級數【基礎篇】

主題 1　等差級數

1.等差級數和

若等差數列$\langle a_n \rangle$的首項為a_1，第n項為a_n，公差為d，前n項和為S_n，

則　$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n\cdot[2a_1+(n-1)d]}{2}$。

2.等差級數特殊性質

(1)　$S_n=\dfrac{n\cdot[2a_1+(n-1)d]}{2}=n[a_1+(\dfrac{n+1}{2}-1)d]=n\times a_{\frac{n+1}{2}}$，其中$n$為正奇數。

(2)　S_n , $S_{2n}-S_n$, $S_{3n}-S_{2n}$ 成等差數列。

【範例 1】等差級數求極值

設$\langle a_n \rangle$為等差數列，已知$a_{10}=23$,$a_{25}=-22$，當前n項和S_n有最大值時，試求：
(1)n之值。　　(2)a_n之值。

解：(1)　n=17　(2)　$a_n=a_{17}=2$

由$a_{25}=a_{10}+(25-10)d$　　得$-22=23+15d$解得$d=-3$

回求首項$a_1=a_{10}+(1-10)d$　得首項$a_1=23+(1-10)(-3)=50$

前n項和$S_n=\dfrac{n}{2}[\,2\times 50+(n-1)(-3)\,]$

$S_n=\dfrac{n}{2}(-3n+103\,)=-\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{103}{2}n=-\dfrac{3}{2}(\,n-\dfrac{103}{6}\,)^2+\dfrac{3}{2}(\dfrac{103}{6}\,)^2$

但n為正整數，故當$n=17$時，S_n有最大值

此時$a_{17}=50+16\times(-3)=2$

【範例 2】等差級數

已知一等差數列共有 120 項，且知其第 1, 4, 7, 10…項（項差 3）之和為 270，且其第 2, 5, 8, 11…項（項差 3）之和為 390，試求該數列之第 3, 6, 9, 12…項（項差 3）之和。

解

由題意知第 1、4、7、10……項之和為　$a_1+a_4+a_7+a_{10}+\cdots+a_{118}=270$

第 2、5、8、11……項之和為　$a_2+a_5+a_8+a_{11}+\cdots+a_{119}=390$

兩式相減，由等差數列性質可知$a_2-a_1=a_5-a_4=a_8-a_7=\cdots=a_{119}-a_{118}=d$

$40d=390-270=120$解得公差$d=3$

同理若$a_3+a_6+a_9+a_{12}+\cdots+a_{120}=S$，則$(a_3-a_2)+(a_6-a_5)+\cdots+(a_{120}-a_{119})$

$=S-390=40d=120$

可得$S=510$

【範例 3】等差級數中間項

某巨蛋球場 E 區共有 25 排座位，此區每一排都比前一排多 2 個座位，小明坐在正中間那一排（即第 13 排），發現此排共有 64 個座位，則此球場 E 區共有多少座位？

解：1600 個

第 13 排座位數

$a_{13} = a_1 + (13-1)d = a_1 + 12d = 64$

球場 25 排座位和

$$S_{25} = \frac{25}{2}[\,2a_1 + (25-1)d\,] = 25\,(a_1 + 12d\,) = 25\,a_{13} = 25\times 64 = 1600$$

【範例 4】等差級數特殊關係

設一等差數列，首 n 項和為 $S_n = 100$，前 $2n$ 項和 $S_{2n} = 400$，試求首 $3n$ 項和 S_{3n} 之值。

解：900

等差數列的 $S_n\,,S_{2n} - S_n\,,S_{3n} - S_{2n}$ 亦成等差數列

即 $100\,,400 - 100\,,S_{3n} - 400$ 亦成等差數列

得 $S_{3n} - 400 - 300 = 300 - 100$

$S_{3n} = 900$

【範例 5】等差級數特殊關係

某人購買一棟房屋，簽約時先付 100 萬元，餘款分 20 期付清。已知道 20 期款額成等差數列，前兩期共 30.5 萬元，三、四兩期共 28.5 萬元，則此棟房屋總價為幾萬元？

解

[解法一] 設餘款第一期為 a_1，公差為 d　　前兩期 $a_1 + a_2 = 2a_1 + d = 30.5$

三、四兩期 $a_3 + a_4 = 2a_1 + 5d = 28.5$　解得 $d = -0.5\,,a_1 = 15.5$

房屋 20 期款額 $S_{20} = \dfrac{20}{2}[\,2a_1 + (20-1)d\,] = 10[\,2\times 15.5 + 19(-0.5)\,] = 10\times 21.5 = 215$

房屋總價 $= 100 + 215 = 315$ （萬）

[解法二] 注意前兩期 $a_1 + a_2$=30.5、三、四兩期 $a_3 + a_4$=28.5、五、六兩期 $a_5 + a_6$、…
19、20 兩期 $a_{19} + a_{20}$ 亦形成首項 30.5，公差 -2，項數 10 的等差數列，

其總和 $S_{10} = \dfrac{10}{2}[\,2\times 30.5 + (10-1)(-2)\,] = 215$

房屋總價 $= 100 + 215 = 315$ （萬）

主題 2　等比級數

1.等比級數和

若等比數列$\langle a_n \rangle$的首項為a，公比為r，前n項和為S_n，則

(1)若$r=1$，則$S_n=na$。

(2)若$r\neq 1$，則$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$。

2.等比級數特殊性質

$S_n,\ S_{2n}-S_n,\ S_{3n}-S_{2n}$亦成等比數列。

【範例 1】等比級數求和

設$\langle a_n \rangle$與$\langle b_n \rangle$為等比數列，首項皆為 2，且$\langle a_n \rangle$的公比為 3、$\langle b_n \rangle$的公比為$\dfrac{1}{3}$，試分別求此二數列的前 6 項之和。

解

(1)由題意知：$a_1=2$，公比$r=3$，項數$n=6$

利用等比級數求和公式可得前 6 項和　$S_6=\dfrac{2\times(3^6-1)}{3-1}=728$

(2)由題意知：$b_1=2$，公比$r=\dfrac{1}{3}$，項數$n=6$

利用等比級數求和公式可得前 6 項和　$S_6=\dfrac{2\times(1-(\frac{1}{3})^6)}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{728}{243}$

【範例 2】等比級數求和

K 市宣佈其 K Bike 於 2024 年 1 月 1 日調整租賃費率，第一小時免費，
第 61 至 90 分鐘 10 元、第 91 至 120 分鐘 20 元、第 121 至 150 分鐘 40 元、
第 151 至 180 分鐘 80 元的費率，之後每半小時的費率增加為前半小時的 2 倍。
則小華騎乘 6 小時需要花費多少錢？

解

由題意知「之後每半小時的費率增加為前半小時的 2 倍」

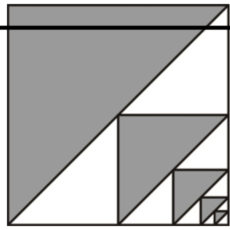
可知第一小時後的費率形成首項$a_1=10$，公比$r=2$的等比數列

6 小時即為項數$n=10$

利用等比級數求和公式可得前 10 項和　$S_{10}=\dfrac{10\times(2^{10}-1)}{2-1}=10230$元

【範例 3】等比級數應用

下圖為最外面是邊長為 1 的正方形，以對角線分成兩個等腰直角三角形左上角的為灰色三角形，右下角的三角形裡面做個正方形後再重覆前面的做法直到出現 5 個相似的灰色三角形，求此 5 個灰色三角形的面積和。



解

第一個正方形邊長為 1，則第一個等腰直角三角形面積為 $\frac{1}{2}$

第二個正方形邊長為 $\frac{1}{2}$，第二個等腰直角三角形面積為 $\frac{1}{8}$

按題意灰色三角形的面積形成首項 $\frac{1}{2}$，公比 $r=\frac{1}{4}$，項數 $n=5$ 的等比數列

利用等比級數求和公式可得前 5 項和 $S_5=\dfrac{\frac{1}{2}\times[1-(\frac{1}{4})^5]}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{341}{512}$

主題 3. $\sum$ 的運算性質及常用公式

焦點 1. $\sum$ (sigma)的表示方法

(1) $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\sum_{k=1}^{5}a_k$

(2) 有限級數 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

(3) 無窮級數 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}a_k$

【範例 1】Σ (sigma)的表示方法

用 Σ 表示下列級數

（1） $5+9+13+17+\cdots+45=$ ____

（2） $11+9+7+5+\cdots+(-13)=$ ____

（3） $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{64}=$ ____

（4） $1-2+3-4+\cdots+99-100=$ ____

（5） $2\times4+3\times7+4\times10+\cdots+101\times301=$ ____

解：（1） $\sum_{k=1}^{11}(4k+1)$ （2） $\sum_{k=1}^{13}(13-2k)$

(3) $\sum_{k=1}^{7}\frac{1}{2^{k-1}}$　　(4) $\sum_{k=1}^{100}(-1)^{k-1}\times k$　　(5) $\sum_{k=1}^{100}(k+1)(3k+1)$

焦點 2. ∑的運算公式：

【口訣】：一次算面積，二次再相加，三次求平方。

(1) $1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(4) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(5) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

焦點 3 ∑的性質

【口訣】：係數可提；加減可分；常數 n 倍。

(1) $\sum_{k=1}^{n}(ca_k)=c\times\sum_{k=1}^{n}a_k$ （c 為常數）

(2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k\pm\sum_{k=1}^{n}b_k$

(3) $\sum_{k=1}^{n}c=c\times n$ （c 為常數）

【範例 2】Σ的性質與運算

(1) $5+5+5+5+5+5=\sum_{k=1}^{6}5=$ ______

(2) $3\times1+3\times2+3\times3+\cdots+3\times8=\sum_{k=1}^{8}(3\times k)=3\times\sum_{k=1}^{8}k=$ ______

(3) $(1+2)+(2+4)+(3+6)+\cdots+(6+12)=\sum_{k=1}^{6}(k+2k)=$ ______

解：(1) $\sum_{k=1}^{6}5=5\times6=30$

(2) $\sum_{k=1}^{8}(3\times k)=3\times\sum_{k=1}^{8}k=3\times\frac{8\times(8+1)}{2}=108$

（3） $\sum_{k=1}^{6}(k+2k)=\sum_{k=1}^{6}k+\sum_{k=1}^{6}2k=\frac{6(6+1)}{2}+2\times\frac{6(6+1)}{2}=63$

【範例 3】Σ的基本運算公式

（1） $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+99\times100=$ ______

（2） $8^3+9^3+10^3+\cdots+20^3=$ ______

解：

(1) $\sum_{k=1}^{99}k(k+1)=\sum_{k=1}^{99}k^2+k=\sum_{k=1}^{99}k^2+\sum_{k=1}^{99}k$

$=\frac{99\times100\times199}{6}+\frac{99\times100}{2}=328350+4950=333300$

(2) $\sum_{k=1}^{20}k^3-\sum_{k=1}^{7}k^3=(\frac{20\times21}{2})^2-(\frac{7\times8}{2})^2$

$=210^2-28^2=44100-784=43316$

【範例 4】Σ的運算

（1） $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+99\times100=$ ______

（2） $1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots+8\times9\times10=$ ______

解：

(1) $\sum_{k=1}^{99}k(k+1)=\frac{99\times100\times101}{3}=333300$

(2) $\sum_{k=1}^{8}k(k+1)(k+2)=\frac{8\times9\times10\times11}{4}=1980$

【範例 5】Σ的運算

觀察右圖 3×3 與 4×4 方格中的數字規律；如果在 10×10 的方格上，仿此規律填入數字，則所填入的 100 個數字總和為______。

1	2	3
1	2	2
1	1	1

1	2	3	4
1	2	3	3
1	2	2	2
1	1	1	1

解：

$S=1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{10\times11\times21}{6}=385$

2-2　自我評量

[基本題]

1. 設數列 $< a_n >$ 中，$a_1 = 1$ 則下列何者使 $< a_n >$ 為等差數列？（單選）
(A) $a_{n+1} = a_n + 3$　(B) $a_{n+1} = 2a_n$　(C) $a_{n+1} = a_n + n$
(D) $a_{n+1} = 2a_n + 1$　(E) $a_{n+1} = a_n + 3^n$

解

(A)○：$a_{n+1} - a_n = 3$ 為等差

(B)×：$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ 為等比

(C)×(D)×(E)×：$< a_n >$ 不為等差或等比數列

故選(A)

2. 第 1 天獲得 1 元、第 2 天獲得 2 元、第 3 天獲得 4 元、第 4 天獲得 8 元、依此每天所獲得的錢為前一天的兩倍，如此進行到第 30 天，試問這 30 天所獲得的錢總數最接近下列哪一個選項？（單選）
(A)10,000 元　(B)1,000,000 元　(C)100,000,000 元
(D)1,000,000,000 元　(E)1,000,000,000,000 元　【104 學測】

解

由題意可設 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8$

可知 $\langle a_n \rangle$ 為等比數列，公比 $r = 2$

則 $S_{30} = \dfrac{1(2^{30} - 1)}{2 - 1} = 2^{30} - 1 \approx (2^{10}) \times (2^{10}) \times (2^{10}) \approx 1000 \times 1000 \times 1000 = 1,000,000,000$

故選(D)

3. 100 到 500 的正整數中，所有 7 的倍數的和為________。

解

因為 $100 \div 7 = 14......2$ 、 $500 \div 7 = 71......3$

則設 100 到 500 的正整數，其中 7 的倍數

$a_1 = 7 \times 15 = 105$ ，最後一個 $a_n = 7 \times 71 = 497$

可知 $n = 57$ 個，其和為 $S_n = \dfrac{57}{2}(105 + 497) = \dfrac{57}{2} \times 602 = 17157$

4. 設等差數列$\lt a_n\gt$中，$a_2+a_3+a_{10}+a_{11}=24$，則$a_6+a_7=$________ 。

解

設等差數列$\langle a_n\rangle$首項a_1，公差為d，則

$$a_2+a_3+a_{10}+a_{11}=(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_1+9d)+(a_1+10d)=4a_1+22d=24$$
$$\Rightarrow 2a_1+11d=12$$
$$a_6+a_7=(a_1+5d)+(a_1+6d)=2a_1+11d=12$$

5. 在 100 與 200 之間插入 10 個數，使所成的 12 個數成等差數列，則此數列所有數的和為________ 。

解

設一等差數列$\langle a_n\rangle$，$a_1=100, a_{12}=200$，則$S_{12}=\dfrac{12}{2}\times(100+200)=6\times300=1800$

6.設一等比數列，首項為 3，末項為-384，和為-255，則項數= _______ 。

解

設項數為n，公比為r

因為$a_1=3, a_n=a_1\times r^{n-1}=-384$

則$S_n=\dfrac{a_1\times(r^n-1)}{r-1}=\dfrac{a_1\times r^n-a_1}{r-1}=\dfrac{a_n\times r-a_1}{r-1}$

$$\Rightarrow -255=\frac{-384r-3}{r-1}\Rightarrow -384r-3=-255r+255\Rightarrow 129r=-258\Rightarrow r=-2$$

$$a_n=a_1\times r^{n-1}=3\times(-2)^{n-1}=-384\Rightarrow(-2)^{n-1}=-128=(-2)^7\Rightarrow n=8$$

7. 設等比數列$\lt a_n\gt$中，$a_1+a_2+a_3=3$，$a_4+a_5+a_6=18$，則$a_7+a_8+a_9=$ _______ 。

解

設公比$=r$，$a_1+a_2+a_3=a_1(1+r+r^2)=3$，$a_4+a_5+a_6=a_1r^3(1+r+r^2)=18$

得$r^3=6$，$a_7+a_8+a_9=a_1r^6(1+r+r^2)=r^3\times a_1r^3(1+r+r^2)=6\times18=108$

8. 設$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=3025$，則$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=$________。

解

利用立方和公式　$1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2=3025$

可得$\frac{n(n+1)}{2}=55 \quad \Rightarrow n=10$，$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=\frac{n\times 2n}{2}=n^2=100$

9. 設年利率 3%，每年複利計息，於每年年初均存入 10000 元，則 6 年期滿後的本利和為__________元（已知$1.03^6\approx 1.1941$，$1.03^7\approx 1.2299$）

解

第一年存 1 萬元，6 年期滿$=1\times(1+3\%)^6=1(1.03)^6$ (萬元)

第二年存 1 萬元，6 年期滿$=1\times(1+3\%)^5=1(1.03)^5$ (萬元)

以此類推，本利和

$=1\times(1.03)^6+1\times(1.03)^5+\cdots+1\times(1.03)=(1.03)^1+(1.03)^2+\cdots+(1.03)^6$

$=\frac{1.03\times[(1.03)^6-1]}{1.03-1}=\frac{1.2299-1.03}{0.03}\fallingdotseq 6.6633$(萬元)$=66633$(元)

10. 當 n 為正整數時，某一數列的前 n 項和$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n=n^2+2n$，

試求　(1) a_1 及 a_{10}。　(2) a_n　。（以 n 表示）

解

(1) $a_1=S_1=1^2+2\times 1=3$

$S_{10}=a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_9+a_{10}=10^2+2\times 10=120$

$S_9=a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_9=9^2+2\times 9=99$

$a_{10}=S_{10}-S_9=120-99=21$

(2) $a_n=S_n-S_{n-1}$　$(n\geq 2)$

$=(n^2+2n)-[(n-1)^2+2\times(n-1)]=2n+1$

$n=1, a_1=2\times 1+1=3$

故對於所有正整數 n，$a_n=2n+1$

[進階題]

11. (1)兩等差數列的第 n 項比為$(2n+3):(6n+4)$，試求此兩數列前 11 項和之比為?
(2)兩等差數列的前 n 項和比為$(2n-1):(n+4)$，試求此兩數列第 10 項之比為?

解

設$\langle a_n \rangle$級數和 A_n，$\langle b_n \rangle$級數和 B_n

$$A_n : B_n = \frac{(a_1+a_n)\times n}{2} : \frac{(b_1+b_n)\times n}{2} = \frac{a_1+a_n}{2} : \frac{b_1+b_n}{2} = a_{\frac{n+1}{2}} : b_{\frac{n+1}{2}}$$

(1) $A_{11} : B_{11} = a_6 : b_6 = 2\times 6+3 : 6\times 6+4 = 15:40 = 3:8$

(2) $a_{10} : b_{10} = A_{19} : B_{19} = 37:23$

12. 試求$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots\cdots+n\,(n+1)=$________。

解

$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots\cdots+n\,(n+1)$

$=1\times(1+1)+2\times(2+1)+3\times(3+1)+\cdots\cdots+n\,(n+1)$

$=(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)+\cdots\cdots+(n^2+n)$

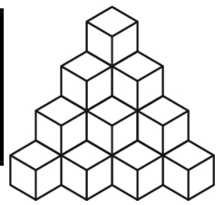
每個括號的第一項結合成前 n 個正整數的平方和公式

第二項結合成前 n 個正整數的和公式

$$=(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+(1+2+3+\cdots\cdots n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}$$

13. 小華將同樣大小的正立方體積木堆積如右圖，已知最上層 1 個，第 2 層 3 個，……，依此規律，則堆積 10 層所需的正立方體積木共_________個。



解

設第 n 層個數 a_n

$$a_1 = 1 = \frac{1\times 2}{2}$$

$$a_2 = 1+2 = \frac{2\times 3}{2}$$

$$a_3 = 1+2+3 = \frac{3\times 4}{2}$$

$\vdots \quad \vdots$

$a_n = 1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$\vdots \quad \vdots$

$a_{10} = 1+2+3+\cdots+10 = \dfrac{10\times 11}{2}$

堆 10 層總和 $= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_{10} = \dfrac{1\times 2}{2} + \dfrac{2\times 3}{2} + \cdots + \dfrac{10\times 11}{2}$

$= \dfrac{1}{2}[1\times(1+1) + 2\times(2+1) + \cdots + 10\times(10+1)]$

$= \dfrac{1}{2}[(1^2+2^2+\cdots+10^2) + (1+2+\cdots+10)] = \dfrac{1}{2}(\dfrac{10\times 11\times 21}{6} + \dfrac{10\times 11}{2}) = \dfrac{1}{2}\times 440 = 220$（個）

14. $1\times 29 + 2\times 27 + 3\times 25 + 4\times 23 + \cdots\cdots + 9\times 13 + 10\times 11 =$ ________ 。

解

令 $S = 1\times 29 + 2\times 27 + 3\times 25 + \cdots + 10\times 11$

$T = 1\times 1 + 2\times 2 + \cdots\cdots + 9\times 9 + 10\times 10 = \dfrac{1}{6}\times 10\times 11\times 21 = 385$

考慮 $S + 2T = 1\times(29+2) + 2\times(27+4) + 3\times(25+6) + \cdots + 10\times(11+20)$

$= 1\times 31 + 2\times 31 + 3\times 31 + \cdots + 10\times 31$

$= (1+2+3+4+\cdots+10)\times 31$

$= 55\times 31 = 1705$

即 $S + 2\times 385 = 1705$ ， $S = 935$