組合與二項式定理【基礎篇】

主題 1　組合

1. n 個相異物中任取 r 個的組合數（不考慮排列的順序）

$$P_r^n=C_r^n\times r!\ \Rightarrow C_r^n=\frac{P_r^n}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}，$$

其中 n 為正整數，r 為整數，$0\le r\le n$。

2. 組合數的性質

設 n 為正整數，r 為非負整數且 $0\le r\le n$，則 $C_r^n=C_{n-r}^n$。
其組合意義為「從 n 個相異物取出 r 個的組合數」與「從 n 個相異物選 $(n-r)$ 個不取的組合數」相等。

3. 巴斯卡定理

若 r,n 為正整數且 $1\le r\le n$，則 $C_r^n=C_{r-1}^{n-1}+C_r^{n-1}$。

【範例 1】C_r^n 的運算

(1) 試求 C_0^5、C_1^5、C_2^5、C_3^5、C_4^5、C_5^5 之值。
(2) 若 $C_4^m=C_2^m$，則 m 之值為何？
(3) 若 $C_3^{n+1}=4C_2^{n-1}$，則 n 之值為何？

[解]

(1) $C_0^5=\dfrac{5!}{0!\times(5-0)!}=\dfrac{5!}{0!\times5!}=1$　$C_1^5=\dfrac{5!}{1!\times(5-1)!}=\dfrac{5!}{1!\times4!}=5$

$C_2^5=\dfrac{5!}{2!\times(5-2)!}=\dfrac{5!}{2!\times3!}=10$　$C_3^5=\dfrac{5!}{3!\times(5-3)!}=\dfrac{5!}{3!\times2!}=10$

$C_4^5=\dfrac{5!}{4!\times(5-4)!}=\dfrac{5!}{4!\times1!}=5$　$C_5^5=\dfrac{5!}{5!\times(5-5)!}=\dfrac{5!}{5!\times0!}=1$

(2) $\because C_4^m=C_2^m$（$C_r^m=C_{m-r}^m$）

$\therefore m=4+2=6$

(3) $C_3^{n+1}=4C_2^{n-1}$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!}=4\cdot\frac{(n-1)!}{2!(n-3)!}\Rightarrow\frac{(n+1)n}{3\cdot(n-2)}=4$$

$$\Rightarrow n^2-11n+24=0\Rightarrow(n-3)(n-8)=0$$

$\therefore n=3$ 或 8

【範例 2】完全相異物組合

某班有幹部 11 人，其中男生 6 人、女生 5 人，欲從中選出 5 人參加幹部訓練營，試求滿足下列各條件的方法數：

(1) 任意選取。

(2) 正、副班長一定要參加。

(3) 3 個男生、2 個女生。

(4) 男生、女生至少各有 2 人。

(5) 男生至少 2 人。

(1) 所求 $=C_5^{11}=\dfrac{11!}{5!6!}=462$（種）

(2) 所求即從剩下的 9 個人當中，再選出 3 個人的方法數，有

$$C_3^9=\frac{9!}{3!6!}=84\text{（種）}$$

(3) 所求 $=\underset{6男選3男}{C_3^6}\times\underset{5女選2女}{C_2^5}=20\times10=200$（種）

(4) 所求有① 2 男 3 女與② 3 男 2 女兩種情形

$$=\underset{6男選2男}{C_2^6}\times\underset{5女選3女}{C_3^5}+\underset{6男選3男}{C_3^6}\times\underset{5女選2女}{C_2^5}=150+200=350\text{（種）}$$

(5) 所求有① 2 男 3 女、② 3 男 2 女、③ 4 男 1 女與④ 5 男。

$$=\underset{6男選2男}{C_2^6}\times\underset{5女選3女}{C_3^5}+\underset{6男選3男}{C_3^6}\times\underset{5女選2女}{C_2^5}+\underset{6男選4男}{C_4^6}\times\underset{5女選1女}{C_1^5}+\underset{6男選5男}{C_5^6}$$

$=150+200+75+6=431$（種）

【範例 3】完全相異物組合

平面上有 A, B, C, D, E 相異 5 個點，其中任三點不共線，試問：
(1) 這 5 個點可以決定出幾條直線？
(2) 這 5 個點可以決定出幾個三角形？
(3) 若 A, B, C 三點共線，其餘均無三點共線的情況，則：
① 可以決定出幾條直線？
② 可以決定出幾個三角形？

[解]

(1) $\because$ 相異 2 點恰可決定出一條直線

$\therefore$ 所求有 $C_2^5 = 10$ 條直線

(2) $\because$ 不共線相異 3 點恰可決定出一個三角形

$\therefore$ 所求有 $C_3^5 = 10$ 個三角形

(3) ① $\because A, B, C$ 三點共線

$\therefore$ 所決定的直線會減少 $\underbrace{C_2^3}_{\text{直線}AB,AC,BC} - 1 = 2$ 條

$\Rightarrow$ 所求有 $C_2^5 - 2 = 8$ 條直線

② $\because A, B, C$ 三點共線

$\therefore$ 所決定的三角形會減少 $\underbrace{C_3^3}_{\text{三角形}ABC} = 1$ 個

$\Rightarrow$ 所求有 $C_3^5 - 1 = 9$ 個三角形

【範例 4】完全相異物組合

甲、乙、丙、丁、戊共 5 個人玩猜拳遊戲一次，若恰有 3 人獲勝，則有幾種出拳情形？

[解]

所求 $= \underbrace{C_3^5}_{\substack{\text{5 個人選出}\\ \text{3 個人獲勝}}} \times \underbrace{C_1^3}_{\substack{\text{獲勝的拳有}\\ \text{3 種可能}}} = 10 \times 3 = 30$（種）

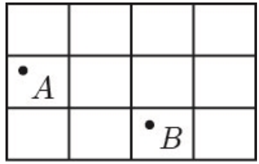
【範例 5】完全相異物組合

如下圖，已知各直線段與橫線段均等間隔，試問：

(1) 可在圖中找到多少個大大小小的矩形？

(2) 承第(1)題，這些矩形中，包含 A 點的有幾個？

(3) 承第(1)題，這些矩形中，包含 A 點或 B 點的有幾個？



[解]

(1) $\because$ 2 條相異的橫線與 2 條相異的直線恰可圍出一個矩形

$\therefore$ 所求有 $\underbrace{C_2^4}_{\text{從 4 條橫線中任選 2 條}} \times \underbrace{C_2^5}_{\text{從 5 條直線中任選 2 條}}$

$= 6 \times 10 = 60$ 個矩形

(2) 所求有 $\underbrace{C_1^2}_{\text{從 } A \text{ 上方的 2 橫線中任選 1 條}} \times \underbrace{C_1^2}_{\text{從 } A \text{ 下方的 2 橫線中任選 1 條}} \times \underbrace{C_1^1}_{\text{從 } A \text{ 左方的 1 直線中任選 1 條}} \times \underbrace{C_1^4}_{\text{從 } A \text{ 右方的 4 直線中任選 1 條}}$

$= 2 \times 2 \times 1 \times 4 = 16$（個）

(3) 包含 B 點的矩形有

$\underbrace{C_1^3}_{\text{從 } B \text{ 上方的 3 橫線中任選 1 條}} \times \underbrace{C_1^1}_{\text{從 } B \text{ 下方的 1 橫線中任選 1 條}} \times \underbrace{C_1^3}_{\text{從 } B \text{ 左方的 3 直線中任選 1 條}} \times \underbrace{C_1^2}_{\text{從 } B \text{ 右方的 2 直線中任選 1 條}}$

$= 3 \times 1 \times 3 \times 2 = 18$（個）

包含 A 點且包含 B 點的矩形有

$\underbrace{C_1^2}_{\text{從 } A \text{ 上方的 2 橫線中任選 1 條}} \times \underbrace{C_1^1}_{\text{從 } B \text{ 下方的 1 橫線中任選 1 條}} \times \underbrace{C_1^1}_{\text{從 } A \text{ 左方的 1 直線中任選 1 條}} \times \underbrace{C_1^2}_{\text{從 } B \text{ 右方的 2 直線中任選 1 條}}$

$= 2 \times 1 \times 1 \times 2 = 4$（個）

$\therefore$ 包含 A 點或包含 B 點的矩形有

$\underbrace{16}_{\text{包含 } A \text{ 的矩形數}} + \underbrace{18}_{\text{包含 } B \text{ 的矩形數}} - \underbrace{4}_{\text{包含 } A \text{ 且包含 } B \text{ 的矩形數}} = 30$（個）

【範例 6】同類物不相鄰問題

一列高鐵共有 12 節車廂，若要指定其中完全不相鄰的 4 節車廂來放置自動販賣機，則有多少種方法？

[解]

8 節未放置自動販賣機的車廂前後共有 9 個間隔（空隙）

①□②□③□④□⑤□⑥□⑦□⑧□⑨

所求可視為將放置自動販賣機的 4 節車廂排入這 9 個間隔的方法數，有 $C_4^9=126$（種）

【範例 7】巴斯卡定理

(1) 試求 $C_0^4+C_1^5+C_2^6+C_3^7+C_4^8+C_5^9+C_6^{10}$ 的值。

(2) 試求 $C_2^2+C_2^3+C_2^4+\ldots+C_2^{98}+C_2^{99}$ 的值。

[解]

(1) $C_0^4+C_1^5+C_2^6+C_3^7+C_4^8+C_5^9+C_6^{10}$

$=C_0^5+C_1^5+C_2^6+C_3^7+C_4^8+C_5^9+C_6^{10}$

$=C_1^6+C_2^6+C_3^7+C_4^8+C_5^9+C_6^{10}$

$=C_2^7+C_3^7+C_4^8+C_5^9+C_6^{10}$

$=\cdots\cdots$

$=C_6^{11}=C_5^{11}=462$

(2) $C_2^2+C_2^3+C_2^4+\ldots+C_2^{98}+C_2^{99}$

$=C_3^3+C_2^3+C_2^4+\ldots+C_2^{98}+C_2^{99}$

$=C_3^4+C_2^4+\ldots+C_2^{98}+C_2^{99}$

$=C_3^5+C_2^5+\ldots+C_2^{98}+C_2^{99}$

$=\cdots\cdots$

$=C_3^{100}=161700$

【範例 8】巴斯卡定理

試求 $C_4^6+C_5^7+C_6^8+\cdots+C_{47}^{49}$ 的值。

[解] $C_4^6+C_5^7+C_6^8+\cdots+C_{47}^{49}$

$$=C_3^6+C_4^6+C_5^7+C_6^8+\cdots+C_{47}^{49}-C_3^6$$

$$=C_4^7+C_5^7+C_6^8+\cdots+C_{47}^{49}-C_3^6$$

$$=C_5^8+C_6^8+\cdots+C_{47}^{49}-C_3^6$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=C_{47}^{50}-C_3^6=C_3^{50}-20=19580$$

【範例 9】分組分堆問題

將 9 位學生依下列方式分成三組，試分別求其方法數：

(1) 分成 4 人、3 人、2 人三組。

(2) 分成 4 人、3 人、2 人三組，住進 A, B, C 三個房間。

(3) 平分成三組，每組 3 人。

[解]

(1) 所求有 $C_4^9\times C_3^5\times C_2^2=1260$（種）

(2) ① 先將這 9 人分成 4 人、3 人、2 人三組

② 再將這三組排進 A, B, C 三個房間

$\Rightarrow$ 所求有 $\underbrace{(C_4^9\times C_3^5\times C_2^2)}\times\underset{②}{3!}$

$=1260\times 6=7560$（種）

(3) 所求有 $C_3^9\times C_3^6\times C_3^3\times\dfrac{1}{3!}=280$（種）

【範例 10】分組分堆問題

將 9 位學生依下列方式分成三組，試分別求其方法數：
(1) 平分成三組，每組 3 人，住進 A, B, C 三個房間。
(2) 分成 5 人、2 人、2 人三組。
(3) 分成 5 人、2 人、2 人三組，住進 A, B, C 三個房間。

[解]

(1) ① 先將這 9 人平分成三組
② 再將這三組排進 A, B, C 三個房間

$$\Rightarrow \text{所求有} \underbrace{\left(C_3^9 \times C_3^6 \times C_3^3 \times \frac{1}{3!}\right)}_{①} \times \underset{②}{3!}$$

$$= 280 \times 6 = 1680 \text{（種）}$$

(2) 所求有 $C_5^9 \times C_2^4 \times C_2^2 \times \dfrac{1}{2!} = 378$（種）

(3) ① 先將這 9 人分成 5 人、2 人、2 人三組
② 再將這三組排進 A, B, C 三個房間

$$\Rightarrow \text{所求有} \underbrace{\left(C_5^9 \times C_2^4 \times C_2^2 \times \frac{1}{2!}\right)}_{①} \times \underset{②}{3!} = 378 \times 6 = 2268 \text{（種）}$$

NOTE

【範例 11】分組分堆問題

從 mathematical 一字的 12 個字母中任取 4 個，試求：
(1) 其組合數為多少？
(2) 若取出 4 個字母後排成一列，則其排列數為多少？

解題關鍵：考慮取出 4 個字母的異同，共有 4 種情形：
①3 同 1 異；②2 同 2 同；③2 同 2 異；④4 異。

[解]

mathematical 一字中，有 3 個 a、2 個 m 與 2 個 t、1 個 h、1 個 e、1 個 i、1 個 c 與 1 個 l。考慮取出 4 個字母的異同，共有 4 種情形：①3 同 1 異；②2 同 2 同；③2 同 2 異；④4 異

①3 同 1 異：

組合數為 $\underset{3\text{同}}{C_1^1}\times\underset{1\text{異}}{C_1^7}=7$　　排列數為 $7\times\dfrac{4!}{3!1!}=28$

②2 同 2 同：

組合數為 $C_2^3=3$　　排列數為 $3\times\dfrac{4!}{2!2!}=18$

③2 同 2 異：

組合數為 $\underset{2\text{同}}{C_1^3}\times\underset{2\text{異}}{C_2^7}=63$　　排列數為 $63\times\dfrac{4!}{2!1!1!}=756$

④4 異：

組合數為 $C_4^8=70$　　排列數為 $70\times4!=1680$

(1) 所求組合數為 $7+3+63+70=143$

(2) 所求排列數為 $28+18+756+1680=2482$

【範例 12】撲克牌問題

一副撲克牌有 52 張（4 種花色，每種花色有 13 個點數），試求下列各取法有幾種？

(1) 任取 3 張。

(2) 任取 3 張，此 3 張點數相同。

(3) 任取 3 張，此 3 張花色相同。

[解]

(1) 所求有 $C_3^{52}=22100$（種）

(2) 所求有 $\underbrace{C_1^{13}}_{\text{先從13種點數中選1種}} \times \underbrace{C_3^{4}}_{\text{再從此種點數中的4張選3張}} = 52$（種）

(3) 所求有 $\underbrace{C_1^{4}}_{\text{先從4種花色中選1種}} \times \underbrace{C_3^{13}}_{\text{再從此種花色中的13張選3張}} = 1144$（種）

【範例 13】撲克牌問題

承例題 12，從此副撲克牌中任取 5 張，試求

(1) 這 5 張形成「Full house」牌型（三張同點數，另二張同點數，形如 AAA77 的牌型）的情況有幾種？

(2) 這 5 張形成「Two pairs」牌型（二張同點數，另二張也同點

數，但與第一對不同，單張不成對的牌之點數也與前兩對不同，形如 AA77K 的牌型）的情況有幾種？

[解]

(1) 所求有 $\underbrace{(C_1^{13}\times C_3^{4})}_{\text{先從13種點數中選1種，再從此種點數中4張選3張}} \times \underbrace{(C_1^{12}\times C_2^{4})}_{\text{先從12種點數中選1種，再從此種點數中4張選2張}}$

$=52\times 72=3744$（種）

(2) 所求有 $\underbrace{(C_2^{13}\times C_2^{4}\times C_2^{4})}_{\text{先從13種點數中選2種，再從此2種點數中各選2張}} \times \underbrace{(C_1^{11}\times C_1^{4})}_{\text{先從11種點數中選1種，再從此種點數中4張選1張}}$

$=2808\times 44=123552$（種）

主題 2 二項式定理

1. 對任意正整數 n，

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} y + C_2^n x^{n-2} y^2 + \cdots + C_{n-1}^n x y^{n-1} + C_n^n y^n$$

$$= C_n^n x^n + C_{n-1}^n x^{n-1} y + C_{n-2}^n x^{n-2} y^2 + \cdots + C_1^n x y^{n-1} + C_0^n y^n$$

其中 $(x+y)^n$ 展開式中一般項 $x^k y^{n-k}$ 的係數為 $C_{n-k}^n = C_k^n$ 。

【範例 1】二項式定理

試利用二項式定理展開

(1) $(3x+2y)^3$ (2) $(2x-3y)^4$

[解]

(1) $(3x+2y)^3$

$$= C_0^3(3x)^3 + C_1^3(3x)^2(2y) + C_2^3(3x)(2y)^2 + C_3^3(2y)^3$$

$$= 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$$

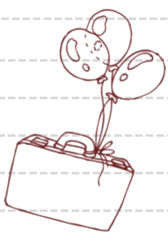
(2) $(2x-3y)^4$

$$= C_0^4(2x)^4 + C_1^4(2x)^3(-3y) + C_2^4(2x)^2(-3y)^2$$

$$+ C_3^4(2x)(-3y)^3 + C_4^4(2y)^4$$

$$= 16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4$$

NOTE



【範例 2】二項式定理

(1) 試利用二項式定理展開$(2x^2+\dfrac{3}{x})^4$。

(2) $(2x^2+\dfrac{3}{x})^5$的展開式中，x^4項的係數為何？

[解]

(1) $(2x^2+\dfrac{3}{x})^4$

$$=C_0^4(2x^2)^4+C_1^4(2x^2)^3(\frac{3}{x})+C_2^4(2x^2)^2(\frac{3}{x})^2$$

$$+C_3^4(2x^2)(\frac{3}{x})^3+C_4^4(\frac{3}{x})^4$$

$$=16x^8+96x^5+216x^2+\frac{216}{x}+\frac{81}{x^4}$$

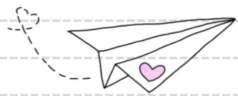
(2) $(2x^2+\dfrac{3}{x})^5$展開式的一般項為

$$C_k^5(2x^2)^{5-k}(\frac{3}{x})^k=C_k^5 2^{5-k}3^k x^{10-3k}$$

令$10-3k=4\Rightarrow k=2$

$\therefore$所求$=C_2^5\cdot 2^3\cdot 3^2=720$

NOTE



【範例 3】二項式定理

試求 $(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{10}$ 展開式中 x^3 項的係數。

解題關鍵：

(1) $(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{10}$

$$=\frac{(1+x)[(1+x)^{10}-1]}{(1+x)-1}$$

(2) $(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{10}$ 展開式中

x^3 項的係數 $=(1+x)^{11}$ 展開式中 x^4 項的係數

[解]

$\because (1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{10}$

$$=\frac{(1+x)[(1+x)^{10}-1]}{(1+x)-1}=\frac{(1+x)^{11}-1}{x}$$

$\therefore$ 所求 x^3 項的係數即 $\dfrac{(1+x)^{11}-1}{x}$ 的分子 $(1+x)^{11}-1$ 展開式中 x^4 項的係數 $=C_4^{11}=330$

【範例 4】二項式定理

試證明：$C_0^n+C_1^n+C_2^n+\cdots+C_n^n=2^n$。

將 $x=y=1$ 代入

$(x+y)^n=C_0^n x^n+C_1^n x^{n-1}y+C_2^n x^{n-2}y^2+\cdots+C_{n-1}^n xy^{n-1}+C_n^n y^n$

得 $(1+1)^n=C_0^n+C_1^n+C_2^n+\cdots+C_n^n$

$\therefore C_0^n+C_1^n+C_2^n+\cdots+C_n^n=2^n$

【範例 5】二項式定理

試證明：$C_0^n + C_2^n + C_4^n + \cdots + C_{2k}^n + \cdots$
$= C_1^n + C_3^n + C_5^n + \cdots + C_{2k+1}^n + \cdots = 2^{n-1}$ 。

將 $x=1$，$y=-1$ 代入

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} y + C_2^n x^{n-2} y^2 + \cdots + C_{n-1}^n x y^{n-1} + C_n^n y^n$$

得 $(1-1)^n = C_0^n - C_1^n + C_2^n - C_3^n + C_4^n - C_5^n \cdots$
$\qquad + C_{2k}^n - C_{2k+1}^n + \cdots$

$$\Rightarrow C_0^n - C_1^n + C_2^n - C_3^n + C_4^n - C_5^n \cdots + C_{2k}^n - C_{2k+1}^n + \cdots = 0$$

$$\Rightarrow C_0^n + C_2^n + C_4^n + \cdots + C_{2k}^n + \cdots = C_1^n + C_3^n + C_5^n + \cdots + C_{2k+1}^n + \cdots$$

$$= \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$$

【範例 6】二項式定理

試求 $C_0^6 - 2C_1^6 + 4C_2^6 - 8C_3^6 + 16C_4^6 - 32C_5^6 + 64C_6^6$ 的值。

原式 $= C_0^6 1^6 + C_1^6 1^5 \cdot (-2) + C_2^6 1^4 \cdot (-2)^2 + C_3^6 1^3 \cdot (-2)^3$
$\qquad + C_4^6 1^2 \cdot (-2)^4 + C_5^6 1 \cdot (-2)^5 + C_6^6 (-2)^6$
$\qquad = (1-2)^6 = 1$

NOTE

【範例 7】二項式定理

試求 $C_0^5+\frac{C_1^5}{2}+\frac{C_2^5}{4}+\frac{C_3^5}{8}+\frac{C_4^5}{16}+\frac{C_5^5}{32}$ 的值。

原式 $=C_0^5+\frac{C_1^5}{2}+\frac{C_2^5}{4}+\frac{C_3^5}{8}+\frac{C_4^5}{16}+\frac{C_5^5}{32}$

$$=C_0^5 1^5+C_1^5 1^4\cdot(\frac{1}{2})+C_2^5 1^3\cdot(\frac{1}{2})^2+C_3^5 1^2\cdot(\frac{1}{2})^3$$

$$+C_4^5 1\cdot(\frac{1}{2})^4+C_5^5(\frac{1}{2})^5$$

$$=(1+\frac{1}{2})^5=\frac{243}{32}$$

【範例 8】二項式定理

設 n 為正整數，若 $C_0^n-\frac{C_1^n}{2}+\frac{C_2^n}{4}-\frac{C_3^n}{8}+\cdots+(-1)^n\frac{C_n^n}{2^n}<\frac{1}{1000}$，則 n 的最小值為______。

$$C_0^n-\frac{C_1^n}{2}+\frac{C_2^n}{4}-\frac{C_3^n}{8}+\cdots+(-1)^n\frac{C_n^n}{2^n}<\frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow(1-\frac{1}{2})^n<\frac{1}{1000}\Rightarrow(\frac{1}{2})^n<\frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow 2^n>1000\Rightarrow n\geq 10$$

$\therefore n$ 的最小值為 10

【範例 9】二項式定理的應用

試求 $(1.02)^{10}$ 的近似值，四捨五入到小數點後第二位。

$$
\begin{aligned}
(1.02)^{10} &= (1+0.02)^{10} \\
&= C_0^{10}1^{10} + C_1^{10}1^9(0.02)^1 + C_2^{10}1^8(0.02)^2 + \cdots + C_{10}^{10}(0.02)^{10} \\
&\approx 1 + 10\times 0.02 + 45\times 0.0004 = 1.218 \\
&\approx 1.22
\end{aligned}
$$

【範例 10】二項式定理的應用

試求 $(0.99)^{10}$ 的近似值，四捨五入到小數點後第三位。

$$
\begin{aligned}
(0.99)^{10} &= (1-0.01)^{10} \\
&= C_0^{10}1^{10} + C_1^{10}1^9(-0.01)^1 + C_2^{10}1^8(-0.01)^2 \\
&\quad + C_3^{10}1^7(-0.01)^3 + \cdots + C_{10}^{10}(-0.01)^{10} \\
&\approx 1 - 10\times 0.01 + 45\times 0.0001 - 120\times 0.000001 \\
&= 0.90438 \\
&\approx 0.904
\end{aligned}
$$

【範例 11】二項式定理的應用

試求 11^{25} 除以 100 的餘數。

$\because 11^{25} = (10+1)^{25}$

$= C_0^{25}10^0 + C_1^{25}10^1 + C_2^{25}10^2 + \cdots + C_{24}^{25}10^{24} + C_{25}^{25}10^{25}$

$= 1 + 250 + 100(C_2^{25} + \cdots + C_{24}^{25}10^{22} + C_{25}^{25}10^{23})$

$\therefore 11^{25}$ 除以 100 所得的餘數與 251 除以 100 所得的餘數相同

故所求 $=51$

【範例 12】二項式定理的應用

試求 9^{100} 除以 100 的餘數。

$\because\ 9^{100}=(10-1)^{100}$

$=C_0^{100}10^0(-1)^{100}+C_1^{100}10^1(-1)^{99}+C_2^{100}10^2(-1)^{98}$

$\quad+\cdots+C_{99}^{100}10^{99}(-1)+C_{100}^{100}10^{100}$

$=1+100(-10+C_2^{100}-\cdots-C_{99}^{100}10^{97}+C_{100}^{100}10^{98})$

$\therefore\ 9^{100}$ 除以 100 所得的餘數為 1

【範例 13】二項式定理的應用

試求 $x^{40}+x+1$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式。

$\because\ x^{40}=[(x-1)+1]^4$

$=C_0^{40}(x-1)^0+C_1^{40}(x-1)^1+C_2^{40}(x-1)^2+\cdots+C_{40}^{40}(x-1)^{40}$

$=C_0^{40}+C_1^{40}(x-1)+(x-1)^2[C_2^{40}+\cdots+C_{40}^{40}(x-1)^{38}]$

$\therefore\ x^{40}+x+1$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式

$=C_0^{40}+C_1^{40}(x-1)+x+1$

$=1+40(x-1)+x+1=41x-38$

NOTE

【範例 14】二項式定理的應用

試求 $(x^2+3x+4)^3$ 除以 x^2+2x+5 的餘式。

$\because (x^2+3x+4)^3=[(x^2+2x+5)+(x-1)]^3$

$=C_0^3(x^2+2x+5)^0(x-1)^3+C_1^3(x^2+2x+5)(x-1)^2$

$\quad +C_2^3(x^2+2x+5)^2(x-1)+C_3^3(x^2+2x+5)^3(x-1)^0$

$=(x^2+2x+5)[C_1^3(x-1)^2+C_2^3(x^2+2x+5)(x-1)$

$\quad +C_3^3(x^2+2x+5)^2(x-1)^0]+(x-1)^3$

$\therefore (x^2+3x+4)^3$ 除以 x^2+2x+5 的餘式

$=(x-1)^3$ 除以 x^2+2x+5 的餘式

又 $(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$

$=(x^2+2x+5)(x-5)+8x+24$

故所求 $=8x+24$

NOTE