高中 數學 科考試卷 ____年____班 座號：_____ 姓名：__________

一、單選題：

(　　)1. 數列〈a_n〉為一等差數列，設 $a_{15}=35$ 且 $a_{30}=-10$，若首項為 a_1，公差為 d，則 $a_1+d=$
(A)77 (B)75 (C)80 (D)74 (E)82

答案：(D)

解析：$a_{15}=a_1+14d=35$…①

$a_{30}=a_1+29d=-10$…②

故 $15d=-45 \Rightarrow d=-3$ 代入①

$a_1=77$，$a_1+d=74$

(　　)2. 設〈a_n〉,〈b_n〉為二等差數列，試問下列敘述何者恆正確？
(A)〈$4a_n$〉為等差數列 (B)〈$a_n \cdot b_n$〉為等差數列 (C)〈$3+a_n$〉為等比數列 (D)〈$(a_n)^2$〉為等比數列 (E)〈a_n+b_n〉為等比數列

答案：(A)

解析：(A) 正確

令 $a_n=a+(n-1)d$，$n=1$，2，3，…，首項為 a，公差為 d

$4a_n=4a+(n-1)4d$

$4a_n$ 首項 $4a$，公差 $4d$，故〈$4a_n$〉為等差數列

(　　)3. 有一等比數列〈3^n〉共有 20 項，若奇次項的總和和偶次項的總和分別為 P, Q，則下列何者正確？
(A)$3P=Q$ (B)$P=3Q$ (C)$P=Q$ (D)$3^{10}\times P=Q$

答案：(A)

解析：$P=3^1+3^3+3^5+\ldots+3^{19}$，

$Q=3^2+3^4+3^6+\ldots+3^{20}$

$=3(3+3^3+3^5+\ldots+3^{19})=3P$，

故選(A)。

二、多重選擇題：

(　　)1. 有一個 71 項的等差數列 a_1，a_2，…，a_{71}，其和為 0 且 $a_{51}=51$，則下列何者正確？
(A)$a_1+a_{71}>0$ (B)$a_2+a_{70}<0$ (C)$a_3+a_{69}=0$ (D)$a_{36}=36$ (E)$a_1<0$

答案：(C)(E)

解析：∵ 和為 0 ∴ $a_1+a_{71}=0$，$a_2+a_{70}=0$

$a_3+a_{69}=0$，$a_{36}=0$，故(C)正確。

而 $\begin{cases} a_{51}=51 \\ a_1+a_{71}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1+50d=51 \\ 2a_1+70d=0 \end{cases} \Rightarrow d=\dfrac{17}{5}$，$a_1=-119$

(　　)2. 已知 a_1，a_2，a_3 為一等差數列，而 b_1，b_2，b_3 為一等比數列，且此六數皆為實數。試問下列哪些選項是正確的？
(A)$a_1<a_2$ 與 $a_2>a_3$ 可能同時成立 (B)$b_1<b_2$ 與 $b_2>b_3$ 可能同時成立 (C)若 $a_1+a_2<0$，則 $a_2+a_3<0$ (D)若 $b_1b_2<0$，則 $b_2b_3<0$ (E)若 b_1，b_2，b_3 皆為正整數且 $b_1<b_2$，則 b_1 整除 b_2

答案：(B)(D)

解析：(A) ∵a_1，a_2，a_3 為等差數列，

由等差基本定義知 $a_2-a_1=a_3-a_2$，若 $a_2>a_1$，即 $a_3>a_2$。

(B) b_1，b_2，b_3 成等比 ∴$b_2^{\,2}=b_1b_3$，

當 $b_2>0$，b_1，b_3 同時為負時，則 $b_1<b_2$ 與 $b_2>b_3$ 可能同時成立。

(C) 設 $a_1=-4$，$a_2=-1$，$a_3=2$，則 $a_1+a_2<0$，但 $a_2+a_3>0$。

(D) b_1，b_2，b_3 成等比，故 $b_2=b_1r$，$b_3=b_1r^2$，r 表公比，

若 $b_1b_2<0$，即 $b_1^{\,2}r<0 \Rightarrow r<0$，故 $b_2b_3=b_1^{\,2}r^3<0$。

(E) $\because b_1$，b_2，b_3 為正整數且成等比，即 $b_2=b_1\times r$，

若 $b_1=4$，$b_2=6$，$r=\dfrac{3}{2}$，則 b_1 不能整除 b_2。

由上述得知應選(B)(D)。

三、填充題：

1. 某三正整數成等差數列，其和為 21，若各項依次加 1，3，14 後，則成等比數列，試問此三數為______。

答案：3，7，11

解析：設三數 $a-d$，a，$a+d$

$\because a-d+a+a+d=21\Rightarrow a=7$

$7-d$，7，$7+d$

加 1，3，14 $\Rightarrow 8-d$，10，$21+d$ 成等比

$10^2=(8-d)(21+d)$

$\Rightarrow 100=168-13d-d^2$

$\Rightarrow d^2+13d-68=0$

$\Rightarrow (d+17)(d-4)=0\Rightarrow d=4$，$d=-17$ （不合）

三數 3，7，11

2. 在-22 與 344 之間插入 60 項，使其成一等差數列，求此數列的第 13 項為________。

答案：50

解析：$a_1=-22$

$a_{62}=344=-22+61\times d$，$366=61d$，$d=6$

$\therefore\ a_{13}=-22+12\times 6=50$

3. 一等差數列的 $a_5=2$，$a_{10}=17$，求 $a_{30}=$________。

答案：77

解析：$\begin{cases}a_1+4d=2\\a_1+9d=17\end{cases}\Rightarrow d=3$，$a_1=-10$

$\therefore\ a_{30}=-10+29\times 3=77$

4. 設〈$3n-1$〉，〈$7n+4$〉的一切共同項所組成的數列為〈c_n〉，則 $c_n=$______。

答案：$21n-10$

解析：〈$3n-1$〉：2，5，8，<u>11</u>，14，17，20，…

〈$7n+4$〉：<u>11</u>，18，…

3 與 7 的最小公倍數為 21，<$3n-1$>與<$7n+4$>第一個相同的數為 11，故它們共同項為 $21n-10$。

5. 設 a，b，c，d 成等比數列，公比不為±1，則 $\dfrac{a-2b}{a-c}+\dfrac{2c-d}{b-d}$ 之值為_____。

答案：1

解析：設公比為 r，則 $b=ar$，$c=ar^2$，$d=ar^3$

$$\frac{a-2b}{a-c}+\frac{2c-d}{b-d}=\frac{a-2ar}{a-ar^2}+\frac{2ar^2-ar^3}{ar-ar^3}$$

$$=\frac{1-2r}{1-r^2}+\frac{2r-r^2}{1-r^2}=\frac{1-r^2}{1-r^2}=1$$

6. 設 a，b，c 三數成等比數列且公比大於 1，其和為 49，若依次減去 1，2，7 後則三數成等差數列，求 c 之值為______。

答案：25

解析：設公比為 r，則 $b=ar$，$c=ar^2$

$$\begin{cases}a+ar+ar^2=49\\2(ar-2)=a-1+(ar^2-7)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+ar+ar^2=49\\a+ar^2=2ar+4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ar=15\\a+ar^2=34\end{cases}$$

由 $ar=15 \Rightarrow a=\dfrac{15}{r}$ 代入 $a+ar^2=34$

$\Rightarrow \dfrac{15}{r}+15r=34 \Rightarrow 15r^2-34r+15=0$

$\Rightarrow (3r-5)(5r-3)=0 \Rightarrow r=\dfrac{5}{3}$ 或 $r=\dfrac{3}{5}$ (不合)

$\because\ ar=15$，$r=\dfrac{5}{3}$ $\quad\therefore\ c=ar^2=25$

7. 等比數列 $\langle a_n \rangle$，已知 $a_3=12$，$a_5=108$，則 $a_8=$______。

答案：±2916

解析：設首項為 a，公比為 r，由 $a_3=12$，$a_5=108$ 得 $\begin{cases} ar^2=12 \cdots ① \\ ar^4=108 \cdots ② \end{cases}$

①代入② $\Rightarrow r^2=9 \Rightarrow r=\pm 3$，$a=\dfrac{12}{9}=\dfrac{4}{3}$

$a_8=ar^7=108 \cdot r^3=\begin{cases} 108(3^3)=2916, & r=3 \\ 108(-3)^3=-2916, & r=-3 \end{cases}$

$\therefore\ a_8=\pm 2916$

8. 三整數成等比數列，其和為 39，若此三數之平方和為 819，則此三數由小而大排列為______。

答案：3，9，27

解析：設三數為 a，ar，ar^2

$\begin{cases} a+ar+ar^2=39 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ a^2+a^2r^2+a^2r^4=819 \cdots ② \end{cases}$

$\dfrac{②}{①} \Rightarrow a(r^2-r+1)=21 \ldots ③$

$\dfrac{①}{③} \Rightarrow \dfrac{r^2+r+1}{r^2-r+1}=\dfrac{39}{21}=\dfrac{13}{7}$

$13r^2-13r+13=7r^2+7r+7$

$\Rightarrow 6r^2-20r+6=0 \Rightarrow 3r^2-10r+3=0$

$\Rightarrow (3r-1)(r-3)=0 \Rightarrow r=\dfrac{1}{3}$ 或 3

$r=\dfrac{1}{3}$，$a+\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{9}a=39$

$\Rightarrow 13a=39\times 9 \Rightarrow a=27$

$\therefore$ 三數 27，9，3

$r=3$，$a+3a+9a=39 \Rightarrow a=3$

$\therefore$ 三數 3，9，27

9. 設有限數列 $-4, x, 12, y$，其中前三項為等差數列，後三項為等比數列，則 $x+y$ 之值為________。

答案：40

解析：$-4, x, 12$ 成等差

$\Rightarrow x=\dfrac{-4+12}{2}=4$, ……①

$x, 12, y$ 成等比 $\Rightarrow 12^2=xy$, ……②

由①代入②得 $12^2=4y \Rightarrow y=36$

$\therefore x+y=4+36=40$

10. 一等比數列共有八項，且其奇數項和為 -6，偶數項和為 9，則其公比為________。

答案：$-\frac{3}{2}$

解析：設公比為 r

$\Rightarrow r=\frac{a_2+a_4+a_6+a_8}{a_1+a_3+a_5+a_7}=\frac{9}{-6}=-\frac{3}{2}$

$\therefore$ 公比為$-\frac{3}{2}$