B2-09 排 列【基礎篇】

主題 1　完全相異物的直線排列

1. 階乘

n 為正整數，定義【$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$】，
其中 $n!$ 讀作【n 階乘】。規定【$0!=1$】。

例如：$3!=3\times2\times1=6$，$2!=2\times1=2$，$1!=1$。

2. 【n 個相異物(全取)】的【直線排列】

將 n 個相異物排成一列的方法數為【$n!$】

【$n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times1=n!$】。

3. 【n 個相異物取 r 個】做【直線排列】

將 n 個相異物取 r 個（$0\le r\le n$）排成一列的方法數為

$$【P_r^n=\underbrace{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1)}_{r\text{ 個連續正整數(從 }n\text{ 開始遞減)}}=\frac{n!}{(n-r)!}】。$$

【範例 1】$n!$ 與 P_r^n

試計算下列各式的值：

(1) $7!$。　(2) $6!$。　(3) P_4^6。　(4) P_6^6。

(1) $7!=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040$

(2) $6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$

(3) $P_4^6=6\times5\times4\times3=360$

(4) $P_6^6=6\times5\times4\times3\times2\times1=6!=720$

【範例 2】$n!$ 與 P_r^n

(1) 若 $P_n^9-6P_{n-2}^9=0$，則 n 的值為何？

(2) 若 $P_3^n=8P_2^n$，則 n 的值為何？

(1) $P_n^9-6P_{n-2}^9=0$

$$\Rightarrow \frac{9!}{(9-n)!}-6\times\frac{9!}{[9-(n-2)]!}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(9-n)!}-\frac{6}{(11-n)!}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1}-\frac{6}{(11-n)\times(10-n)}=0$$

$$\Rightarrow (11-n)\times(10-n)=6$$

$$\Rightarrow n^2-21n+104=0$$

$$\Rightarrow (n-8)(n-13)=0$$

$\Rightarrow n=8$ 或 13（不合），$\therefore n=8$

(2) $P_3^n=8P_2^n$

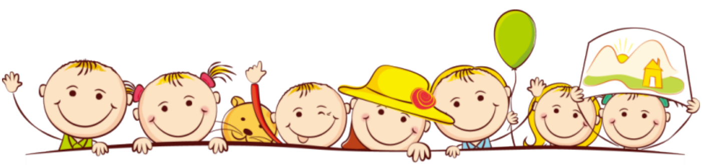
$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!}=8\times\frac{n!}{(n-2)!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n-3)!}=\frac{8}{(n-2)!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1}=\frac{8}{n-2}$$

$$\Rightarrow n-2=8$$

$$\Rightarrow n=10$$



【範例 3】完全相異物的直線排

從 1, 2, 3, 4, 5 這 5 個數字中任選相異 4 個數字排成一列會得到一個四位數，試求：

(1) 共可排出幾個四位數。

(2) 將所有排出的四位數從小到大排列後，第 50 個數。

(1) 所求 $=P_4^5=5\times4\times3\times2=120$（個）

(2) ① 千位數為1者，有 $P_3^4=24$ 個

② 千位數為2者，有 $P_3^4=24$ 個

第49個數為3124，第50個數為3125

【範例 4】有條件的完全相異物直線排列

4 男 4 女共 8 人排成一列，試求：

(1) 共有幾種排法。

(2) 4 個女生要排在一起的方法有幾種。

(3) 4 個女生中，任兩人不相鄰的方法有幾種。

(4) 男女相間隔的排法有幾種。

(1) 所求 $=8!=40320$（種）

(2) 男男男男$\boxed{\text{女女女女}}$

$$\text{所求}=\underbrace{5!}_{\boxed{\text{女女女女}}\text{與4男排列}}\times\underbrace{4!}_{\text{4女互換}}=120\times24=2880\text{（種）}$$

(3) ①男②男③男④男⑤

$$\text{所求}=\underbrace{4!}_{\text{先排4男}}\times\underbrace{P_4^5}_{\text{4女排入4男隔出的5個間隔中的4個}}=24\times120=2880\text{（種）}$$

(4) 男女男女男女男女　　女男女男女男女男

$$\text{所求}=\underbrace{4!}_{\text{4男排列}}\times\underbrace{4!}_{\text{4女排列}}+\underbrace{4!}_{\text{4女排列}}\times\underbrace{4!}_{\text{4男排列}}$$

$=24\times24+24\times24=1152$（種）

【範例 5】有條件的完全相異物直線排列

甲、乙、丙、丁、戊、己 6 個人排成一列，試求下列各小題的方法數：

(1) 任意排列。

(2) 甲、乙必須相鄰。　(3) 甲、乙必須分開。

(4) 甲排在首位。　(5) 甲不排在首位。

(1) 所求 $=6!=720$（種）

(2) $\boxed{\text{甲乙}}$丙丁戊己

所求 $=\underbrace{5!}_{\boxed{\text{甲乙}}\text{與丙丁戊己排列}}\times\underbrace{2!}_{\text{甲乙兩人可互換位置}}=120\times2=240$（種）

(3) 所求 $=6$ 人任意排列 $-$ 甲乙相鄰

$=720-240=480$（種）

（另解）①丙②丁③戊④己⑤

所求 $=\underbrace{4!}_{\text{先排丙丁戊己}}\times\underbrace{P_2^5}_{\text{甲乙再排入丙丁戊己隔出的其中2個間隔}}$

$=24\times20=480$（種）

(4) 所求 $=\underbrace{1}_{\text{甲排在第一位}}\times\underbrace{5!}_{\text{乙丙丁戊己任意排列}}=120$（種）

(5) 所求 $=6$ 人任意排列 $-$ 甲排在首位

$=720-120=600$（種）

NOTE

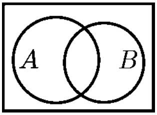
【範例 6】有條件的完全相異物直線排列

同上題：

(1) 甲不排首位且乙不排第二位。

(2) 甲不排首位、乙不排第二位、丙不排第三位。

令 A, B, C 分別表示甲排首位、乙排第二位、丙排第三位的集合

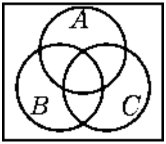


(1) 所求 $= n(A' \cap B') = n((A \cup B)')$

$= 720 - n(A \cup B)$

$= 720 - [n(A) + n(B) - n(A \cap B)]$

$= 720 - [5! + 5! - 4!] = 504$（種）



(2) 所求 $= n(A' \cap B' \cap C')$

$= n((A \cup B \cup C)')$

$= 720 - n(A \cup B \cup C)$

$= 720 - [n(A) + n(B) + n(C)$

$-n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$

$+n(A \cap B \cap C)]$

$= 720 - [5! \times 3 - 4! \times 3 + 3!] = 426$（種）

NOTE

主題 2　有相同物的直線排列

1. 有相同物的直線排列方法數

若 n 個物品，可以分成 k 類，各類皆為相同物，其中第 1 類物品有 n_1 個、第 2 類物品有 n_2 個、…、第 k 類物品有 n_k 個，$n=n_1+n_2+\cdots+n_k$，則此 n 個物品排成一列的方法數為

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}。$$

【範例 1】含相同物的直線排列

投擲一顆公正的骰子 7 次，其中 3 次 1 點、2 次 3 點、2 次 5 點的情形可能有幾種？

即「3 個 1、2 個 3、2 個 5」的排列數

$$所求=\frac{7!}{3!2!2!}=\frac{7\times6\times5\times4}{2!2!}=210\text{（種）}$$

【範例 2】含相同物的直線排列

3 個相同的蘋果、4 個相同的梨子

(1) 全部分給 7 人，每人最多分得 1 個，共有幾種分法。

(2) 全部分給 9 人，每人最多分得 1 個，共有幾種分法。

(1) 所求可視為 3 個相同的蘋果、4 個相同的梨子排成一列

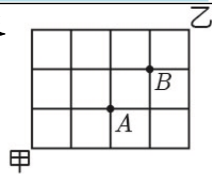
$$所求=\frac{7!}{4!3!}=\frac{7\times6\times5}{3!}=35$$

(2) 所求可視為 3 個相同的蘋果、4 個相同的梨子、2 個「沒分到」排成一列

$$所求=\frac{9!}{4!3!2!}=\frac{9\times8\times7\times6\times5}{3!2!}=1260\text{（種）}$$

【範例 3】最短路徑（捷徑）問題

如圖，有一棋盤式街道圖，若由甲走到乙，試求



(1) 共有幾種最短路徑。

(2) 經過 A 點的最短路徑有幾種。

(3) 經過 A 點或經過 B 點的最短路徑有幾種。

(1) 由甲走到乙地最短路徑與「$\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\uparrow$」的排列結果有一一對應關係

因此，所求$=\dfrac{7!}{4!3!}=35$（種）

(2) 所求$=\underbrace{\dfrac{3!}{2!1!}}_{\text{從甲走最短路徑到}A}\times\underbrace{\dfrac{4!}{2!2!}}_{\text{從}A\text{走最短路徑到乙}}=3\times6=18$（種）

(3) 經過 B 點的最短路徑有

$$\underbrace{\frac{5!}{3!2!}}_{\text{從甲走最短路徑到}B}\times\underbrace{\frac{2!}{1!1!}}_{\text{從}B\text{走最短路徑到乙}}=20\text{（種）}$$

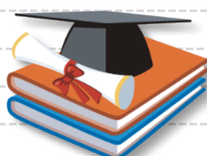
經過 A 點且經過 B 點的最短路徑有

$$\underbrace{\frac{3!}{2!1!}}_{\text{從甲走最短路徑到}A}\times\underbrace{\frac{2!}{1!1!}}_{\text{從}A\text{走最短路徑到}B}\times\underbrace{\frac{2!}{1!1!}}_{\text{從}B\text{走最短路徑到乙}}=3\times2\times2=12\text{（種）}$$

$\therefore$ 所求＝經過 A＋經過 B－經過 A 且經過 B

$=18+20-12=26$（種）

NOTE



【範例 4】爬梯、警報問題

一樓梯共有 10 階，今有一人登樓，若規定每一步只能跨一階或跨二階，試求此人上樓的情形共有幾種。

設此人一階跨了 x 步、二階跨了 y 步

則 $x+2y=10$

x	0	2	4	6	8	10
y	5	4	3	2	1	0
方法數	1	$\dfrac{6!}{2!4!}=15$	$\dfrac{7!}{4!3!}=35$	$\dfrac{8!}{6!2!}=28$	$\dfrac{9!}{8!1!}=9$	1

所求 $=1+15+35+28+9+1=89$（種）

【範例 5】爬梯、警報問題

已知警報器長鳴一次需 3 秒，短鳴一次需 1 秒，每兩鳴聲之間停 2 秒。若總鳴放時間為 30 秒，試求共可發出幾種警報信號。

設長鳴 x 次，短鳴 y 次

$\Rightarrow$ 共有 $(x+y-1)$ 次停頓（間隔）

則 $3x+y+2(x+y-1)=30$

$\Rightarrow 5x+3y=32$

所求 $=70+10=80$（種）

x	4	1
y	4	9
方法數	$\dfrac{8!}{4!4!}=70$	$\dfrac{10!}{1!9!}=10$

【範例 6】次序不變的直線排列

甲、乙、丙、丁、戊、己、庚共 7 人排成一列，試求下列各小題之排列數：

(1) 甲排在乙的前面。

(2) 甲乙丙都在丁的前面。

(3) 甲、丙在戊的前面，庚在乙的後面。

(1) ①先排□□丙丁戊己庚，有 $\dfrac{7!}{2!}=2520$ 種

② 再將甲乙排入□□中，有 1 種

$\therefore$ 所求 $=2520\times1=2520$（種）

(2) ① 先排□□□□戊己庚，有 $\dfrac{7!}{4!}=210$ 種

② 再將甲乙丙丁排入□□□□中，

有 $\underset{\substack{\text{甲乙丙}\\\text{互換}}}{3!}=6$ 種

$\therefore$ 所求 $=210\times6=1260$（種）

(3) ① 先排□□□○○丁己，有 $\dfrac{7!}{3!2!}=420$ 種

② 再將甲丙戊排入□□□中，有 $\underset{\substack{\text{甲丙}\\\text{互換}}}{2!}=2$ 種

③ 最後將乙庚排入○○中，有 1 種

$\therefore$ 所求 $=420\times2\times1=840$（種）

NOTE

主題 3　重複排列

1. 重複排列

　從 n 種相異物中，依序取出 r 個排成一列，物品可重複出現，共有 $n\times n\times\cdots\times n=n^r$ 種排法。

【範例 1】重複排列

(1) 將 6 封不同的信任意投入 4 個不同的郵筒，試求共有幾種方法。

(2) 有 3 種不同的酒，倒入 5 個不同的酒杯中，每個酒杯都要倒酒，而且只可盛入一種酒，試求共有幾種方法。

(1) $\because$ 每封信都有 4 個郵筒可選擇投入

　$\therefore$ 所求 $=4^6=4096$（種）

(2) $\because$ 每個酒杯都有 3 種酒可以選擇

　$\therefore$ 所求 $=3^5=243$（種）

【範例 2】分配問題

將 4 本不同的書全部分給甲、乙、丙、丁、戊 5 個人，每人可兼得或不得，試求下列各小題的方法數：

(1) 任意分。

(2) 甲恰好分得 1 本。

(1) $\because$ 每本書均有 5 個人可選擇給予

　$\therefore$ 所求 $=5^4=625$（種）

(2) 所求 $=\underbrace{4}_{\text{甲先選1本}}\times\underbrace{4^3}_{\substack{\text{剩下3本任意}\\ \text{分給乙丙丁戊}}}=256$（種）

【範例 3】分配問題

將 4 本不同的書全部分給甲、乙、丙、丁、戊 5 個人，每人可兼得或不得，試求下列各小題的方法數：
(1) 甲至少分得 1 本。
(2) 甲、乙兩人都至少分得 1 本。

(1) 所求＝任意分－甲未分得

$=5^4-4^4$

$=625-256=369$（種）

(2) 所求＝任意分－(甲未分得或乙未分得)

$=5^4-$(甲未分得＋乙未分得－甲乙均未分得)

$=5^4-(4^4+4^4-3^4)$

$=625-256\times 2+81=194$（種）

【範例 4】渡船問題

有不同的渡船 3 艘，每艘船最多可載 5 個人。
(1) 今有 5 個人同時過渡，試求有幾種安全過渡的方法。
(2) 今有 6 個人同時過渡，試求有幾種安全過渡的方法。
(3) 今有 7 個人同時過渡，試求有幾種安全過渡的方法。

(1) ∵每個人都有 3 艘船可選擇搭乘

∴所求$=3^5=243$（種）

(2) 所求＝6 人任意搭乘－6 人同搭一船

$=3^6-3=726$（種）

(3) 所求＝7 人任意搭乘－7 人同搭一船－6 人同搭一船

$=3^7-3-(\underset{\text{7人選1人}}{7}\times\underset{\text{此人選1船搭乘}}{3})\times\underset{\text{其餘6人再選1船搭乘}}{2}$

$=2187-3-42=2142$（種）