高中 數學 科考試卷 ____年____班 座號：_____ 姓名：__________

一、單選題：

(　　)1. 假設甲、乙、丙三鎮兩兩之間的距離皆為 20 公里。兩條筆直的公路交於丁鎮，其中之一通過甲、乙兩鎮而另一通過丙鎮。今在一比例精準的地圖上量得兩公路的夾角為 45°，則丙、丁兩鎮間的距離約為（$\sqrt{6}\approx 2.449$）
(A)24.5 公里　(B)25 公里　(C)25.5 公里　(D)26 公里　(E)26.5 公里

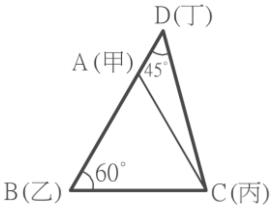
答案：(A)

解析：甲、乙、丙、丁四鎮位置如附圖所示：

$\triangle ABC$ 為正三角形，故 $\angle B=60°$，由正弦定理知

$$\frac{\overline{CD}}{\sin 60°}=\frac{\overline{BC}}{\sin 45°}\Rightarrow \overline{CD}=\frac{\sin 60°}{\sin 45°}\times\overline{BC}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times 20=10\sqrt{6}\approx 24.5，$$

故丙、丁兩鎮間的距離約為 24.5 公里，選(A)



(　　)2. 在坐標平面上，一直線 L 過 $A(3,1)$，$B(5,4)$ 兩點，且與 x 軸正向所夾的銳角為 θ，則 θ 的正切值為何？
(A)1　(B)2　(C)$\frac{3}{2}$　(D)$\frac{1}{2}$　(E)$\frac{2}{3}$

答案：(C)

解析：$\tan\theta=m_{AB}=\frac{4-1}{5-3}=\frac{3}{2}$，故選(C)。

(　　)3. 下列哪一個正切值最小？
(A)$\tan 70°$　(B)$\tan 140°$　(C)$\tan 210°$　(D)$\tan 280°$　(E)$\tan 350°$

答案：(D)

解析：(A) $\tan 70°$。

(B) $\tan 140°=\tan(180°-40°)=-\tan 40°$。

(C) $\tan 210°=\tan(210°-360°)=\tan(-150°)=-\tan 150°=-\tan(180°-30°)=\tan 30°$。

(D) $\tan 280°=\tan(280°-360°)=-\tan 80°$。

(E) $\tan 350°=\tan(350°-360°)=-\tan 10°$

$\because \tan 70°>\tan 30°>-\tan 10°>-\tan 40°>-\tan 80°$

$\Rightarrow \tan 70°>\tan 210°>\tan 350°>\tan 140°>\tan 280°$。

故選(D)。

二、多重選擇題：

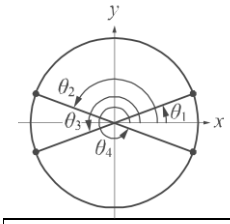
(　　)1. 設 θ_1，θ_2，θ_3，θ_4 分別為第一、第二、第三、第四象限角，且均介於 0° 與 360° 之間，已知 $|\sin\theta_1|=|\sin\theta_2|=|\sin\theta_3|=|\sin\theta_4|=\frac{1}{3}$，則下列選項何者正確？
(A)$\theta_2>150°$　(B)$\theta_3=180°+\theta_2$　(C)$\theta_1+\theta_4=360°$　(D)$\tan\theta_4=-\frac{\sqrt{2}}{4}$　(E)$\cos(\theta_2+180°)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

答案：(A)(C)(D)

解析：如附圖，

$\theta_2=180°-\theta_1$，

$\theta_3=180^\circ+\theta_1$，
$\theta_4=360^\circ-\theta_1$，
$\sin\theta_1=\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{2}=\sin 30^\circ \Rightarrow 0^\circ<\theta_1<30^\circ$，
(A) 因為 $\theta_2=180^\circ-\theta_1$ 且 $0^\circ<\theta_1<30^\circ$，
所以 $150^\circ<\theta_2<180^\circ$。
(B) 因為 $\theta_2=180^\circ-\theta_1$，$\theta_3=180^\circ+\theta_1$，
所以 $\theta_2+\theta_3=360^\circ \Rightarrow \theta_3=360^\circ-\theta_2$。
(C) 因為 $\theta_4=360^\circ-\theta_1$，所以 $\theta_1+\theta_4=360^\circ$。
(D) 因為 $\sin\theta_4=\dfrac{-1}{3}$，$\cos\theta_4=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $\tan\theta_4=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{2}}{4}$。
(E) 因為 $\sin\theta_2=\dfrac{1}{3}$，故 $\cos\theta_2=\dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$，
所以 $\cos(\theta_2+180^\circ)=-\cos\theta_2=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$。
故選(A)(C)(D)。

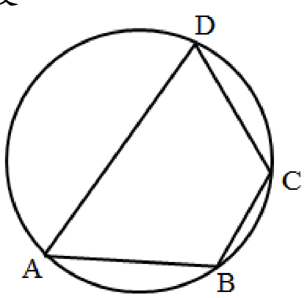


(　　)2. 下列何者是 255° 的同界角？ (A)615°　(B)975°　(C)75°　(D)-105°　(E)-465°	

答案：(A)(B)(D)(E)
解析：(A) ○：$615^\circ-255^\circ=360^\circ$。
(B) ○：$975^\circ-255^\circ=360^\circ\times2$。
(C) ×：$75^\circ-255^\circ=-180^\circ$。
(D) ○：$-105^\circ-255^\circ=360^\circ\times(-1)$。
(E) ○：$-465^\circ-255^\circ=360^\circ\times(-2)$。
故選(A)(B)(D)(E)。

三、非選題：

1. 附圖中 $ABCD$ 為圓內接四邊形。已知 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CD}=5$，$\overline{DA}=8$，求對角線 $\overline{BD}$ 的長度。



答案：7
解析：$\angle A+\angle C=180^\circ \Rightarrow \cos A+\cos C=0$
$\triangle ABD$ 與 $\triangle CBD$ 中
$\overline{BD}^2=5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cdot\cos A=89-80\cos A$…①
$\overline{BD}^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\cos C=34-30\cos C$…②

①×3＋②×8：$11\times\overline{BD}^2=539\Rightarrow\overline{BD}=7$

2. 坐標平面上，以 A 點為極點，其正東方向為極軸，此時 B 點的極坐標可表為$[5,15^\circ]$；若改以 B 點為極點，其正東方向為極軸，此時 C 點的極坐標可表為$[16,75^\circ]$，試回答以下問題：
(1) $\angle ABC=$？
(2) $\overline{AC}=$？
(3)請寫出以 C 點為極點，其正東方向為極軸，A 點的極坐標（ 四捨五入後取到整數 ）

答案：(1)120°；(2)19；(3)$[19,242^\circ]$

解析：(1) $\angle ABC=15^\circ+(180^\circ-75^\circ)=120^\circ$

(2)$\triangle ABC$ 中，

$\overline{AC}^2=5^2+16^2-2\cdot5\cdot16\cdot\cos120^\circ=361=19^2$

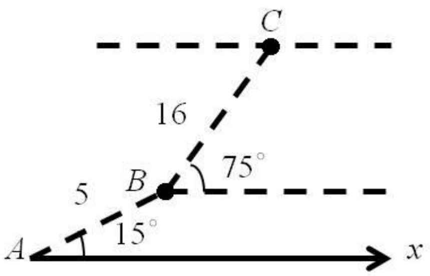
$\therefore\overline{AC}=19$

(3)$\triangle ABC$ 中，$\dfrac{19}{\sin120^\circ}=\dfrac{16}{\sin\angle BAC}$，

$\sin\angle BAC=\dfrac{8\sqrt{3}}{19}\fallingdotseq0.7292\Rightarrow\angle BAC\fallingdotseq47^\circ$，

$180^\circ+(47^\circ+15^\circ)=242^\circ$

∴所求極坐標為 $[19,242^\circ]$



四、填充題：

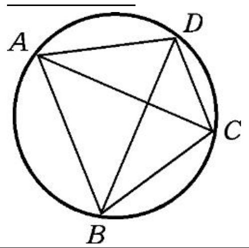
1. 設 $a=\tan47^\circ$，$b=\sin47^\circ$，$c=\cos47^\circ$，試比較 a，b，c 的大小為________。

答案：$a>b>c$

解析：$\because45^\circ<47^\circ<90^\circ\Rightarrow\tan47^\circ>\sin47^\circ>\cos47^\circ$

$\therefore a>b>c$

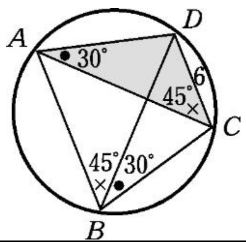
2. 如附圖所示，$ABCD$ 為圓內接四邊形，若 $\angle DBC=30^\circ$，$\angle ABD=45^\circ$，$\overline{CD}=6$，則線段 $\overline{AD}=$ ________。



答案：$\sqrt{72}$

解析：由正弦定理得：$2R=\dfrac{\overline{CD}}{\sin30^\circ}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin45^\circ}$

$\Rightarrow\overline{AD}=\dfrac{6}{\frac{1}{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}=\sqrt{72}$



3. 從 1~90 的正整數中任選一個數字，每個數字被選到的機會均等。若取到的數字為 x 時，求得 $\sin^2 x^\circ$ 的值，例如：$x=30$ 時，$\sin^2 30^\circ=(0.5)^2=0.25$，則任選一個數字，$\sin^2 x^\circ$ 的值之期望值為＿＿＿＿＿＿＿。(化為最簡分數)

答案：$\dfrac{91}{180}$

解析：$\sin^2 x^\circ=\cos^2(90^\circ+x^\circ)$

$E=\dfrac{1}{90}[\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\cdots+\sin^2 89^\circ+\sin^2 90^\circ]$

$=\dfrac{1}{90}[\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\cdots+\sin^2 44^\circ+\sin^2 45^\circ+\cos^2 44^\circ+\cdots+\cos^2 1^\circ+\sin^2 90^\circ]$

$=\dfrac{1}{90}[44+(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2+1^2]=\dfrac{91}{180}$。

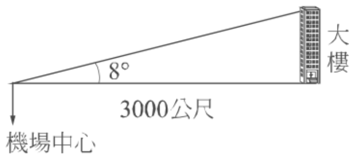
4. 某機場基於飛航安全考量，限制機場附近建築物，從機場中心地面到建築物頂樓的仰角不超過 8°。某建築公司打算在離機場中心 3 公里，且地表高度和機場中心一樣高的地方，蓋一棟平均每樓層高 5 公尺的大樓。在符合機場的限制規定下，該大樓在地面以上最多可以蓋＿＿＿＿層樓。($\sin 8^\circ=0.1392$，$\cos 8^\circ=0.9903$，$\tan 8^\circ=0.1405$)

答案：84

解析：大樓高度$<3000\times\tan 8^\circ=3000\times0.1405=421.5$，

$421.5\div5=84.3$

∴ 最多 84 層樓



5. 在$\triangle ABC$中，三邊中線長分別為 9，12，15，則$\triangle ABC$的面積為＿＿＿＿。

答案：72

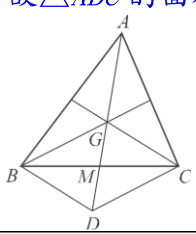
解析：設$\triangle ABC$的重心為 G，M 為$\overline{BC}$之中點，

在射線$\overrightarrow{AM}$上取一點 D，使得$\overline{MD}=\overline{GM}$，又$\overline{BM}=\overline{MC}$，

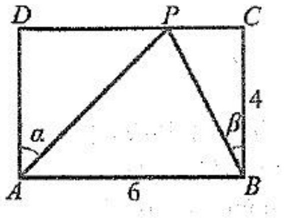
所以▱$BGCD$ 為平行四邊形，可得

$\triangle BGD$ 的面積$=(\dfrac{2}{3})^2\times\sqrt{18\times9\times6\times3}=\dfrac{4}{9}\times54=24$，

故$\triangle ABC$的面積$=3\times\triangle BGC=3\times\triangle BGD=3\times24=72$。



6. 矩形 $ABCD$ 中，設 P 為$\overline{CD}$上一點，且$\angle PAD=\alpha$，$\angle PBC=\beta$。已知$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=4$，求 $\tan\alpha+\tan\beta$ 的值為＿＿＿＿＿＿。



答案：$\dfrac{3}{2}$

解析：$\tan\alpha=\dfrac{\overline{DP}}{4}$，$\tan\beta=\dfrac{\overline{PC}}{4}$

$\therefore \tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{\overline{DP}+\overline{PC}}{4}=\dfrac{\overline{DC}}{4}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$。

7. 平面上有一箏形 $ABCD$，其中 $\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{2}$，$\overline{AD}=\overline{CD}=2$，$\angle BAD=135^\circ$。則 $\overline{AC}=$ ______。（化為最簡根式）

答案：$\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

解析：在△ABD 中，由餘弦定理得

$\overline{BD}^2=2^2+(\sqrt{2})^2-2\times2\times\sqrt{2}\times\cos 135^\circ$

$=4+2-4\sqrt{2}\times(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=10$

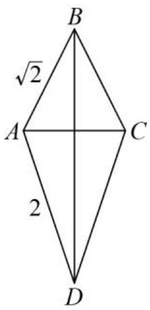
$\therefore\ \overline{BD}=\sqrt{10}$

箏形面積 $=2\triangle ABD=2\times(\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\times\sin 135^\circ)$

$=2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2$，

又箏形面積 $=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\sqrt{10}=2\Rightarrow\overline{AC}=\dfrac{4}{\sqrt{10}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

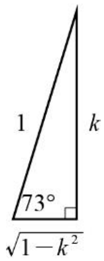


8. 設 $\sin 793^\circ=k$，則 $\tan 107^\circ=$ ______。（以 k 表示）

答案：$-\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$

解析：$\sin 793^\circ=\sin 73^\circ=k$

$\tan 107^\circ=-\tan 73^\circ=-\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$



9. 學校辦理校外教學活動，第一天行程安排為歷史古蹟巡禮，師生們來到一建築宏偉之高塔，其塔高為 100 公尺，學生好美與好帥分別站在高塔的正東方與高塔的西 30° 南的地面位置，兩人觀測塔頂的仰角分別為 45°、30°，請問學生好美與好帥兩人的距離為＿＿＿＿＿公尺。

答案：$100\sqrt{7}$

解析：高塔 $\overline{PQ}$，好美 A，好帥 B，

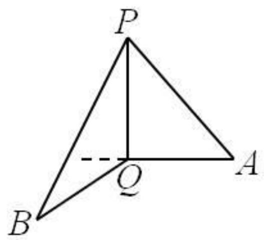
$\dfrac{100}{\overline{AQ}}=\tan 45^{\circ}$，$\dfrac{100}{\overline{BQ}}=\tan 30^{\circ}$，$\angle AQB=150^{\circ}$

$\Rightarrow \overline{AQ}=100$，$\overline{BQ}=100\sqrt{3}$，

$\overline{AB}^2=100^2+(100\sqrt{3})^2-2\cdot 100\cdot 100\sqrt{3}\cdot\cos 150^{\circ}$

$=100^{\circ}(1+3+3)=100^2\text{x}7$

$\therefore$兩人距離為 $100\sqrt{7}$（公尺）



10. $\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長分別為 a、b、c，$\triangle ABC$ 的三邊滿足 $a-2b+c=0$，$2a+b-2c=0$，則

(1) $\sin A:\sin B:\sin C=$＿＿＿＿＿。

(2) $\cos A=$＿＿＿＿＿，$\sin A=$＿＿＿＿＿。

(3) $\triangle ABC$ 的周長 $12\sqrt{2}$，求$\triangle ABC$ 外接圓的面積＝＿＿＿＿＿。

答案：(1)3：4：5；(2) $\dfrac{4}{5}$；$\dfrac{3}{5}$；(3) $\dfrac{25}{2}\pi$

解析：(1) $\begin{cases} a-2b=-c & \cdots ① \\ 2a+b=2c & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①＋②×2 得 $5a=3c$，故 $a=\dfrac{3}{5}c$，代入②得 $b=\dfrac{4}{5}c$，

所以 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=\dfrac{3}{5}c:\dfrac{4}{5}c:c=3:4:5$

(2) $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{16+25-9}{2\times 4\times 5}=\dfrac{4}{5}$，

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-(\dfrac{4}{5})^2}=\dfrac{3}{5}$

(3) 令 $a=3k$，$b=4k$，$c=5k$，$k>0$，則 $3k+4k+5k=12\sqrt{2}\Rightarrow k=\sqrt{2}$，

故 $a=3\sqrt{2}$，$b=4\sqrt{2}$，$c=5\sqrt{2}$，

因△ABC是直角三角形，故其外接圓面積＝$(\frac{5\sqrt{2}}{2})^2\pi=\frac{25}{2}\pi$

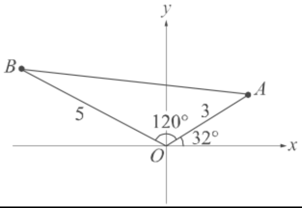
11. 已知 A，B 兩點的極坐標分別為 $A[3，32^\circ]$，$B[5，152^\circ]$，O 為原點，則△AOB 的面積為________。

答案：$\frac{15\sqrt{3}}{4}$

解析：$\angle AOB=152^\circ-32^\circ=120^\circ$，

如附圖

∴ △AOB 面積＝$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot \sin 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$



12. 設 $\sin 1014^\circ=k$，則 $\tan 246^\circ=$________。（以 k 表示）

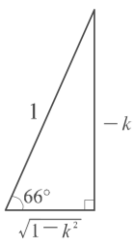
答案：$\frac{-k}{\sqrt{1-k^2}}$

解析：$\sin 1014^\circ=\sin(1014^\circ-360^\circ\times 3)=-\sin 66^\circ=k$

$\Rightarrow \sin 66^\circ=-k$，

如附圖

∴ $\tan 246^\circ=\tan(-114^\circ)=-\tan(180^\circ-66^\circ)=\tan 66^\circ=\frac{-k}{\sqrt{1-k^2}}$



<另解>

$\tan 246^\circ=\tan(180^\circ+66^\circ)=\tan 66^\circ=\frac{-k}{\sqrt{1-k^2}}$。

13. 求 $\sqrt{3}\tan 60^\circ+\sqrt{2}\sin 45^\circ-\sin 30^\circ=$______。

答案：$\frac{7}{2}$

解析：原式＝$\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}=3+1-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

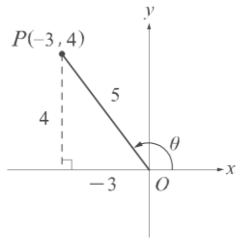
14. 設 $P(-3，4)$ 為廣義角 θ 終邊上一點，求 $\frac{2\cos\theta+3}{\sin\theta-1}=$________。

答案：-9

解析：作附圖，

$\cos\theta=-\frac{3}{5}$，$\sin\theta=\frac{4}{5}$

∴ $\frac{2\cos\theta+3}{\sin\theta-1}=\frac{2\times(-\frac{3}{5})+3}{\frac{4}{5}-1}=-9$



15. 等腰直角三角形 ABC 中，$\angle A=90^\circ$，$\overline{AB}=3\sqrt{2}$，今將 $\overline{BC}$ 三等分，D、E 為等分點，則 $\overline{AD}$ ＝______。

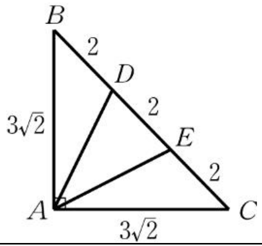
答案：$\sqrt{10}$

解析：$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2\overline{AB}\times\overline{BD}\times\cos 45^\circ$

$=18+4-2\times3\sqrt{2}\times2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=22-12$

$=10$

$\therefore\ \overline{AD}=\sqrt{10}$



16. 小明站在坐標平面的原點 O，則學校（ A 點 ）在他的正東方，補習班（ B 點）在他的北 30° 西。若學校與補習班的中點為便利商店，且便利商店剛好在小明的正北方。設 $\angle OAB=\theta$，則 $\tan^2\theta$ ＝__________。

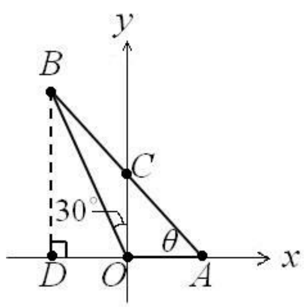
答案：$\dfrac{3}{4}$

解析：如圖，便利商店 C，C 為 $\overline{AB}$ 之中點，

作 $\overline{BD}\perp x$ 軸 $\Rightarrow \overline{BD}=2\cdot\overline{OC}$，$\overline{OD}=\overline{AO}$，

$\triangle ODB$ 中，$\tan 60^\circ=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\dfrac{2\cdot\overline{OC}}{\overline{OA}}=2\cdot\tan\theta$，

$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\ \tan^2\theta=\dfrac{3}{4}$。



17. 已知 $\triangle ABC$ 的兩邊 $\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=5$，且 $\cos B=\dfrac{5}{9}$，則 $\triangle ABC$ 的面積為________。

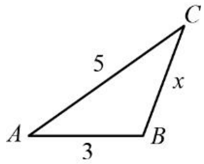
答案：$2\sqrt{14}$

解析：$\cos B=\dfrac{5}{9}$，$\sin B=\dfrac{\sqrt{56}}{9}$

$\Rightarrow \dfrac{3^2+x^2-5^2}{2\cdot 3\cdot x}=\dfrac{5}{9}$

$\therefore\ x=6$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times 3\times 6\times \sin B=\dfrac{1}{2}\times 18\times \dfrac{\sqrt{56}}{9}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$



18. 已知 A，B 兩點的極坐標分別為 $A[8，70^\circ]$，$B[6，310^\circ]$，則 $\overline{AB}=$________。

答案：$2\sqrt{37}$

解析：設 O 為原點，

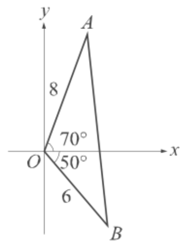
310° 的最大負同界角為 -50°，

如附圖，

得 $\angle AOB=70^\circ-(-50^\circ)=120^\circ$，

$\overline{AB}^2=8^2+6^2-2\times 8\times 6\times\cos 120^\circ=64+36+48=148$

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{148}=2\sqrt{37}$



19. 已知 θ 角的終邊經過點 $(x,-2)$，且 $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$，求數對 $(\sin\theta,\ x)=$________。

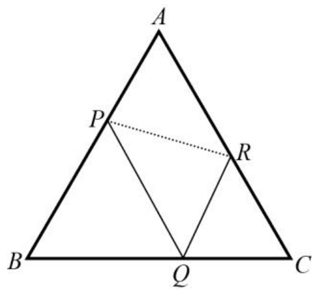
答案：$(-\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{2})$

解析：$\tan\theta=\dfrac{4}{3}=\dfrac{-2}{x}\Rightarrow x=-\dfrac{3}{2}$，故 θ 為第三象限角，

$\sin\theta=\dfrac{-2}{\sqrt{(-\frac{3}{2})^2+(-2)^2}}=\dfrac{-2}{\frac{5}{2}}=-\dfrac{4}{5}$

$\therefore (\sin\theta,\ x)=(-\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{2})$

20. 在邊長為 13 的正三角形 ABC 上各邊分別取一點 P, Q, R，使得 $APQR$ 形成一平行四邊形，如附圖所示，若平行四邊形 $APQR$ 的面積為 $20\sqrt{3}$，則線段 PR 的長度為________。



答案：7

解析：設 $\overline{AP}=x$，則 $\overline{QR}=x$ 且 $\triangle CQR$ 為正三角形

$\therefore\ \overline{AR}=13-x$

$\Rightarrow$ 平行四邊形 $APQR$ 面積為 $20\sqrt{3}=2\cdot\triangle APR$ 面積

$\Rightarrow$ $20\sqrt{3}=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot x\cdot(13-x)\cdot\sin 60^\circ$

$\Rightarrow$ $20\sqrt{3}=x\cdot(13-x)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ $x^2-13x+40=0\Rightarrow(x-5)(x-8)=0\Rightarrow x=5$ 或 8

由餘弦定理得在$\triangle APR$ 中，$\overline{PR}=\sqrt{5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cos 60^\circ}=\sqrt{49}=7$