B2-12

期望值【基礎篇】

主題 1　數學期望值

1. 數學期望值

設 S 為一試驗的樣本空間，且 $S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，其中 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 為兩兩互斥的事件。

若對每個 $i = 1, 2, \cdots, n$，事件 A_i 皆對應一個值 m_i，且 A_i 發生的機率為 p_i，則該試驗的期望值 E 為 $m_1 p_1 + m_2 p_2 + \cdots + m_n p_n$

2. 期望值的應用

(1) 對於任何賭博或其他具有風險性的遊戲，如果參與此遊戲的期望值為 0，那表示此遊戲對莊家與玩家是公平的。

(2) 在處理有關風險性的事項，如投資或基金管理等等，常會以期望值的大小來作為決策參考。

【範例 1】數學期望值

投擲一顆公正的骰子，若擲出 k 點（$k = 1, 2, \cdots, 6$）可得 $10k$ 元，試求投擲骰子 1 次所得金額的期望值。

此試驗的樣本空間 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

令 A_k（$k = 1, 2, \cdots, 6$）表示擲出 k 點的事件，則

$S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_6$ 且 $A_1, A_2, \cdots, A_6$ 兩兩互斥

情形	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
金額	10	20	30	40	50	60
機率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$\therefore$ 所求期望值 E

$$=10\times\frac{1}{6}+20\times\frac{1}{6}+30\times\frac{1}{6}+40\times\frac{1}{6}+50\times\frac{1}{6}+60\times\frac{1}{6}$$

$=35$（元）

【範例 2】數學期望值

一個不透明的箱子裡裝有 100 元的紙鈔 5 張、500 元的紙鈔 3 張。假設每 1 張鈔票被抽到的機會相同，則從箱子裡一次任取 2 張鈔票，其金額的期望值是多少？

情形	2 張 100	1 張 100、 1 張 500	2 張 500
金額	200	600	1000
機率	$\frac{C_2^5}{C_2^8}=\frac{10}{28}$	$\frac{C_1^5\times C_1^3}{C_2^8}=\frac{15}{28}$	$\frac{C_2^3}{C_2^8}=\frac{3}{28}$

$\therefore$ 所求期望值 E

$$=200\times\frac{10}{28}+600\times\frac{15}{28}+1000\times\frac{3}{28}=500\text{（元）}$$

（另解）

$\because$ 箱子內共有 8 張紙鈔，其總金額為

$100\times5+500\times3=2000$（元）

每 1 張平均價值 $=\frac{2000}{8}=250$（元）

$\therefore$ 任取 2 張，平均價值為 $250\times2=500$（元）

故期望值為 500（元）

【範例 3】數學期望值

一個盒子裡有 9 個燈泡，其中有 3 個是壞的，今從中隨機取出 3 個，試求取出壞燈泡個數的期望值。

情形	0 壞 3 好	1 壞 2 好	2 壞 1 好	3 壞 0 好
個數	0	1	2	3
機率	$\frac{C_3^6}{C_3^9}=\frac{20}{84}$	$\frac{C_1^3\times C_2^6}{C_3^9}=\frac{45}{84}$	$\frac{C_2^3\times C_1^6}{C_3^9}=\frac{18}{84}$	$\frac{C_3^3}{C_3^9}=\frac{1}{84}$

$\therefore$ 所求期望值 E

$=0\times\frac{20}{84}+1\times\frac{45}{84}+2\times\frac{18}{84}+3\times\frac{1}{84}=1$（個）

（另解）

考慮隨機取出 1 個，取出壞燈泡個數的期望值

情形	0 壞 1 好	1 壞 0 好
個數	0	1
機率	$\frac{C_1^6}{C_1^9}=\frac{2}{3}$	$\frac{C_1^3}{C_1^9}=\frac{1}{3}$

得期望值為 $0\times\frac{2}{3}+1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$（個）

$\therefore$ 任取 3 個，平均壞燈泡個數為 $3\times\frac{1}{3}=1$（個）

故期望值為 1（個）

【範例 4】期望值的應用

同時投擲三枚均勻的硬幣 1 次，若擲出 3 正面可得 100 元，恰擲出 2 正面可得 80 元，恰擲出 1 正面可得 60 元，若希望這是公平的遊戲，試問擲出 3 反面時，應該付出多少元？

設擲出 3 反面時，應該付出 x 元

情形	3 正面	恰 2 正面	恰 1 正面	3 反面
金額	100	80	60	$-x$
機率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

依題意可得

$0 =$ 期望值 E

$$=100\times\frac{1}{8}+80\times\frac{3}{8}+60\times\frac{3}{8}+(-x)\times\frac{1}{8}$$

$\Rightarrow x = 520$

即擲出 3 反面時，應該付出 520 元

NOTE

【範例 5】期望值的應用

某電子公司欲擴廠，新建的廠房有大小兩種規模。評估兩種建廠規模，在高度成長、微幅成長、持平以及衰退這四種經濟景氣情況下，其獲利的情形如下表：

廠房規模／經濟情況	大	小
高度成長	100	60
微幅成長	40	30
持平	20	10
衰退	–50	–10

（單位：百萬元/年）

經分析，未來一年經濟高度成長的機率 $p_1 = 0.2$，微幅成長的機率 $p_2 = 0.3$，持平的機率 $p_3 = 0.3$，衰退的機率 $p_4 = 0.2$。試問以未來一年利潤期望值之大小為準則來判斷，此公司應該興建哪一種規模的廠房？

設興建大規模與小規模廠房，其未來一年的利潤期望值分別為 E_1 及 E_2，則

$E_1 = 100\times0.2+40\times0.3+20\times0.3+(-50)\times0.2$

$\quad = 28$（百萬元/年）

$E_2 = 60\times0.2+30\times0.3+10\times0.3+(-10)\times0.2$

$\quad = 22$（百萬元/年）

$\because E_1 > E_2$

$\therefore$ 此公司應該興建大規模的廠房