B2-04 數列與級數【基礎篇】

【主題 1】數列的表示

焦點 1. 數列

將一些實數依序排成一列，形如 a_1，a_2，……，a_n，……，
即形成一數列，以符號〈a_n〉表示。其中 a_1 稱為第一項（首項），a_2 稱為第二項，……，依此類推，a_n 稱為第 n 項，又稱為一般項。

【範例 1】數列 $< a_n >$ 的意義

（1）試寫出數列 $< 3n-2 >$ 的前五項。

（2）試寫出數列 $< 4\times(\frac{2}{3})^n >$ 的前五項。

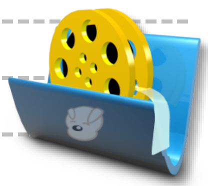
（3）設數列 $< a_n >$ 的一般項為 $a_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$，$n \in N$，試寫出此數列的前五項。

解：（1） 1，4，7，10，13

（2） $\frac{8}{3}$，$\frac{16}{9}$，$\frac{32}{27}$，$\frac{64}{81}$，$\frac{128}{243}$

（3） -1，-1，0，2，5

NOTE



焦點 2. 數列一般項

【口訣】 等差成倍(加減調整)。
等比成次(乘除調整)。
乘除分別。

【範例 1】等差數列與等比數列的一般項

依下列各數列$\langle a_n\rangle$之規則，求下列各數列之一般項 a_n

(1) 5，8，11，14，17，…

(2) 6，12，24，48，…

(3) 2，−2，2，−2，…

(4) (1×2)，(2×3)，(3×4)，…

(5) (2×4)，(4×7)，(8×10)，…

(6) $-\frac{5}{3}$，$\frac{10}{5}$，$-\frac{20}{7}$，$\frac{40}{9}$，…

解：(1) $a_n=3n+2$，$n\in N$　(2) $a_n=3\times 2^n$，$n\in N$

(3) $a_n=2\times(-1)^{n+1}$，$n\in N$　(4) $a_n=n\times(n+1)$，$n\in N$

(5) $a_n=2^n\times(3n+1)$，$n\in N$

(6) $a_n=(-1)^n\times\dfrac{\frac{5}{2}\times 2^n}{2n+1}=(-1)^n\times\dfrac{5\times 2^{(n-1)}}{2n+1}$，$n\in N$

NOTE

【範例 3】以級數 S_n 求 a_n

已知級數 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3n^2$，求

（1）此數列從第 5 項到第 20 項的和。

（2）S_{n-1} =______ （$n \geq 2$）

（3）a_k =______，a_5 =______。

$$key：\begin{cases} 當\ n=1，a_1 = S_1 \\ 當\ n \geq 2，a_n = S_n - S_{n-1} \end{cases}$$

解：（1）$S_{20} - S_4 = 3 \times 20^2 - 3 \times 4^2 = 1152$

（2）$S_{n-1} = 3 \times (n-1)^2$，$n \geq 2$

（3）$a_k = S_k - S_{k-1} = 3k^2 - 3(k-1)^2 = 6k - 3 \quad (k \in N)$；

$a_5 = 6 \times 5 - 3 = 27$

【範例 4】以級數 S_n 求 a_n

已知級數 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3n + 4$，求

（1）此數列從第 11 項到第 20 項的和。

（2）a_k =______，a_5 =______。

解：（1）$S_{20} - S_{10} = (3 \times 20 + 4) - (3 \times 10 + 4) = 64 - 34 = 30$

（2）$\begin{cases} 當\ k=1，a_1 = 7 \\ 當\ k \geq 2，a_k = S_k - S_{k-1} = 3 \end{cases}$，$a_5 = 3$

【主題 2】等差數列【A.P】與等比數列【G.P】

焦點 1. 等差數列【A.P】

(1)一數列若後項減前項的差為固定數，則稱此數列為等差數列，此固定數稱為其公差。

(2)設數列 $\langle a_n \rangle$成等差，公差為 d 則：

❶ $d = a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} = \cdots = a_2 - a_1$

❷ $a_n = a_1 + (n-1)d = a_k + (n-k)d$ ，$d = \dfrac{a_n - a_k}{n-k}$

❸ a，b，c 成等差 $\Rightarrow 2b = a + c$ ；$b = \dfrac{a+c}{2}$

❹ 在$[a, b]$內插入n個數使其成等差數列則：$d = \dfrac{b-a}{(n+2)-1}$

焦點 2. 等比數列【G.P】

(1)一數列若後項除以前項的比為固定數，則稱此數列為等比數列，此固定數稱為其公比。※ $a_1 \neq 0$

(2) 設數列$\langle a_n \rangle$成等比，公比為 r：

❶ $r = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \cdots = \dfrac{a_2}{a_1}$ 。

❷ $a_n = a_1 \times r^{n-1} = a_k \times r^{n-k}$ 。

❸ a，b，c 成等比 $\Rightarrow b^2 = a \times c$ ；$b = \pm\sqrt{a \times c}$

❹ 在$[a, b]$內插入n個數使其成等比數列則： $r^{(n+2)-1} = \dfrac{b}{a}$

❺ $a, b > 0 \Rightarrow \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \times b}$ 【等號成立則 $a = b$ 】

【範例 1】等差數列與等比數列的一般項

設 4，7，10，13，… 為一等差數列，則
(1) 第 12 項為 ______。
(2) 一般項 a_n 為 _______。
(3) 若 $a_n = 88$，則 $n =$______。

解：
(1) $a_1 = 4$，$d = 3$，$a_{12} = 4 + (12-1)\times 3 = 37$
(2) $a_n = 4 + (n-1)3 = 3n+1$，$n \in N$
(3) $88 = 3\times n + 1$，$n = 29$

【範例 2】等差數列與等比數列的一般項

設 $\frac{5}{27}$，$-\frac{5}{9}$，$\frac{5}{3}$，-5，… 為一等比數列，則
(1) 第 6 項為 ______。
(2) 一般項 a_n 為 _______。
(3) 若 $a_n = -3645$，則 $n =$______。

解：
(1) $a_1 = \frac{5}{27}$，$r = \frac{-5}{9} \div \frac{5}{27} = -3$ $a_6 = \frac{5}{27}\times(-3)^{6-1} = \frac{5}{27}\times(-3)^5 = -45$

(2) $a_n = \frac{5}{27}\times(-3)^{n-1}$
$= (-1)^{n-1}\times 5\times(3)^{-3}\times(3)^{n-1} = (-1)^{n-1}\times 5\times 3^{n-4}$，$n \in N$

(3) $-3645 = \frac{5}{27}\times(-3)^{n-1}$，$-729\times 27 = (-3)^{n-1}$
$(-3)^{6+3} = (-3)^{n-1}$，$\therefore\ n = 10$

【範例 3】等差數列

一等差數列 $a_{10}=23$ ，$a_{25}=-22$ 則

（1） $a_1=$______，$d=$______。

（2） $a_{40}=$______。

（3）從第幾項開始為負？

解：（1） $\begin{cases} a_1+9d=23 \\ a_1+24d=-22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=50 \\ d=-3 \end{cases}$

（2） $a_{40}=50+(40-1)\times(-3)=-67$

（3） 設 $a_k<0 \ \Rightarrow \ 50+(k-1)\times(-3)<0 \quad k-1>\dfrac{50}{3}=16\dfrac{2}{3}$

$\therefore \ k=18$

第 18 項始為負。

【範例 4】等差數列

一等差數列共有 19 項，若其正中央三項的和為 45，末三項的和為 165，則第 12 項為 ______。

解：

$$\begin{cases} a_9+a_{10}+a_{11}=45 \\ a_{17}+a_{18}+a_{19}=165 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a_1+27d=45 \\ 3a_1+51d=165 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=-30 \\ d=5 \end{cases}$$

$a_{12}=-30+11\times5=25$

【範例 5】等差數列

已知數列$<a_n>$是等差數列，則下列何者也是等差數列？（多選）

(A) $<f_n>=<a_n+3n+5>$　　(B) $<c_n>=<\frac{1}{3}a_n>$

(C) $<d_n>=<|a_n|>$　　(D) $<e_n>=<\frac{1}{a_n}>$

(E) $<f_n>=<3a_n+5>$

解：(A) ○　(B) ○　(C) X　(D) X　(E) ○

【範例 6】等比數列

一等比數列$<a_n>$，$a_3=\frac{1}{2}$，$a_5=2$，且$r<0$，則$a_6=$________。

解：

$$\begin{cases} a_1\times r^2=\frac{1}{2} \\ a_1\times r^4=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\pm 2\ \ (2\text{不合}) \\ a_1=\frac{1}{8} \end{cases}$$

$$a_6=\frac{1}{8}\times(-2)^5=-4$$

【範例 7】等比數列

一等比數列$<a_n>$，若$a_2+a_4=10$，$a_3+a_5=\frac{10}{3}$，

則 $a_1=$________，$r=$________。

解：

$$\begin{cases} a_1\times r+a_1\times r^3=10 \\ a_1\times r^2+a_1\times r^4=\frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r(1+r^2)=10 \\ a_1 r^2(1+r^2)=\frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\frac{1}{3} \\ a_1=27 \end{cases}$$

【範例 8】等比數列

設數列$<a_n>$與$<b_n>$都是等比數列，則下列何者也是等比數列？

(A) $<a_n \times b_n>$　　(B) $<(a_n)^2>$　　(C) $<2^{a_n}>$

(D) $<a_n + b_n>$　　(E) $<a_n \times b_n>$

解：(A) ○　(B) ○　(C) X　(D) X　(E) ○

【範例 9】插入 n 個數

在-2與16之間插入5個數，使其成為等差數列，求

(1) 此數列的公差。

(2) 插入的第 3 個數是多少。

解：

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_1 + 6d = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -2 \\ d = 3 \end{cases}$$

$$a_4 = a_1 + 3d = -2 + 9 = 7$$

【範例 10】插入 n 個數

在3與3072之間插入9個數，使其成為等比數列，求插入的第 4 個數是多少。

解：

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{11} = a_1 \times r^{10} = 3072 \end{cases} \Rightarrow r^{10} = 1024 \Rightarrow r = \pm 2$$

(1) $r = 2 \Rightarrow a_5 = 3 \times 2^4 = 48$

(2) $r = -2 \Rightarrow a_5 = 3 \times (-2)^4 = 48$

【範例 11】三數成等差

三數成等差數列，其和是 15，積是 80，求此三數。

解：

設三數為 $a-d$ 、a 、 $a+d$

$$\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=15\\(a-d)\times a\times(a+d)=80\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5\\d=\pm 3\end{cases}$$

此三數為 2 、5 、8 或 8 、5 、2 。

【範例 12】三數成等比

三數成等比數列，其和是 39，積是 1000，求此三數。

解：

設三數為 $\frac{a}{r}$ 、a 、 ar

$$\begin{cases}\frac{a}{r}+a+ar=39\\\frac{a}{r}\times a\times ar=1000\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a(\frac{1}{r}+1+r)=39\\a^3=1000\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{r}+1+r=\frac{39}{10}\\a=10\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}r=\frac{5}{2}\ or\ \frac{2}{5}\\a=10\end{cases}$$

(1) $r=\frac{5}{2}$ 時，此三數為 4 、10 、25

(2) $r=\frac{2}{5}$ 時，此三數為 25 、10 、4

【範例 13】等差與等比

設三數成等差數列，其和是 15，若第一數不變，第二數減 1，第三數加 7，則所得三數成等比數列，求原三數。

解：

設三數為 $a-d$、a、$a+d$

$$\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=15\\ \dfrac{a-1}{a-d}=\dfrac{a+d+7}{a-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5\\ \dfrac{4}{5-d}=\dfrac{12+d}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5\\ d=4\ or\ -11\end{cases}$$

此三數為 16、5、-6 或 1、5、9。

【主題 3】遞迴數列

1.遞迴數列的定義：

一般而言，若一數列的後項，可以根據其前項之某種規則而推得，這樣的數列就稱為遞迴數列。而一開始給定的值稱為初始值。

2.等差數列的遞迴定義式：$\begin{cases} a_1=a \\ a_n=a_{n-1}+d，n\geq 2，d \text{ 為常數} \end{cases}$。

3.等比數列的遞迴定義式：$\begin{cases} a_1=a\ (a\neq 0) \\ a_n=r\times a_{n-1}，n\geq 2，r \text{ 為常數}，r\neq 0 \end{cases}$。

4.遞迴定義式：我們可利用 $\begin{cases} a_1=a \\ a_{n+1}=f(a_n)\,,\,n\in N \end{cases}$ 的方式來定義一數列 $<a_n>$，此種定義方式稱為遞迴定義式。

【範例 1】遞迴數列的定義

寫出下列遞迴數列的前五項

(1) $\begin{cases} a_1=5 \\ a_n=a_{n-1}+9，n\geq 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} a_1=4 \\ a_n=3\times a_{n-1}，n\geq 2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} a_1=4 \\ a_n=3-\dfrac{2}{a_{n-1}}，n\geq 2 \end{cases}$。

解：(1) 5，14，23，32，41

(2) 4，12，36，108，324

(3) $4，\dfrac{5}{2}，\dfrac{11}{5}，\dfrac{23}{11}，\dfrac{47}{23}$

【範例 2】遞迴數列的定義

寫出下列遞迴數列的前五項

(1) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 2n^2, n \geq 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = 2a_{n-1} + 3n, n \geq 2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} a_1 = 2, \ a_2 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$ 。

解：(1) 1，9，27，59，109

(2) 4，14，37，86，187

(3) 2，3，5，8，13

【範例 3】遞迴數列

設數列$\langle a_n \rangle$滿足 $a_1 = 1$ 且 $a_n = \dfrac{4 - a_{n-1}}{3 - a_{n-1}}$， $n \geq 2$，求出 a_2，a_3 之值，並推測 a_n（以 n 表示）。

解：

$$a_2 = \frac{4 - a_1}{3 - a_1} = \frac{4-1}{3-1} = \frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{4 - a_2}{3 - a_2} = \frac{4 - \frac{3}{2}}{3 - \frac{3}{2}} = \frac{5}{3}, \quad a_n = \frac{2n-1}{n}$$

$\because$ a_1 也滿足 a_n 之結構，故無需另表之。

【範例 4】遞迴數列

數列$\langle a_n \rangle$滿足 $a_1 = 4$， $a_{n+1} = \dfrac{1}{1 - a_n}$，$n$ 為正整數，則下列哪些選項的值也是 4？

(A) a_{2016} (B) a_{2017} (C) a_{2018} (D) a_{2019} (E) a_{2020}

解：

$a_1=4$ ，$a_2=\dfrac{1}{1-a_1}=\dfrac{1}{1-4}=-\dfrac{1}{3}$ ，$a_3=\dfrac{1}{1-a_2}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{4}$

$a_4=\dfrac{1}{1-a_3}=\dfrac{1}{1-\frac{3}{4}}=4$　故每 3 項一循環

$\Rightarrow\ a_{2017}=a_{2020}=a_1=4$

Ans ：(B)(E)

【範例 5】遞迴數列

設數列$\langle a_n\rangle$中滿足 $a_1=2$ 且 $a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ ， n 為正整數，由此可推得下列何者為真？　(1) $a_2=\dfrac{3}{2}$　(2) $a_3=\dfrac{4}{3}$　(3) $a_4=\dfrac{5}{4}$　(4) $a_{100}=1\dfrac{1}{100}$　(5) $a_n=\dfrac{n+1}{n}$.

解：

$a_1=2$ ，$a_2=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$ ，$a_3=2-\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$ ，$a_4=2-\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{4}$

$\Rightarrow\ a_n=\dfrac{n+1}{n}$　　Ans ：(1)(2)(3)(4)(5)

解：(1)(2)(3)(4)(5)

【範例 6】遞迴數列應用

如圖，將所有的正整數依序排列：第一列為 1，第二列為 2，3，第三列為 4，5，6，以此類推．設 a_n 為第 n 列中最右邊的數字．

(1)寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式．

(2)求 a_7．

1

2　3

4　5　6

7　8　9　10

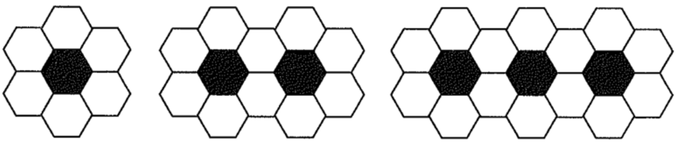
…

解：(1) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + n \quad (n \geq 2) \end{cases}$

(2) $a_7 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 7 = 28$

【範例 7】遞迴數列應用

用黑、白兩種顏色的正六邊形地磚拼成若干徒形，其個數如以下的規律依次遞增：



第一個　　第二個　　第三個

設第 n 個圖需用到 a_n 塊白色地磚，則：

(1) 試求 a_1，a_2，a_3，a_4。　　(2) 設 $n \geq 2$，求出 a_n 與 a_{n-1} 之間的關係。

(3) 寫出數列 $< a_n >$ 的遞迴式。　(4) 試求一般項 a_n 。

解：(1) $a_1=6$，$a_2=10$，$a_3=14$，$a_4=18$

(2) $a_n=a_{n-1}+4$，$n\ge 2$

(3) $\begin{cases} a_1=6 \\ a_n=a_{n-1}+4\text{，}n\ge 2 \end{cases}$

(4) $a_n=4n+2$，$n\in N$

【範例 8】遞迴數列

設數列$\langle a_n\rangle$的遞迴關係式為$\begin{cases} a_1=1 \\ a_n=a_{n-1}+3 \quad (n\ge 2) \end{cases}$，試回答下列問題：(1)利用遞迴關係式，求$a_{100}$的值。

(2)試求數列$\langle a_n\rangle$的一般項（以n表示）。

解

(1)分別以$n=2,3,4,\cdots\cdots,100$

代入遞迴關係式得

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 3 \\ a_3 &= a_2 + 3 \\ a_4 &= a_3 + 3 \\ &\vdots \\ a_{100} &= a_{99} + 3 \end{aligned}$$

將上述 99 個等式累加，並消去等號兩邊

共同項後得$a_{100}=a_1+3\times 99=1+297=298$

(2)仿照(1)的做法，分別以

$n=2,3,4,\cdots\cdots,k$

代入遞迴關係式得

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 3 \\ a_3 &= a_2 + 3 \end{aligned}$$

$$a_4 = a_3 + 3$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$a_k = a_{k-1} + 3$$

將上述 $k-1$ 個等式累加，並消去等號兩邊

共同項後得 $a_k = a_1 + 3\times(k-1)$

$= 1 + 3k - 3 = 3k - 2 \quad (k \geq 2)$

檢驗 $k = 1$ 時 $a_1 = 3\times1 - 2 = 1$ 亦成立

故數列的一般項 $a_n = 3n - 2$

對於 $n \geq 1$ 皆成立

【範例 9】遞迴數列

設數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_n = \dfrac{n+2}{n} \times a_{n-1} \ (n \geq 2) \end{cases}$。

試利用遞迴關係式，求數列 $\langle a_n \rangle$ 的一般項。（以 n 表示）

解： 重複利用遞迴關係式得

$$a_2 = \frac{4}{2} \times a_1$$

$$a_3 = \frac{5}{3} \times a_2$$

$$a_4 = \frac{6}{4} \times a_3$$

$$a_5 = \frac{7}{5} \times a_4$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$a_n = \frac{n+2}{n} \times a_{n-1}$$

將上述$n-1$個等式累乘

並消去等號兩邊的共同項後得

$$a_n=\frac{(n+1)(n+2)}{2\times 3}\times a_1=(n+1)(n+2)\quad (\,n\geq 2\,)$$

檢驗$n=1$時$a_1=2\times 3=6$亦成立

故數列的一般項$a_n=(n+1)(n+2)$

對於$n\geq 1$皆成立

【範例 10】群數列

將所有正奇數由小而大分成下列各組：(1)，(3，5)，(7，9，11)，…

(1) 第 10 組(第 10 個括號)內的第一個數為______。

(2) 第 10 組內，全體數字的總和為______。

(3) 2021 所在的組數為______。

解：(1) 91　(2) 1000　(3) 第 45 組

解：

	群	項	總項數
1	1	1	1
3,5	2	2	3
7,9,11	3	3	6
⋮	⋮	⋮	⋮
	k	k	$1+2+\cdots+k$
$\cdots$	9	9	45
$\cdots$	10	10	55

$a_n=2n-1$

(1) $a_{46}=2\times 46-1=91$

(2) $a_{46}+a_{47}+\cdots+a_{55}$

$=91+93+\cdots+109$

$=\dfrac{10\times(91+109)}{2}=1000$

(3) $2021=2n-1\ \Rightarrow\ n=1011$

$1+2+3+\cdots+k\geq 1011$

$\Rightarrow\ \dfrac{k(k+1)}{2}\geq 1011$

取 $k=45$

【範例 11】群數列

數列 $\frac{1}{1}$，$\frac{2}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{1}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{4}{1}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，…，則

(1) $\frac{13}{25}$ 是數列的第______項。 (2) 第 100 項是______。

ANS：(1) 691 項 (2) $\frac{6}{9}$

解：

	群	項	總項數	數字和
$\frac{1}{1}$	1	1	1	2
$\frac{2}{1}$，$\frac{1}{2}$	2	2	3	3
$\frac{3}{1}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{3}$	3	3	6	4
$\frac{4}{1}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$	4	4	10	5
$\vdots$				

(1) 13+25=38 故為第37群第25項

$$n = S_{36} + 25 = \frac{36(1+36)}{2} + 25 = 691$$

(2) $\frac{k(1+k)}{2} \geq 100 \Rightarrow k(k+1) \geq 200 \Rightarrow$ 取$k = 14$(群)

$100 = \frac{13(1+13)}{2} + 9$ a_{100} 為第14群第9項,數字和15

$$\therefore\ a_{100} = \frac{6}{9}$$

【主題 3】數學歸納法

1. 數學歸納法原理：設$P_1,P_2,\cdots,P_n,\cdots$表與自然數$n$有關之一系列命題，若其滿足下列兩點：

   (1) P_1為真。

   (2)對任意k，假設P_k成立，可推得P_{k+1}亦成立。

   則對所有的自然數n，P_n恆成立。

2. 數學歸納法的證明方式：

   (1) 檢驗$n=1$時原式成立。

   (2) 設$n=k$時原式成立，導出$n=k+1$亦成立。

   (3) 由數學歸納法可知，對所有自然數，原式都成立。

【範例 1】數學歸納法(等式型)

試利用數學歸納法證明：$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$，$n\in N$。

解(1) $1^3=1=\dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$ $\therefore$ $n=1$時，原式成立

(2)假設$n=k$時，原式成立，

亦即 $1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$

$n=k+1$時

$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3$

$=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\dfrac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=\dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

$\therefore$ $n=k+1$時，原式也成立

(3) 由數學歸納法可知，對所有自然數n，原式恆成立。

【範例 2】數學歸納法(等式型)

用數學歸納法證明：$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

對所有的正整數 n 都成立．

解：

(1) $n=1$ 時 $1\times(1+1)=\dfrac{1\times2\times3}{3}$ ，原式成立。

(2) 假設 $n=k$ 時 ，原式成立。

即 $1\times2+2\times3+\cdots+k(k+1)=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}$

當 $n=k+1$ 時

$1\times2+2\times3+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$

$=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\dfrac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)(+3)}{3}$ $\therefore n=k+1$ 時，原式也成立

(3) 由數學歸納法可知，對所有自然數 n ，原式恆成立。

【範例 3】數學歸納法(倍數型)

若 n 為自然數，則 $10^{n+1}-9n-10$ 恆可被 81 整除，試證之。

解

(1) $n=1$ 時，$10^{n+1}-9n-10=100-9-10=81$ 可被 81 整除，

故 $n=1$ 時，命題成立

(2) 設 $n=k$ 時命題成立，即 $10^{k+1}-9k-10=81q$，$q\in N$

則 $n=k+1$ 時，

$10^{n+1}-9n-10=10^{k+2}-9(k+1)-10=10\cdot10^{k+1}-9k-19$

$=10(10^{k+1}-9k-10)-9k-19+90k+100$

$=10(10^{k+1}-9k-10)+81k+81=10\cdot81q+81k+81$

$=81(10q+k+1)$可被 81 整除

故 $n=k+1$ 時，命題成立

由數學歸納法得證，$n\in N$ 時，$10^{n+1}-9n-10$ 恆可被 81 整除．

【範例 4】數學歸納法(倍數型)

對任一正整數 n，$4^{2n+1}+3^{n+2}$ 恆為某一質數 p 的倍數，

(1)試推測此質數 p．

(2)請用數學歸納法證明你的推測是正確的．

解

(1)當 $n=1$ 時，$4^{2+1}+3^{1+2}=91$．

又當 $n=2$ 時，$4^{2\cdot 2+1}+3^{2+2}=1105$．

因為 91 和 1105 的最大公因數為 13，

所以我們猜測此質數為 13．

(2) ❶當 $n=1$ 時，$4^{2+1}+3^{1+2}=91$，是 13 的倍數．

❷設 $n=k$ 時猜測正確，即 $a_k=4^{2k+1}+3^{k+2}=13q$，

其中 $q\in N$．

❸當 $n=k+1$ 時，

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=4^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2}=16\cdot 4^{2k+1}+3\cdot 3^{k+2}\\&=16(4^{2k+1}+3^{k+2})-13\cdot 3^{k+2}\\&=16\cdot 13q-13\cdot 3^{k+2}=13(16q-3^{k+2})\end{aligned}$$

也是 13 的倍數．

(3)故由數學歸納法可知：

對於所有的正整數 n，$4^{2n+1}+3^{n+2}$ 恆為質數 13 的倍數．