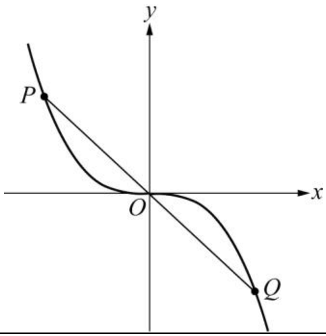
高中 數學 科考試卷 ____年____班 座號：_____ 姓名：__________

一、單選題：

(　　)1. 坐標平面上，函數圖形 $y=-\sqrt{3}x^3$ 上有兩點 P , Q 到原點距離皆為 1。已知點 P 坐標為 $(\cos\theta, \sin\theta)$，試問點 Q 坐標為何？
(A)$(\cos(-\theta), \sin(-\theta))$　(B)$(-\cos\theta, \sin\theta)$　(C)$(\cos(-\theta), -\sin\theta)$　(D)$(-\cos\theta, \sin(-\theta))$
(E)$(\cos\theta, -\sin\theta)$

答案：(D)

解析：$y=-\sqrt{3}x^3$ 為奇函數，圖形如附圖
∵ 圖形對稱於原點
由 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ 可推得 $Q(-\cos\theta, -\sin\theta)$，
又 $-\sin\theta=\sin(-\theta)$，故選(D)。



(　　)2. 若 $\tan\theta=\frac{1}{4}$，則 $\frac{3\sin\theta+5\cos\theta}{7\cos\theta-3\sin\theta}$ 為何？
(A)$\frac{23}{25}$　(B)$-\frac{23}{25}$　(C)$\frac{25}{23}$　(D)$-\frac{25}{23}$　(E)$\frac{5}{23}$

答案：(A)

解析：$\frac{3\sin\theta+5\cos\theta}{7\cos\theta-3\sin\theta}=\frac{3\tan\theta+5}{7-3\tan\theta}=\frac{3\times\frac{1}{4}+5}{7-3\times\frac{1}{4}}=\frac{23}{25}$，
故選(A)。

(　　)3. 一根筆直的竹竿立於地面 B 處，當它被風吹斷 $\overline{AC}$ 後，端點 A 恰與地面接觸，構成直角三角形 ABC，若測得 $\angle CAB=37°$，$\overline{AB}=5.6$ 公尺，則未斷裂前，該竹竿的長度為多少公尺？($\sin 37°=0.6$)
(A)10.5 公尺　(B)11.2 公尺　(C)11.8 公尺　(D)12.2 公尺　(E)12.6 公尺

答案：(B)

解析：$\sin 37°=0.6=\frac{3}{5}\Rightarrow\cos 37°=\frac{4}{5}$，$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{5.6}{\overline{AC}}=\cos 37°=\frac{4}{5}\Rightarrow\overline{AC}=7$，
$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BC}}{7}=\sin 37°=\frac{3}{5}\Rightarrow\overline{BC}=4.2$，
故竹竿長度$=\overline{AC}+\overline{BC}=7+4.2=11.2$
∴ 選(B)

二、多重選擇題：

(　　)1. 已知△ABC 的三邊長為 a , b , c，試求下列哪一個選項的條件成立時，△ABC 必為鈍角三角形？
(A)$a^2+b^2<c^2$　(B)$\sin A=\sin B=\frac{1}{3}$　(C)$a:b:c=5:6:7$　(D)$b=4$，$c=6$，$\angle B=30°$
(E)△ABC 的三高長度為 9 , 12 , 15

答案：(A)(B)(D)(E)

解析：(A) $a^2+b^2<c^2 \Rightarrow \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0 \Rightarrow \angle C$ 為鈍角，

故$\triangle ABC$ 為鈍角三角形。

(B) $\sin A=\sin B \Rightarrow a=b$，

且$\angle A=\angle B$(銳角)或$\angle A+\angle B=180°$(不合)，

又 $\sin A=\sin B=\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{2} \Rightarrow \angle A=\angle B<30°$

$\therefore\ \angle C>120°$

(C) $a:b:c=5:6:7$，邊長 c 最大，

而 $\cos C=\dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\times 5\times 6}>0$，故$\angle C<90°$，

於是$\triangle ABC$ 為銳角三角形。

(D) $\dfrac{4}{\sin 30°}=\dfrac{6}{\sin C} \Rightarrow \sin C=\dfrac{3}{4}$，

若 $0°<\angle C<90°$，因 $\dfrac{3}{4}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故$\angle C<60°$，此時$\angle A>90°$，

若$\angle C>90°$，因 $\dfrac{3}{4}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故$\angle C>120°$，所以$\triangle ABC$ 是鈍角三角形。

(E) $a:b:c=\dfrac{1}{9}:\dfrac{1}{12}:\dfrac{1}{15}=20:15:12$，

a 邊長最大，$\cos A=\dfrac{15^2+12^2-20^2}{2\times 15\times 12}<0$，

$\angle A$ 為鈍角，故$\triangle ABC$ 為鈍角三角形。

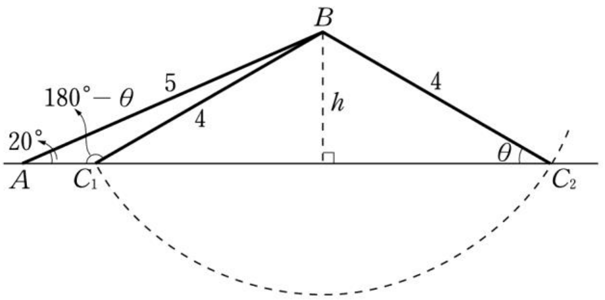
故選(A)(B)(D)(E)。

(　　)2. 在$\triangle ABC$ 中，已知$\angle A=20°$、$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=4$。請選出正確的選項。
(A)可以確定$\angle B$ 的餘弦值　(B)可以確定$\angle C$ 的正弦值　(C)可以確定$\triangle ABC$ 的面積　(D)可以確定$\triangle ABC$ 的內切圓半徑　(E)可以確定$\triangle ABC$ 的外接圓半徑

答案：(B)(E)

解析：$h=5\times\sin 20°<5\times\sin 30°=\dfrac{5}{2}$，而 $4>\dfrac{5}{2}$

$\therefore$ 以 B 為圓心，4 為半徑畫圓弧，可交底邊於兩點 C_1 與 C_2



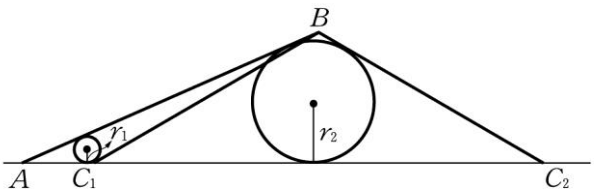
(A) ×：$\triangle ABC_1$ 與$\triangle ABC_2$ 中兩個$\angle B$ 明顯不同

$\therefore$ 餘弦值必不同

(B) ○：由圖可知$\angle C$ 的兩種可能分別是 θ 與 $180°-\theta$　$\therefore$ 正弦值相同

(C) ×：$\triangle ABC_1$ 與$\triangle ABC_2$ 大小明顯不同　$\therefore$ 面積不同

(D) ×：作圖可知$\triangle ABC_1$ 的內切圓半徑明顯小於$\triangle ABC_2$ 的內切圓半徑。



(E) ○：$\triangle ABC_1$ 中外接圓半徑 R_1，由正弦定理得 $\dfrac{5}{\sin(180°-\theta)}=2R_1$；

$\triangle ABC_2$ 的外接圓半徑 R_2，由正弦定理得 $\dfrac{5}{\sin\theta}=2R_2$

$\because \sin(180°-\theta)=\sin\theta \quad \therefore R_1=R_2$

故選(B)(E)。

三、非選題：

1. 某人隔河測一山高，在 A 點觀測山時，山的方位為東偏北 60°，山頂的仰角為 45°，某人自 A 點向東行 600 公尺到達 B 點，山的方位變成在西偏北 60°，則山有多高？

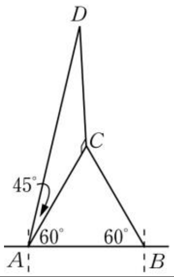
答案：600 公尺

解析：在$\triangle ABC$ 中，$\angle CAB=\angle CBA=60°$

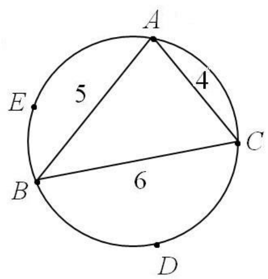
$\Rightarrow \overline{AC}=\overline{AB}=600$。

在$\triangle ACD$ 中，$\angle CAD=45°$，$\angle ACD=90°$

$\Rightarrow \overline{CD}=\overline{AC}=600$。



2. <u>愛德華</u>正在研究魔法陣（如附圖），先畫了一個圓，並在圓上找三點，分別代表火元素（A 點）、土元素（B 點）、水元素（C 點）。並經測量後得知 $\overline{AB}$ 為 5 公分，$\overline{AC}$ 為 4 公分，$\overline{BC}$ 為 6 公分，則：(註：一弦把圓周分成兩部分，每一部分都稱之為弧，小於半圓的弧稱為劣弧。)
   (1) 求$\triangle ABC$ 的面積為______平方公分。
   (2) 若在劣弧 BC 上找一點 D 代表木元素，並使得 $\overline{BD}=\overline{CD}$，求此時 $\overline{BD}$ 為_____公分。
   (3) 若在劣弧 AB 上找一點 E 代表金元素，並使得 $\angle BCE=30°$，求此時 $\overline{BE}$ 為_________公分。



答案：(1) $\dfrac{15}{4}\sqrt{7}$；(2)4；(3) $\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$

解析：(1) $s=\dfrac{4+5+6}{2}=\dfrac{15}{2}$，

$\therefore \triangle ABC$ 面積$=\sqrt{\dfrac{15}{2}(\dfrac{15}{2}-4)(\dfrac{15}{2}-5)(\dfrac{15}{2}-6)}=\dfrac{15}{4}\sqrt{7}$ (平方公分)

(2) $\triangle ABC$ 面積$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot \sin\angle BAC=\frac{15}{4}\sqrt{7}\Rightarrow \sin\angle BAC=\frac{3}{8}\sqrt{7}$，$\cos\angle BAC=\frac{1}{8}$，

$\triangle BCD$ 中，$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2-2\cdot\overline{BD}\cdot\overline{CD}\cdot\cos\angle BDC$，

$36=\overline{BD}^2$〔$2-2\cos(180°-A)$〕$=\overline{BD}^2\cdot\frac{9}{4}$

$\therefore \overline{BD}=4$ (公分)

(3) 外接圓半徑 R：$\triangle ABC$ 中，$2R=\frac{\overline{BC}}{\sin<BAC}=\frac{6}{\frac{3}{8}\sqrt{7}}\Rightarrow R=\frac{8}{\sqrt{7}}$，

$\triangle BCE$ 中，$\frac{\overline{BE}}{\sin<BCE}=2R$

$\therefore \overline{BE}=2\times\frac{8}{\sqrt{7}}\times\frac{1}{2}=\frac{8\sqrt{7}}{7}$ (公分)

四、填充題：

1. 設 θ 是銳角，且 tanθ＝3，試求 $\frac{2\sin\theta-\cos\theta}{2\sin\theta+\cos\theta}=$________。

答案：$\frac{5}{7}$

解析：原式$=\dfrac{2\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}{2\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}=\frac{2\tan\theta-1}{2\tan\theta+1}=\frac{6-1}{6+1}=\frac{5}{7}$

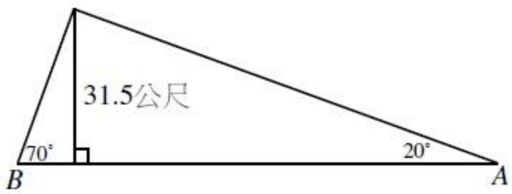
2. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\sqrt{13}$，$\overline{AC}=\sqrt{3}$，$\overline{BC}=5$，則$\angle C$ 的角度為__________。

答案：30°

解析：$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{5^2+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{13})^2}{2\times 5\times\sqrt{3}}=\frac{15}{10\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故$\angle C=30°$

3. 蘭陽博物館位於頭城烏石港遺址的溼地旁，2010 年 10 月開館，整棟建築造型仿照「單面山」的地形，展現一面傾斜、一面陡峻的不對稱美感，所謂的「單面山」指的就是一邊陡峭，另一邊緩斜的山形，是宜蘭獨特的地理特質。蘭陽博物館屋頂與地面夾角成 20 度，尖端牆面與地面則成 70 度(如附圖)。已知博物館之垂直高度為 31.5 公尺，則博物館在地面上的總長度(AB)約為____________公尺。(四捨五入至整數位)



答案：98

解析：$\overline{AB}=(31.5)\tan 20°+(31.5)\tan 70°$

$=(31.5)(\frac{\sin 20°}{\cos 20°}+\frac{\sin 70°}{\cos 70°})=(31.5)(\frac{\sin 20°}{\cos 20°}+\frac{\cos 20°}{\sin 20°})=(31.5)\cdot\frac{2}{\sin 40°}$

$=\frac{63}{0.6428}\doteqdot 98.008\doteqdot 98$ (公尺)。

4. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=4$，$\angle A=130°$，$\angle B=20°$，則$\triangle ABC$ 外接圓的半徑為__________。

答案：4

解析：$c=\overline{AB}=4$，$\angle C=180°-130°-20°=30°$

$\because R=\dfrac{c}{2\sin C}$

$\therefore$ 外接圓的半徑$=\dfrac{\overline{AB}}{2\sin 30^{\circ}}=\dfrac{4}{2\times\frac{1}{2}}=4$

5. $\cos 180°+\sin 180°=$______。

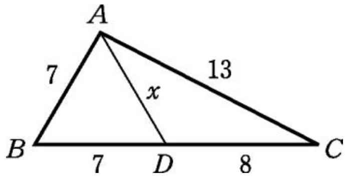
答案：-1

解析：$\cos 180°+\sin 180°=-1$。

6. 在三角形 ABC 中，若 D 點在 $\overline{BC}$ 邊上，且 $\overline{AB}=7$，$\overline{AC}=13$，$\overline{BD}=7$，$\overline{CD}=8$，則 $\overline{AD}=$________。

答案：7

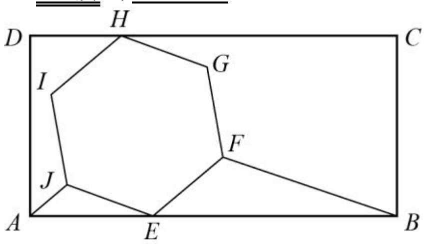
解析：畫概圖如附，設 $\overline{AD}=x$



$\because \cos B=\dfrac{7^2+7^2-x^2}{2\times7\times7}=\dfrac{7^2+15^2-13^2}{2\times7\times15}$

$\Rightarrow \dfrac{98-x^2}{7}=7\Rightarrow 98-x^2=49\Rightarrow x=7$

7. 如附圖，矩形 $ABCD$ 內有一正六邊形 $EFGHIJ$，其中 E，H 分別在 $\overline{AB}$，$\overline{CD}$ 上，F，G，I，J 四點皆在矩形 $ABCD$ 內部，已知 $\overline{AE}=3$，$\overline{BE}=6$，且 $\overline{EF}=2\overline{AJ}$，$\overline{BF}=4\overline{AJ}$，則矩形 $ABCD$ 的面積為______。



答案：$\dfrac{162\sqrt{3}}{7}$

解析：設 $\overline{AJ}=r\Rightarrow\overline{BF}=4r$，$\overline{EF}=2r\Rightarrow\overline{JE}=\overline{EF}=2r$

令 $\angle JAE=\theta$

① $\cos120°=\dfrac{r^2+4r^2-9}{2\cdot r\cdot 2r}\Rightarrow r=\dfrac{3}{\sqrt{7}}$

$\dfrac{2r}{\sin\theta}=\dfrac{3}{\sin120°}=\dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\Rightarrow \sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}r}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$，$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$

② 高度$=\overline{AD}$

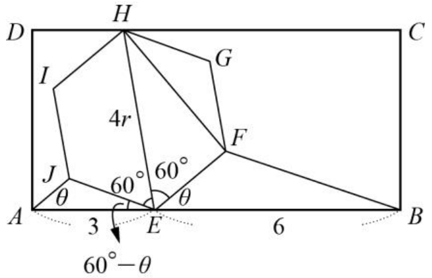
$=4r\times\sin(60°+\theta)$

$=4r\times(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\cos\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta)$

$$=\frac{12}{\sqrt{7}}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right)$$

$$=\frac{12}{\sqrt{7}}\times\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{18\sqrt{3}}{7}$$

$\therefore$ 面積 $=9\times\frac{18\sqrt{3}}{7}=\frac{162\sqrt{3}}{7}$



8. 已知 $0°<\theta<90°$，且 $\tan\theta=\frac{1}{4}$，求 $\frac{\sin\theta+5\cos\theta}{2\sin\theta-3\cos\theta}=$________。

答案：$-\frac{21}{10}$

解析：

$\frac{\sin\theta+5\cos\theta}{2\sin\theta-3\cos\theta}=\frac{\tan\theta+5}{2\tan\theta-3}$

(分子、分母同除以 $\cos\theta$)

$\therefore$ 所求原式 $=\frac{\frac{1}{4}+5}{2\cdot\frac{1}{4}-3}=-\frac{21}{10}$

9. 坐標平面上，設 O 為原點，θ 為第二象限角且 $P(x,2)$ 為終邊上一點，已知 $\overline{OP}=3$，則 $\tan\theta$ $=$________。

答案：$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

解析：$\because\theta$ 為第二象限角 $\Rightarrow x<0$，

$\overline{OP}=\sqrt{x^2+2^2}=3\Rightarrow x^2+2^2=3^2\Rightarrow x^2=5\Rightarrow x=-\sqrt{5}$ 或 $\sqrt{5}$ (不合)

$\therefore\tan\theta=\frac{2}{-\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

10. 求 $\sin^2 30°+\tan^2 60°+\cos^2 45°=$______。

答案：$\frac{15}{4}$

解析：$\sin^2 30°+\tan^2 60°+\cos^2 45°=\frac{15}{4}$。

11. 設角 θ 位於標準位置(頂點置於原點，始邊在 x 軸正向)，且點 $P(k,-2k)$ 為 θ 的終邊上一點，$k\neq0$，則 $\frac{5\sin\theta+3\cos\theta}{2\sin\theta-\cos\theta}=$______。

答案：$\frac{7}{5}$

解析：$\because\tan\theta=\frac{-2k}{k}=-2$

$\therefore$ 原式 $=\frac{5\tan\theta+3}{2\tan\theta-1}=\frac{-10+3}{-5}=\frac{7}{5}$

12. 有一個正銳角θ，它的一個同界角度數恰為其 11 倍，則θ=______ （二解）。

答案：36°或 72°

解析：$360°+\theta=11\cdot\theta \Rightarrow \theta=36°$

或 $720°+\theta=11\theta \Rightarrow \theta=72°$

若 $1080°+\theta=11\theta \Rightarrow \theta=108°$ 不是銳角

故 $\theta=36°$ 或 $72°$

13. 在△*ABC* 中，$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=7$，$\overline{AC}=5$，今分別以 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 為邊長，往外作正方形 *ACDE* 與 *AFGB*，如右圖所示，則 $\overline{EF}$ 長為________。

答案：$\sqrt{73}$

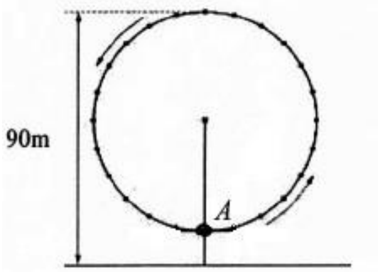
解析：$\cos\angle EAF=-\cos\angle BAC=-\dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot5\cdot6}=-\dfrac{12}{60}=-\dfrac{1}{5}$，

$\overline{AE}=5$，$\overline{AF}=6$

$\Rightarrow \overline{EF}^2=5^2+6^2-2\cdot5\cdot6\cdot\cos\angle EAF=25+36-60\cdot(-\dfrac{1}{5})=73$

$\therefore \overline{EF}=\sqrt{73}$。

14. 學校辦理校外教學活動，來到同學們最嗨的遊樂園區，園區內有一歡樂摩天輪（此摩天輪直徑 68，公尺，最高點離地面高度為 90 公尺，依逆時針方向等速旋轉，旋轉一圈需花 15 分鐘)。學生好美與 3 位好友從 *A* 處搭上摩天輪（如附圖所示），10 分鐘之後，向在地面的老師揮手，請問此時好美離地面的高度約為__________公尺。



答案：73

解析：每分鐘逆時針轉有向角 $\dfrac{360°}{15}=24°$

10 分鐘後轉了 $24°\times10=240°$

$\therefore$ 高度 $=90-|34\cos240°|=90-17=73$ (公尺)

15. 在△*ABC* 中，*M* 為 $\overline{BC}$ 邊之中點，若 $\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=5$，且 $\angle BAC=120°$，則 $\tan\angle BAM=$ ________。(化成最簡根式)

答案：$5\sqrt{3}$

解析：於△*ABC*，由餘弦定理得 $\overline{BC}^2=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos120°=49$

$\Rightarrow \overline{BC}=7$。

又 $\cos B=\dfrac{3^2+7^2-5^2}{2\times3\times7}=\dfrac{11}{14}$，

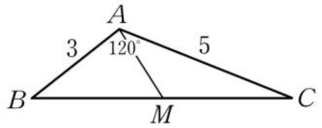
於△*ABM* 中，$\overline{AM}^2=3^2+(\dfrac{7}{2})^2-2\times3\times\dfrac{7}{2}\times\cos B=\dfrac{85}{4}-21\times\dfrac{11}{14}=\dfrac{19}{4}$，

得 $\overline{AM}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$。

令 $\angle BAM=\theta$，由餘弦定理得 $\cos\theta=\dfrac{3^2+(\frac{\sqrt{19}}{2})^2-(\frac{7}{2})^2}{2\times3\times\frac{\sqrt{19}}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{19}}$，

故 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-(\dfrac{1}{2\sqrt{19}})^2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}$，

所以 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=5\sqrt{3}$。



16. 在△ABC 中，已知 $\angle A=45°$，$\angle B=60°$，$\overline{BC}=2\sqrt{2}$，試求 $\overline{AC}=$________。

答案：$2\sqrt{3}$

解析：$\because \dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}\Rightarrow\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin 60^\circ}\Rightarrow\overline{AC}=\dfrac{2\sqrt{2}\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=\dfrac{2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{3}$

17. $\sin^2 37°+\sin^2 8°+2\sin 37°\sin 8°\sin 45°=$______。

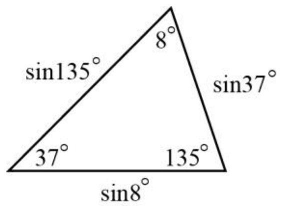
答案：$\dfrac{1}{2}$

解析：令 $a=2R\sin37°$，$b=2R\sin8°$，$c=2R\sin135°$為三角形三邊長

$\because c^2=a^2+b^2-2ab\cos135°$

$\Rightarrow(2R\sin135°)^2=(2R\sin37°)^2+(2R\sin8°)^2-2\times2R\sin37°\times2R\sin8°\times\cos135°$

$\Rightarrow\sin^2135°=\sin^237°+\sin^28°+2\sin37°\sin8°\cos45°=\dfrac{1}{2}$



18. 設 $\angle A$ 為銳角，$\cos A=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，則 $\tan A=$______。

答案：$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

解析：$\tan A=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$。

19. 四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CD}=5$，$\overline{DA}=7$，且 $\angle DAB=\angle BCD=90°$，則對角線 $\overline{AC}$ 長為________。

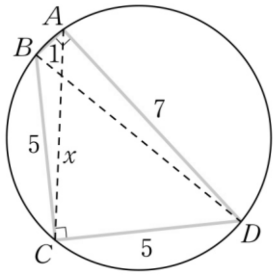
答案：$\sqrt{32}$

解析：四邊形 $ABCD$ 對角互補　∴ 四邊形 $ABCD$ 為圓內接四邊形

$\Rightarrow\angle ABC+\angle ADC=180°$（兩角餘弦值和為 0）

設 $\overline{AC}=x$，由 $\cos\angle ABC+\cos\angle ADC=0$

$\Rightarrow\dfrac{1^2+5^2-x^2}{2\cdot1\cdot5}+\dfrac{5^2+7^2-x^2}{2\cdot5\cdot7}=0\Rightarrow x=\sqrt{32}$



20. 計算$\dfrac{\sin 270°\sin 120°}{\tan(-30°)}+\cos 1305°\sin 1035°$之值為________。

答案：2

解析：$\cos 1305° = \cos(1305° - 1080°)$

$= \cos(225°)$

$= -\cos 45°$

$\sin 1035° = \sin(1035° - 1080°)$

$= \sin(-45°)$

$= -\sin 45°$

原式$= \dfrac{-1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{-\dfrac{\sqrt{3}}{3}} + \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} = 2$