

主題 1 基礎邏輯

1. 敘述

- (1) 語意完整，能夠以一致標準【判斷出對錯】的語句，稱為【敘述】。
- (2) 對於敘述正確與否，在邏輯裡面會用【真、假】來形容。

敘述(P)		真假值
甲	$2+3>5$	F
乙	11為偶數	F
丙	三角形兩邊和大於第三邊	T
丁	教室裡至多有10個人	NO

2. 否定敘述

- (1) 若要否定一個敘述 P ，我們會用它的否定敘述，以【 $\sim P$ 】表示，念成【非 P 】。
- (2) 當敘述【 P 為真時，則 $\sim P$ 為假】；反之，當敘述【 P 為假時，則 $\sim P$ 為真】。

否定敘述($\sim P$)		真假值
甲	$2+3$ 【 \leq 】5	T
乙	11【不為】偶數 11為【奇數】	T
丙	三角形兩邊和【不大於】第三邊 三角形兩邊和【 \leq 】第三邊	F
丁	教室裡【至少】有【11】個人	NO

結論：【敘述之真值表】 P 與 $\sim P$ 必為一真一假

P	$\sim P$
T	F
F	T

3. 複合敘述

(1) 有時我們會將多個敘述合併成一個敘述，稱為【複合敘述】。常用的方式是將兩個敘述利用【且】或者【或】連接。

(2) 複合敘述「 P 且 Q 」與「 P 或 Q 」的真假判定：

當兩個敘述 P 和 Q 均為真時，「 P 且 Q 」為真；

反之，當「 P 且 Q 」為真時，則 P 和 Q 均為真。

② 當兩個敘述 P 和 Q 中至少有一為真時，「 P 或 Q 」為真；

反之，當「 P 或 Q 」為真時，則 P 和 Q 中至少有一為真。

複合敘述(\vee 、 \wedge)真值表

P	Q	$P\vee Q$	$P\wedge Q$
T	T	T	T
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	F

(3) 複合敘述的否定：

「 P 且 Q 」的否定敘述為「 $\sim P$ 或 $\sim Q$ 」。

$\sim(P\wedge Q)\equiv(\sim P)\vee(\sim Q)$

② 「 P 或 Q 」的否定敘述為「 $\sim P$ 且 $\sim Q$ 」。

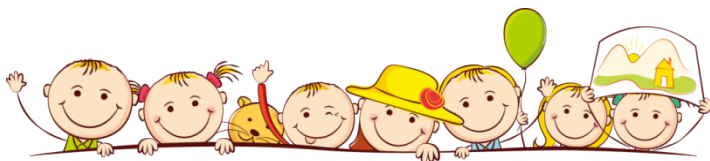
$\sim(P\vee Q)\equiv(\sim P)\wedge(\sim Q)$



4. 命題

- (1) 在數學上，當語句以「若 P 則 Q 」的形式出現時，這種語句稱為命題。其中 P 稱為【前提】， Q 稱為【結論】。並以符號【 $P \Rightarrow Q$ 】表示「若 P 則 Q 」。
- (2) 當 $P \Rightarrow Q$ 成立時，我們稱 P 為 Q 的【充分條件】，而 Q 為 P 的【必要條件】。
若 $Q \Rightarrow P$ 也同時成立，則 P 也是 Q 的必要條件，我們稱 P 是 Q 的【充要條件】，此時， Q 當然也是 P 的充要條件，以符號【 $P \Leftrightarrow Q$ 】表示。
- (3) 當 A 和 B 兩個命題【同時為真】且【同時為假】，稱它們【等價】，並以【 $A \equiv B$ 】表示。
例如：若令敘述 P 表「 $x^2 = 1$ 」， Q 表「 $x = \pm 1$ 」，則命題 A ：「 $P \Rightarrow Q$ 」與 B ：「 $Q \Rightarrow P$ 」【同時為真】，這兩個命題是【等價】的。
- (4) $P \Rightarrow Q$ 和 $Q \Rightarrow P$ 不等價。
② $P \Rightarrow Q$ 和 $(\sim P) \Rightarrow (\sim Q)$ 不等價。
③ $P \Rightarrow Q$ 和 $(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$ 等價。

P	Q	原命題 $P \Rightarrow Q$	$\sim Q$	$\sim P$	逆否命題 $\sim Q \Rightarrow \sim P$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T



【範例 1】敘述真假的判斷

試判斷下列各敘述的真假：

- (1) 2 是奇數。
- (2) 三角形的內角和為 180 度。
- (3) 33 是 3 的倍數且 67 是 3 的倍數。
- (4) 3 大於或等於 0。

- (1) \because 2 是偶數
 \therefore 「2 是奇數」為假
- (2) 「三角形的內角和為 180 度」為真
- (3) \because 33 是 3 的倍數，67 不是 3 的倍數
 \therefore 「33 是 3 的倍數且 67 是 3 的倍數」為假
- (4) \because 3 大於 0
 \therefore 「3 大於或等於 0」為真

【範例 2】否定敘述

試寫出下列各敘述的否定敘述：

- (1) n 是 2 的倍數。
- (2) 本次期中考全班同學的數學成績都及格。
- (3) a 或 b 是質數。
- (4) $x \geq 5$ 。
- (5) $2 < x < 5$ 。

- (1) n 不是 2 的倍數
- (2) 本次期中考班上至少有一位同學的數學成績不及格
- (3) a 和 b 都不是質數
- (4) $x < 5$
- (5) $x \leq 2$ 或 $x \geq 5$

【範例 3】否定敘述

試寫出下列各敘述的否定敘述：

- (1) n 不是 3 的倍數。
- (2) 本次期中考班上至少有一位同學英文成績及格。
- (3) 阿三或小民說謊。
- (4) $x > 5$ 或 $x < -1$ 。
- (5) $1 \leq x \leq 3$ 。

- (1) n 是 3 的倍數
- (2) 本次期中考全班同學的英文成績都不及格
- (3) 阿三和小民都沒有說謊
- (4) $-1 \leq x \leq 5$
- (5) $x < 1$ 或 $x > 3$

【範例 4】條件的判斷

試就下列各題填上最適切的條件，其中

A ：充分， B ：必要， C ：充要， D ：非充分且非必要

- (1) 平行四邊形是菱形的____條件。
- (2) $a = 0$ 是 $ab = 0$ 的____條件。
- (3) $a > b$ 是 $a^2 > b^2$ 的____條件。
- (4) $a = b$ 是 $a^2 = b^2$ 的____條件。
- (5) $ab > 0$ 是 $\frac{a}{b} > 0$ 的____條件。
- (6) $ab \leq 0$ 是 $\frac{a}{b} \leq 0$ 的____條件。

- (1) B (2) A (3) D (4) A (5) C (6) B

主題 2 集合

1. 集合與元素

- (1) 由某些明確的對象所組成的群體，稱作【集合】。
組成集合的成員，稱為【元素】。一般而言，以小寫英文字母 a, b, c, \dots 表示元素，大寫英文字母 A, B, C, \dots 表示集合。
- (2) 當 a 是集合 S 的元素時，記為【 $a \in S$ 】，讀作 a 屬於 S ；當 b 不是集合 S 的元素時，記為【 $b \notin S$ 】，讀作 b 不屬於 S 。

2. 集合的表示法

- (1) 【列舉法】：當元素的個數不多，可將【所有元素】列出，並以逗號「,」分隔各元素，置於成對的大括號內。
例如：6 的正因數所形成的集合 $A = \{1, 2, 3, 6\}$ 。
- (2) 【描述法】：當元素的個數很多，不方便逐一系列出來，可以利用【元素的共同屬性】來描述，其形式為 $\{x \mid x \text{ 滿足性質 } P\}$ 。符合性質 P 的都是集合內的元素，不符合性質 P 的都不是集合內的元素。
例如：小於 100 的正偶數所成的集合 B ，可以表示為
$$B = \{x \mid x \text{ 為小於 } 100 \text{ 的正偶數}\}$$
$$= \{x \mid x = 2k, k = 1, 2, \dots, 50\}。$$

3. 集合的性質

- (1) 【互異性】：集合中的元素是互不相同的。
例如： $\{3, 3, 3\}$ 應寫成 $\{3\}$ 。
- (2) 【無序性】：集合中的元素沒有順序關係。
例如： $\{1, 2, 3\}$ 與 $\{2, 1, 3\}$ 是同一個集合。

4. 集合的元素個數

(1) 如果集合 S 內的元素個數為【有限個】時，稱該集合為有限集合，其元素個數以 $n(S)$ 表示。

例如：6 的正因數所形成的集合 A 有 4 個元素，
可記為 $n(A) = 4$ 。

(2) 若集合 S 內有【無限多個】元素，則稱 S 為無限集合。

例如：正整數所形成的集合就是無限集合。

5. 子集

(1) 若集合 A 內的【每一個元素】都屬於集合 B ，

就稱【 A 是 B 的子集】，記作

【 $A \subset B$ 】（讀作 A 包含於 B ）或

【 $B \supset A$ 】（讀作 B 包含 A ）。

註：因為集合 A 內的任一元素都屬於 A ，所以 $A \subseteq A$ 成立。

(2) 若集合 A 中存在一個元素 a 不為集合 B 的元素，那麼 A

就不是 B 的子集，記作【 $A \not\subset B$ 】，讀作 A 不包含於 B 。

6. 空集合

當集合內【沒有任何元素】時，稱為【空集合】，

用符號【 \emptyset 】表示，它是【任何集合的子集】。

7. 文氏圖

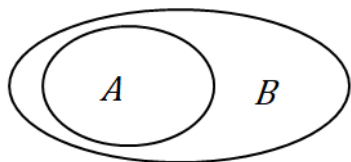
(1) 為了表示集合之間的關係，有種好用的工具，稱為

【文氏圖】，如圖（一）所示。

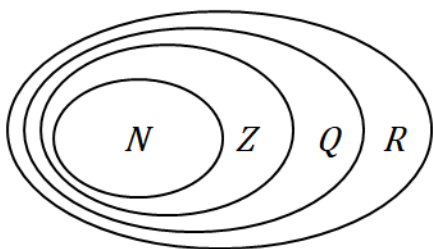
當 $A \subseteq B$ 時，我們用小圈表示集合 A ，大圈表示集合 B 。

圈的面積、形狀與集合大小無關，僅表示集合之間的關係。

- (2) 常見的無限集合有所有【正整數所成的集合 N 】、所有【整數所成的集合 Z 】、所有【有理數所成的集合 Q 】及所有【實數所成的集合 R 】，以上 4 個無限集合中，前者都是後者的子集，用文氏圖呈現【 $N \subset Z \subset Q \subset R$ 】的包含關係如圖（二）。



圖（一）



圖（二）

8. 集合的相等

- (1) 若 A, B 兩集合滿足【 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ 】，則稱這兩個集合相等，記為【 $A = B$ 】。

例如：集合 $A = \{1, 2, 2\}$ 、集合 $B = \{1, 2\}$ ，

A 中的元素 1, 2 皆屬於 B ，即 $A \subset B$ ；

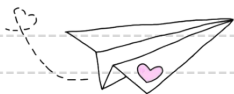
而 B 中的元素 1, 2 也都屬於 A ，即 $B \subset A$ ，

因此， $A = B$ ，即 $\{1, 2, 2\} = \{1, 2\}$ ，

且 $n(A) = n(B) = 2$ 。

- (2) 當兩個集合 A, B 不相等時，我們以【 $A \neq B$ 】表示。

NOTE



【範例 1】子集

- (1) 試寫出集合 $\{\{1\}, 1, 2\}$ 的所有子集。
(2) 已知集合 A 中有 5 個元素，試求集合 A 的子集共有幾個。

(1) $\{\{1\}, 1, 2\}$ 的子集有下列 8 個：

不含任何元素的子集： \emptyset

恰含 1 個元素的子集： $\{\{1\}\}, \{1\}, \{2\}$

恰含 2 個元素的子集： $\{\{1\}, 1\}, \{\{1\}, 2\}, \{1, 2\}$

恰含 3 個元素的子集： $\{\{1\}, 2, 3\}$

(2) 每個元素都可「選」或者「不選」為子集的元素 2 種情形
故所求 $= 2^5 = 32$ (個)

【範例 2】集合的相等

- (1) 設 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b-1, 2, 3\}$, 若 $A = B$, 試求序對 (a, b, c) 。
(2) 試求整數 x, y 的值, 使得 $\{2x, x+y\} = \{7, 4\}$ 。

(1) $\because A = B$ 且 $b \neq b-1 \quad \therefore b = 2$ 或 3

① 若 $b = 2$, 則 $A = \{a, 2, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

$\Rightarrow (a, c) = (1, 3)$ 或 $(3, 1)$

② 若 $b = 3$, 則 $A = \{a, 3, c\}$, $B = \{2, 2, 3\} = \{2, 3, 3\}$

$\Rightarrow (a, c) = (2, 2)$ 或 $(2, 3)$ 或 $(3, 2)$ 故序對

$(a, b, c) = (1, 2, 3)$ 或 $(3, 2, 1)$ 或 $(2, 3, 2)$ 或 $(2, 3, 3)$ 或 $(3, 3, 2)$

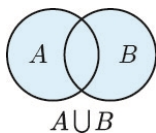
(2) $\because x$ 為整數 $\therefore 2x = 4 \Rightarrow x + y = 7$

$$\text{解} \begin{cases} 2x = 4 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad \text{得} \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

主題 3 集合的運算

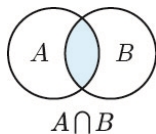
1. 聯集

由集合 A 和集合 B 的【所有元素】構成的集合，稱作 A 和 B 的【聯集】，用符號【 $A \cup B$ 】表示。
即 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 。



2. 交集

由集合 A 和集合 B 的【共同元素】構成的集合，稱作 A 和 B 的【交集】，用符號【 $A \cap B$ 】表示，
即 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 。

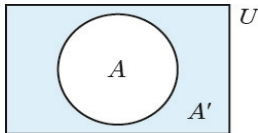


3. 宇集

在探討某些問題時，所涉及的集合往往是某個特定集合的子集，這個特定的集合就叫做【宇集】，通常用符號【 U 】表示。例如談到奇數或偶數時，考慮的範圍是所有整數，此時宇集就是所有的整數。

4. 補集

若 U 為宇集， $A \subset U$ ，則 U 中【不屬於 A 】的所有元素構成的集合，稱為 A 的【補集（或餘集）】，以【 A' 】表示，
即 $A' = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$ 。



5. 差集

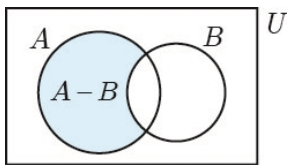
- (1) 考慮兩個集合 A 和 B ，所有屬於 A 卻不屬於 B 的元素所構成的集合，叫做 A 對 B 的差集，用符號【 $A-B$ 】表示，即

$$A-B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}。$$

因為 $x \notin B$ 就等於 $x \in B'$ ，所以

$A-B$ 也可以表示為

$$A-B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B'\} = A \cap B'。$$



- (2) 當宇集為 U 時， $U-A$ 就等於 A 的補集 A' 。

6. 笛摩根定理

若 A, B 為宇集 U 中的兩個集合，則：

(1) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ 。

(2) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ 。

【範例 1】聯集與交集

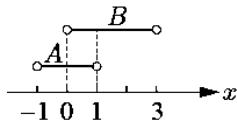
- (1) 設 $A = \{x \mid -1 < x < 1, x \in \mathbb{R}\}$ ， $B = \{x \mid 0 < x < 3, x \in \mathbb{R}\}$ ，試求 $A \cap B$ 與 $A \cup B$ 。

- (2) 設 $A = \{x \mid x > -3, x \in \mathbb{R}\}$ ， $B = \{x \mid x \leq 5, x \in \mathbb{R}\}$ ，試求 $A \cap B$ 與 $A \cup B$ 。

- (1) 由圖可知

$$A \cap B = \{x \mid 0 < x < 1, x \in \mathbb{R}\}$$

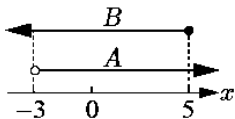
$$A \cup B = \{x \mid -1 < x < 3, x \in \mathbb{R}\}$$



- (2) 由圖可知

$$A \cap B = \{x \mid -3 < x \leq 5, x \in \mathbb{R}\}$$

$$A \cup B = \mathbb{R}$$



【範例 2】聯集與交集

設 a 為整數，已知 $A = \{2, 3, a^2 - 5a + 10\}$ ，
 $B = \{2a - 2, -5a + 13, -a + 6\}$ ，若 $A \cap B = \{3, 4\}$ ，
試求 a 的值與 $A \cup B$ 。

$$\because A \cap B \subset A$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2 - 5a + 10 = 4 &\Rightarrow a^2 - 5a + 6 = 0 \\ &\Rightarrow (a - 2)(a - 3) = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ 或 } 3 \end{aligned}$$

① 若 $a = 2$ ，則 $A = \{2, 3, 4\}$ ， $B = \{2, 3, 4\}$
 $\Rightarrow A \cap B = \{2, 3, 4\}$ 矛盾

$$\therefore a \neq 2$$

② 若 $a = 3$ ，則 $A = \{2, 3, 4\}$ ， $B = \{4, -2, 3\}$
 $\Rightarrow A \cap B = \{3, 4\}$
 $A \cup B = \{-2, 2, 3, 4\}$

【範例 3】聯集與交集

(1) 設 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 為字集， $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ，
試求 A' 。

(2) 設字集 $U = N$ (所有正整數構成的集合)， $A = \{2k \mid k \in N\}$ ，
試求 A' 。

(1) $A' = \{x \mid x \in U, x \notin A\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(2) $A = \{k \mid 2k, k \in N\}$ 為所有正偶數構成的集合
 $\Rightarrow A' = \{k \mid 2k - 1, k \in N\}$ 為所有正奇數構成的集合



【範例 4】補集與差集

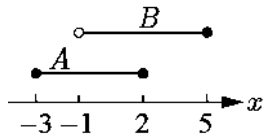
設 $U = R$ (所有實數構成的集合), $A = \{x | -3 \leq x \leq 2\}$,
 $B = \{x | -1 < x \leq 5\}$, 試求:

- (1) A' 。 (2) $A - B$ 。

由圖可知

(1) $A' = \{x | x > 2 \text{ 或 } x < -3, x \in R\}$

(2) $A - B = \{x | -3 \leq x \leq -1, x \in R\}$



【範例 5】補集與差集

設 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0, x \in R\}$, $B = \{x | x^2 + 4x - 12 = 0, x \in R\}$,
試求 $B - A$ 。

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ 或 } 1$$

$$\therefore A = \{1, 2\}$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x+6)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -6 \text{ 或 } 2$$

$$\therefore B = \{-6, 2\}$$

$$\text{故 } B - A = \{-6\}$$

NOTE



【範例 6】差集

已知 a 為整數， $A = \{5, 7, a^2 + 4a + 7\}$ ， $B = \{7, 3, 2\}$ ，且 $A - B = \{5\}$ ，試求實數 a 的值。

$$\because A - B = \{5\}$$

$$\therefore a^2 + 4a + 7 = 5 \text{ 或 } 7 \text{ 或 } 3 \text{ 或 } 2$$

$$\textcircled{1} \text{ 若 } a^2 + 4a + 7 = 5 \Rightarrow a^2 + 4a + 2 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = -2 \pm \sqrt{2} \text{ (不合)}$$

$$\textcircled{2} \text{ 若 } a^2 + 4a + 7 = 7 \Rightarrow a^2 + 4a = 0$$

$$\Rightarrow a(a + 4) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ 或 } -4$$

$$\textcircled{3} \text{ 若 } a^2 + 4a + 7 = 3 \Rightarrow a^2 + 4a + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (a + 2)^2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$\textcircled{4} \text{ 若 } a^2 + 4a + 7 = 2 \Rightarrow a^2 + 4a + 5 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} \text{ (不合)}$$

由①, ②, ③, ④可知 $a = 0$ 或 -2 或 -4

【範例 7】集合的運算

設 $A = \{1, 2, 3\}$ ， $B = \{2, 3, 4, 5\}$ ， $C = \{2, 5, 8\}$ ，試求：

(1) $A \cap (B \cup C)$ 。 (2) $(A \cap B) \cup C$ 。

$$(1) B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 8\}$$

$$\Rightarrow A \cap (B \cup C) = \{2, 3\}$$

$$(2) A \cap B = \{2, 3\}$$

$$\Rightarrow (A \cap B) \cup C = \{2, 3, 5, 8\}$$



【範例 8】笛摩根定理

設 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 1, x \in R\}$, $B = \{x \mid x \geq -1, x \in R\}$, 試求：

(1) $(A \cap B)'$ 。 (2) $A' \cup B'$ 。

(3) $(A \cap B)'$ 與 $A' \cup B'$ 是否相等？

由圖可知

(1) $A \cap B = \{x \mid -1 \leq x \leq 1, x \in R\}$
 $\Rightarrow (A \cap B)' = \{x \mid x > 1 \text{ 或 } x < -1, x \in R\}$

(2) $A' = \{x \mid x > 1 \text{ 或 } x < -2, x \in R\}$
 $B' = \{x \mid x < -1, x \in R\}$
 $\Rightarrow A' \cup B' = \{x \mid x > 1 \text{ 或 } x < -1, x \in R\}$

(3) 由(1), (2)可知 $(A \cap B)' = A' \cup B'$

【範例 9】笛摩根定理

承上題，試求：

(1) $(A \cup B)'$ 。 (2) $A' \cap B'$ 。

(3) $(A \cup B)'$ 與 $A' \cap B'$ 是否相等？

(1) $A \cup B = \{x \mid x \geq -2, x \in R\}$
 $\Rightarrow (A \cup B)' = \{x \mid x < -2, x \in R\}$

(2) $A' = \{x \mid x > 1 \text{ 或 } x < -2, x \in R\}$
 $B' = \{x \mid x < -1, x \in R\}$
 $\Rightarrow A' \cap B' = \{x \mid x < -2, x \in R\}$

(3) 由(1), (2)可知 $(A \cup B)' = A' \cap B'$



主題 4 計數原理

1. 窮舉法與樹狀圖

- (1) 針對所求問題，把答案一一列出來，再算總數，就是【窮舉法】。
- (2) 將所有情形窮舉出來，並依層以樹形分枝表示，就是【樹狀圖】。

2. 加法原理

假設完成一件事有【 k 類方式】，第一類方式有 n_1 種方法，第二類方式有 n_2 種方法， \dots ，第 k 類方式有 n_k 種方法，且任兩類不同時發生，則完成這件事的方法有 $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ 種。

3. 乘法原理

假設一件事要【分 k 個階段】完成，第一階段有 n_1 種方法，第二階段有 n_2 種方法， \dots ，第 k 階段有 n_k 種方法，則完成這件事的方法有 $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ 種。

4. 取捨原理

(1) 設 A, B 都是有限集合，則

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)。$$

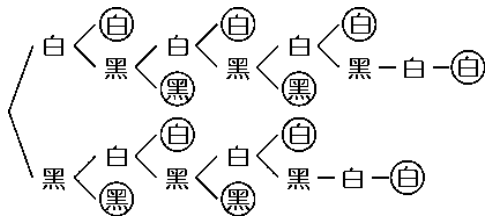
(2) 設 A, B, C 都是有限集合，則

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$


【範例 1】樹狀圖

袋子裡有白球 5 顆、黑球 3 顆，從中每次抽取一球，取後不放回，直到連續抽出 2 顆同色球才停止，試求共有幾種可能情形。

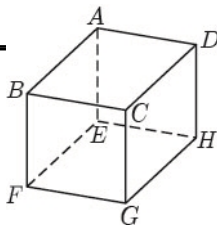
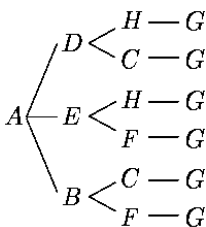
利用樹狀圖可得知一共有 11 種情形，如下圖



【範例 2】樹狀圖

如圖，正六面體 $ABCD-EFGH$ 。試求從 A 到 G 走捷徑（只能走稜線）的方法共有幾種。

利用樹狀圖可得知一共有 6 種方法。



【範例 3】加法原理與乘法原理

書架上有不同的國文課本 5 本、英文課本 6 本、數學課本 8 本，阿三打算從書架上取書，試求：

- (1) 任取一本，共有幾種取法。
- (2) 國文、英文、數學課本都各取一本，共有幾種取法。

(1) 任取一本 = $5 + 6 + 8 = 19$ (種)

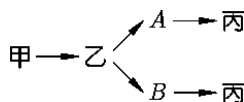
(2) 各取一本 = $\underbrace{5}_{\text{國文}} \times \underbrace{6}_{\text{英文}} \times \underbrace{8}_{\text{數學}} = 240$ (種)

【範例 4】加法原理與乘法原理

試求下列各小題中，從甲地經乙地走到丙地共有幾種路徑。
(從左往右走，不往回頭走)



$$(1) \text{ 所求} = \overbrace{3}^{\text{甲} \rightarrow \text{乙}} \times \overbrace{2}^{\text{乙} \rightarrow \text{丙}} = 6 \text{ (種)}$$



$$(2) \text{ 所求} = \underset{\text{甲到乙}}{3} \times (\underset{\text{經A}}{2} \times \underset{\text{經B}}{2} + 3 \times 1) = 21 \text{ (種)}$$

【範例 5】取捨原理

(1) 試求 1 到 1000 的整數中是 2 的倍數或 3 的倍數或 5 的倍數的整數個數。

(2) 試求 1 到 1000 的整數中是 2 的倍數或 3 的倍數但不是 5 的倍數之整數個數。

(1) 設 A_k 為 1 到 1000 的整數中是 k 的倍數所成之集合

$$\text{所求} = n(A_2 \cup A_3 \cup A_5) = n(A_2) + n(A_3) + n(A_5)$$

$$- n(A_2 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_5) - n(A_3 \cap A_5) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_5)$$

$$= n(A_2) + n(A_3) + n(A_5) - n(A_6) - n(A_{10}) - n(A_{15}) + n(A_{30})$$

$$= 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734 \text{ (個)}$$

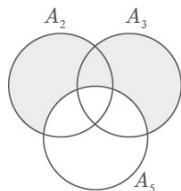
(2) 設 A_k 為 1 到 1000 的整數中是 k 的倍數所成之集合

$$\text{所求} = n(A_2) + n(A_3) - n(A_2 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_5)$$

$$- n(A_3 \cap A_5) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_5)$$

$$= 500 + 333 - 166 - 100 - 66 + 33$$

$$= 534 \text{ (個)}$$



【範例 6】取捨原理

某校開設法文、德文、日文三門選修課，要求每位同學至少選修一門。已知某班有 22 人選修了法文、18 人選修了德文、28 人選修了日文；其中有 10 人同時選了法文和德文、5 人同時選了德文和日文、13 人同時選了法文和日文；有 3 人三門全選修，試求只選了法文的人數。

分別以 F, G, J 表示選修法文、德文、日文者所成的集合依題意可知

$$n(F) = 22,$$

$$n(G) = 18,$$

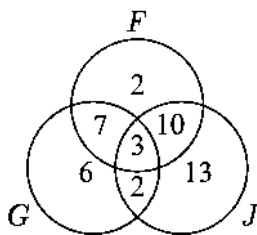
$$n(J) = 28,$$

$$n(F \cap G) = 10,$$

$$n(F \cap J) = 13,$$

$$n(F \cap G \cap J) = 3,$$

$$\begin{aligned} \text{所求} &= n(F) - n(F \cap G) - n(F \cap J) + n(F \cap G \cap J) \\ &= 22 - 10 - 13 + 3 = 2 \text{ (人)} \end{aligned}$$



NOTE



【範例 7】窮舉法的應用

將一張 100 元紙鈔兌換成 5 元、10 元或 50 元硬幣，試求共有幾種方法。

設可兌換 x 個 5 元、 y 個 10 元、 z 個 50 元

$$(x, y, z \in Z, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

$$\text{則 } 5x + 10y + 50z = 100 \Rightarrow x + 2y + 10z = 20$$

討論 $z = 2$ 或 1 或 0 的情形，由下表可知共有 18 種不同的方法

z	2	1	1	1	1	1	1	0	0
y	0	5	4	3	2	1	0	10	9
x	0	0	2	4	6	8	10	0	2

z	0	0	0	0	0	0	0	0	0
y	8	7	6	5	4	3	2	1	0
x	4	6	8	10	12	14	16	18	20

【範例 8】窮舉法的應用

每次用 20 根相同大小的火柴棒圍成一個三角形，共可圍出幾種不同形狀的三角形？

設所圍出的三角形之三邊長為 x, y, z ， $x \geq y \geq z > 0$

$$\text{則 } x + y + z = 20 \quad \because x \geq y \geq z \quad \therefore x + x + x \geq x + y + z$$

$$\Rightarrow 3x \geq 20 \Rightarrow x \geq 7$$

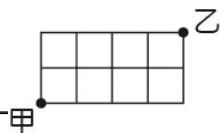
$$\text{又 } x < y + z \quad \therefore x + x < x + y + z \Rightarrow 2x < 20 \Rightarrow x < 9$$

x	9	9	9	9	8	8	8	7
y	9	8	7	6	8	7	6	7
z	2	3	4	5	4	5	6	6

由上表可知所求共有 8 種不同形狀的三角形

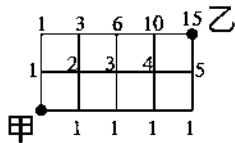
【範例 9】捷徑問題

某城鎮的街道如圖所示，南北向（縱向）有 5 條、東西向（橫向）有 3 條，如果想從甲地走捷徑到乙地，試求共有幾種方法。



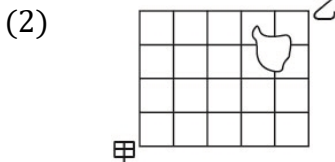
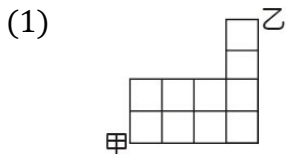
如圖，各點所標示之數字代表從甲地走捷徑到該點的方法數：

由上圖可知，所求共有 15 種不同的方法

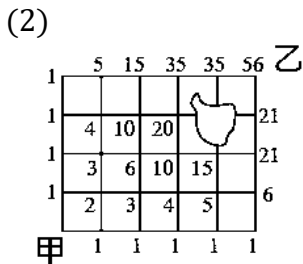
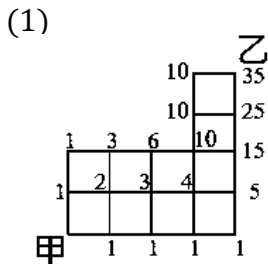


【範例 10】捷徑問題

試求在下列各小題的街道圖中，從甲地走捷徑到乙地共有幾種方法。



如圖，各點所標示之數字代表從甲地走捷徑到該點的方法數：



所求共有 35 種方法

所求共有 56 種方法

【範例 12】因數問題

試求 120 的：

- (1) 正因數的個數。
- (2) 所有正因數的總和。
- (3) 正因數中，為完全平方數的有幾個。
- (4) 正因數中，為 6 的倍數者有幾個。
- (5) 所有正因數的乘積。

$$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$

$$2^3 \Rightarrow 2^0, 2^1, 2^2, 2^3 \Rightarrow 4 \text{ 個因子}$$

$$3^1 \Rightarrow 3^0, 3^1 \Rightarrow 2 \text{ 個因子}$$

$$5^1 \Rightarrow 5^0, 5^1 \Rightarrow 2 \text{ 個因子}$$

$$(1) \text{ 正因數個數} \Rightarrow (2^0, 2^1, 2^2, 2^3)(3^0, 3^1)(5^0, 5^1) = 4 \times 2 \times 2 = 16$$

$$(2) \text{ 正因數總和} \Rightarrow (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1)(5^0 + 5^1) = 15 \times 4 \times 6 = 360$$

$$(3) \text{ 完全平方數} \Rightarrow (2^0, 2^2)(3^0)(5^0) \Rightarrow 2 \times 1 \times 1 = 2$$

$$(4) \text{ 6 的倍數} \Rightarrow (2^1, 2^2, 2^3)(3^1)(5^0, 5^1) = 3 \times 1 \times 2 = 6$$

$$(5) \text{ 正因數的乘積} \Rightarrow 120^{\frac{16}{2}} = 120^8$$

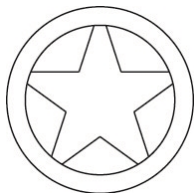
NOTE



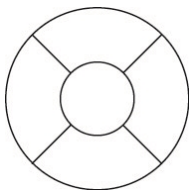
【範例 13】塗色問題

用 4 種不同的顏色塗下列各圖形的空白區域，規定每個區域只能塗一種顏色，顏色可以重複使用，但相鄰（共用邊界）的區域不能同色，試求共有幾種塗法。

(1)



(2)



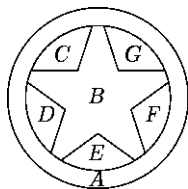
從相鄰區域最多者開始考慮：

(1) 考慮塗色順序為

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G$$

$$4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 384$$

所求有 384 種



(2) 先塗區域 A， $\therefore B, D$ 是否同色會影響 E 的顏色選擇，

\therefore 分 2 種情況來討論

B, D 同色：

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$$

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 48$$

② B, D 不同色：

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$$

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 24$$

所求共有 $48 + 24 = 72$ 種

