\cos\theta=\sqrt{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=2$

因此，在 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 的範圍內，$y=2\sin x+\cos x=\sqrt{5}\sin(x+\theta)$ 的圖形如下：



由上圖可知，在 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 的範圍內，當 $2\le k<\sqrt{5}$ 時，$y=2\sin x+\cos x$ 的圖形與水平線 $y=k$ 有相異兩個交點，即方程式 $2\sin x+\cos x=k$ 有兩個相異的實數解

又 $\sqrt{\pi+1}\approx\sqrt{4.14}$

故選(C)(D)

二、填充題（每格 5 分）

6. 已知一扇形面積為 16 平方公分，且弧長為 4 公分，則此扇形的圓心角為 $\underline{\frac{1}{2}}$ 弳。

【108 高師大附中】

解 設此扇形的半徑為 r 公分，圓心角為 θ 弳

依題意可得 $\begin{cases}\frac{1}{2}r^2\theta=16 \cdots\cdots ①\\ r\theta=4 \cdots\cdots ②\end{cases}$

$\frac{②^2}{①}$ 得 $\frac{\theta}{\frac{1}{2}}=1\Rightarrow\theta=\frac{1}{2}$

即所求圓心角為 $\frac{1}{2}$ 弳

7. 試求 $\sin 28°\cos 107° - \sin 287°\sin 62°$ 之值為 $\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$。【108 高師大附中】

解
$\sin 28°\cos 107° - \sin 287°\sin 62°$
$= \sin 28°\cos(90° + 17°) - \sin(270° + 17°)\sin(90° - 28°)$
$= \sin 28° \times (-\sin 17°) - (-\cos 17°) \times \cos 28°$
$= \cos 28° \times \cos 17° - \sin 28° \times \sin 17°$
$= \cos(28° + 17°) = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

8. 設 α, β 分別為第一、四象限角，且 $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$, $\sin\beta = -\dfrac{4}{5}$，則 $\alpha - \beta$ 為第 $\underline{\text{二}}$ 象限角。

【108 成功高中】

解
$\because \alpha$ 為第一象限角且 $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$，$\therefore \sin\alpha = \dfrac{12}{13}$
$\because \beta$ 為第四象限角且 $\sin\beta = -\dfrac{4}{5}$，$\therefore \cos\beta = \dfrac{3}{5}$
又 $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \dfrac{12}{13} \times \dfrac{3}{5} - \dfrac{5}{13} \times (-\dfrac{4}{5}) = \dfrac{56}{65} > 0$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \dfrac{5}{13} \times \dfrac{3}{5} + \dfrac{12}{13} \times (-\dfrac{4}{5}) = -\dfrac{33}{65} < 0$
因此，$\alpha - \beta$ 為第二象限角

9. 已知 $\triangle ABC$ 的三內角滿足 $2\sin B\sin C - \cos A = 1$，則

(1) $\triangle ABC$ 為何種三角形？答：$\underline{\triangle ABC \text{ 為 } \overline{AC} = \overline{AB} \text{ 的等腰三角形}}$。(註：若為等腰三角形，答案須填寫是哪兩邊相等的等腰三角形，如 $\overline{DE} = \overline{DF}$ 的等腰三角形；若為直角三角形，則須填寫是哪一角為直角的直角三角形，如 $\angle D = 90°$ 的直角三角形)

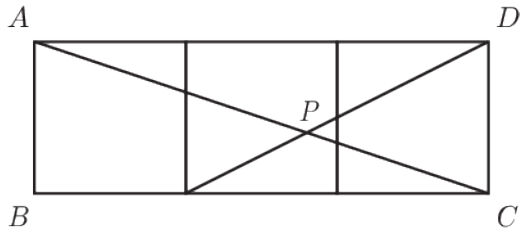
(2) 承(1)，若此三角形還滿足 $2\sin C\sin A - \cos B = 0$，則 $\angle A = \underline{\dfrac{2\pi}{3}}$。

【107 高雄中學】

解
(1) $2\sin B\sin C - \cos A = 1$
$\Rightarrow 2\sin B\sin C - \cos[\pi - (B + C)] = 1 \Rightarrow 2\sin B\sin C + \cos(B + C) = 1$
$\Rightarrow 2\sin B\sin C + (\cos B\cos C - \sin B\sin C) = 1 \Rightarrow \cos B\cos C + \sin B\sin C = 1$
$\Rightarrow \cos(B - C) = 1$
$\therefore \angle B - \angle C = 0 \Rightarrow \angle B = \angle C$
因此，$\triangle ABC$ 為 $\overline{AC} = \overline{AB}$ 的等腰三角形

(2) 由(1)與 $2\sin C\sin A - \cos B = 0$ 可知 $\cos(A - C) = 0$
$\Rightarrow \angle A - \angle C = \dfrac{\pi}{2}$ 或 $-\dfrac{\pi}{2}$ (不合，$\because$ 若 $\angle A - \angle C = -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \angle C = \angle A + \dfrac{\pi}{2}$，則 $\angle B$ 與 $\angle C$ 均為鈍角)
$\therefore \angle C = \angle A - \dfrac{\pi}{2}$
又 $\pi = \angle A + \angle B + \angle C = \angle A + 2 \times (\angle A - \dfrac{\pi}{2}) = 3\angle A - \pi$
因此，$\angle A = \dfrac{2\pi}{3}$

10. 將三個大小相同的正方形排成一列，如圖所示，試求 $\angle APD =$ __135°__。　　　【106 武陵高中】



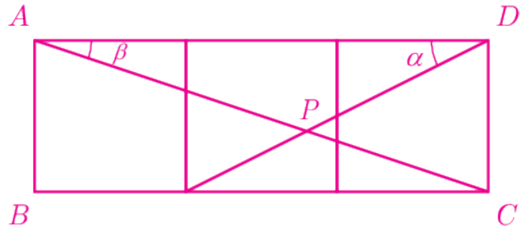
解　不妨假設每個正方形的邊長都是 1

則 $\tan\alpha = \dfrac{1}{2},\ \tan\beta = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \tan\angle APD = \tan[180^\circ - (\alpha+\beta)] = -\tan(\alpha+\beta)$

$$= -\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = -\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = -1$$

$\therefore \angle APD = 135^\circ$



11. 設 $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi,\ \dfrac{9\pi}{4} < \beta < \dfrac{15\pi}{4}$，且 $\tan\alpha - \tan\beta + \tan\alpha\tan\beta = -1$，若 $\beta = \alpha + \theta$，則 $\theta =$ __$\dfrac{9\pi}{4}$__。(請以弧度量表示)　　　【107 高雄中學】

解　$\because \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi,\ \dfrac{9\pi}{4} < \beta < \dfrac{15\pi}{4}$，$\therefore \dfrac{5\pi}{4} < \beta - \alpha < \dfrac{13\pi}{4}$，即 $\dfrac{5\pi}{4} < \theta < \dfrac{13\pi}{4}$

又 $\tan\alpha - \tan\beta + \tan\alpha\tan\beta = -1 \Rightarrow 1 + \tan\alpha\tan\beta = \tan\beta - \tan\alpha$

$\because \tan\theta = \tan(\beta - \alpha) = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} = 1$

$\therefore \theta = \dfrac{9\pi}{4}$

12. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A, \angle B, \angle C$ 的對邊長分別為 a, b, c，且 $2\sqrt{3}\sin^2\dfrac{A}{2} + \sin A - \sqrt{3} = 0$，求 $\angle A =$ __$\dfrac{\pi}{3}$__。　　　【108 台中一中】

解　$2\sqrt{3}\sin^2\dfrac{A}{2} + \sin A - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{3}\times\dfrac{1-\cos A}{2} + \sin A - \sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \sin A = \sqrt{3}\cos A \Rightarrow \dfrac{\sin A}{\cos A} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan A = \sqrt{3}$，$\therefore \angle A = \dfrac{\pi}{3}$

13. 設 θ 為第三象限角，且 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，則 $\tan 2\theta+\tan\dfrac{\theta}{2}$ 的值為 $\underline{\dfrac{3}{7}}$。　【106 台南女中】

解　$\because\theta$ 為第三象限角，且 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，$\therefore\sin\theta=-\dfrac{3}{5},\ \cos\theta=-\dfrac{4}{5}$

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times\frac{3}{4}}{1-(\frac{3}{4})^2}=\frac{24}{7}$$

又 $180^\circ+360^\circ\times k<\theta<270^\circ+360^\circ\times k,\ k$ 為整數 $\Rightarrow 90^\circ+180^\circ\times k<\dfrac{\theta}{2}<135^\circ+180^\circ\times k,\ k$ 為整數

(1) 當 $k=0$ 時，$90^\circ<\dfrac{\theta}{2}<135^\circ\Rightarrow\dfrac{\theta}{2}$ 為第二象限角

(2) 當 $k=1$ 時，$270^\circ<\dfrac{\theta}{2}<315^\circ\Rightarrow\dfrac{\theta}{2}$ 為第四象限角

由(1)(2)可知，$\tan\dfrac{\theta}{2}=-\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=-\sqrt{\dfrac{1-(-\frac{4}{5})}{1+(-\frac{4}{5})}}=-3$

因此，$\tan 2\theta+\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{24}{7}+(-3)=\dfrac{3}{7}$

14. 設 $0\leq x<\pi$，$y=2\sin x-2\sqrt{3}\cos x$ 之最大值發生在 $x=\underline{\dfrac{5\pi}{6}}$。　【107 北一女中】

解　$y=2\sin x-2\sqrt{3}\cos x=4(\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x)=4(\sin x\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos x\sin\dfrac{\pi}{3})=4\sin(x-\dfrac{\pi}{3})$

$\because 0\leq x<\pi$，$\therefore -\dfrac{\pi}{3}\leq x-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leq\sin(x-\dfrac{\pi}{3})\leq 1$

因此，當 $x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ 時，即 $x=\dfrac{5\pi}{6}$

y 有最大值 $=4\times 1=4$

15. 在 $0\leq x\leq\pi$ 範圍內，設函數 $y=3\cos x+4\sin x+5$ 之最小值為 m，最大值為 M，則數對 $(m,\ M)=\underline{(2,\ 10)}$。　【107 台中女中】

解　$y=3\cos x+4\sin x+5$

$=5(\dfrac{3}{5}\cos x+\dfrac{4}{5}\sin x)+5$

$=5(\cos x\sin\theta+\sin x\cos\theta)+5$，其中 $\sin\theta=\dfrac{3}{5},\ \cos\theta=\dfrac{4}{5}(\theta\approx 37^\circ)$

$=5\sin(x+\theta)+5$

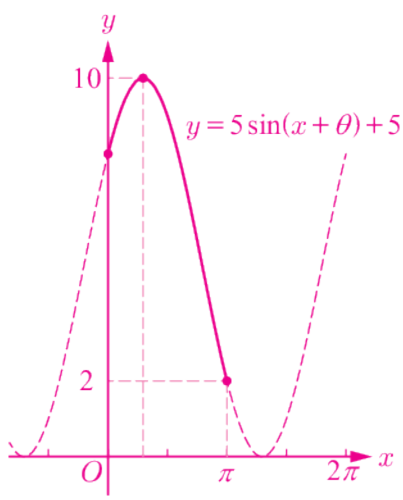
$\because 0\leq x\leq\pi$，$\therefore\theta\leq x+\theta\leq\pi+\theta$

因此，當 $x+\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 時，y 有最大值 $M=5\times 1+5=10$

當 $x+\theta=\pi+\theta$ 時，即 $x=\pi$

y 有最小值 $m=5\sin(\pi+\theta)+5=5\times(-\sin\theta)+5=5\times(-\dfrac{3}{5})+5=2$

故數對 $(m,\ M)=(2,\ 10)$



16. 已知 $0\le x\le 4\pi$，求方程式 $4\sin(\frac{\pi}{6}+x)-4\cos x=1$ 之所有實根總和為 $\underline{\frac{20\pi}{3}}$。

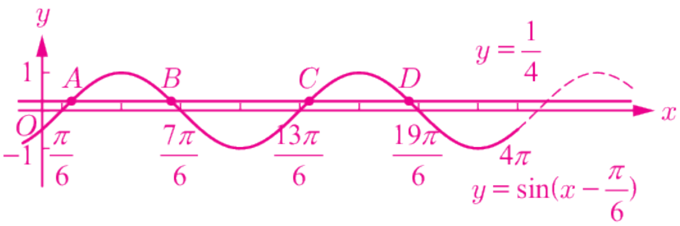
【107 台中女中】

解　$4\sin(\frac{\pi}{6}+x)-4\cos x=1\Rightarrow 4(\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\sin x)-4\cos x=1$

$\Rightarrow 4(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)-4\cos x=1\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4}$

$\sin(x-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4}$ 的實根即 $y=\sin(x-\frac{\pi}{6})$ 的圖形與水平線 $y=\frac{1}{4}$ 交點的 x 坐標



由圖形可知，$y=\sin(x-\frac{\pi}{6})$ 的圖形與水平線 $y=\frac{1}{4}$ 交於 $A(x_1,\frac{1}{4}), B(x_2,\frac{1}{4}), C(x_3,\frac{1}{4}), D(x_4,\frac{1}{4})$ 四點

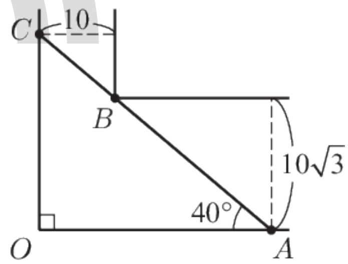
且 A, B 對稱於 $x=\frac{4\pi}{6}$，$\therefore \frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4\pi}{6}\Rightarrow x_1+x_2=\frac{4\pi}{3}$

C, D 對稱於 $x=\frac{16\pi}{6}$，$\therefore \frac{x_3+x_4}{2}=\frac{16\pi}{6}\Rightarrow x_3+x_4=\frac{16\pi}{3}$

因此，所求 $=x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{4\pi}{3}+\frac{16\pi}{3}=\frac{20\pi}{3}$

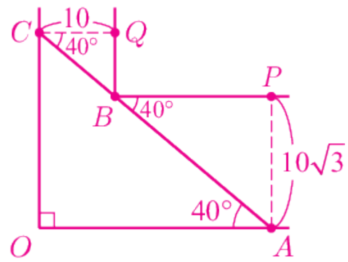
17. 如圖，有一個 L 型直角渠道，其寬度分別為 $10\sqrt{3}$ 公尺及 10 公尺，今要在外側的兩邊上各取一點 A 與 C 圍成一個養殖場，使得 $\overline{AC}$ 通過頂點 B 且 $\angle OAC=40°$，求 $\overline{AC}$ 的長 = $\underline{40}$ 公尺。

【107 建國中學】



解　如圖，$\overline{AP}=10\sqrt{3}=\overline{AB}\times\sin 40°\Rightarrow\overline{AB}=\frac{10\sqrt{3}}{\sin 40°}$

$\overline{CQ}=10=\overline{BC}\times\cos 40°\Rightarrow\overline{BC}=\frac{10}{\cos 40°}$



$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=\frac{10\sqrt{3}}{\sin 40°}+\frac{10}{\cos 40°}=\frac{10\sqrt{3}\cos 40°+10\sin 40°}{\sin 40°\cos 40°}$

$=\frac{20(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40°+\frac{1}{2}\sin 40°)}{\frac{1}{2}\times(2\sin 40°\cos 40°)}=\frac{20(\sin 60°\cos 40°+\cos 60°\sin 40°)}{\frac{1}{2}\sin 80°}$

$=\frac{20\sin 100°}{\frac{1}{2}\sin 80°}=40$