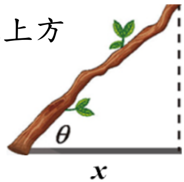
B2-03 面積公式與正餘弦定理【基礎篇】

【主題 1】三角形面積公式

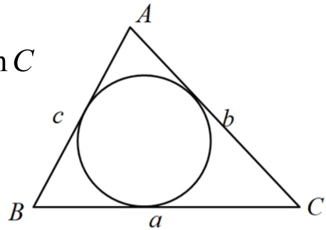
1.【正射影長】

一長度為 ℓ 的樹枝與地面夾銳角 θ，若太陽從正上方照射出樹枝影長為 x，則定義 $x=\ell\times\cos\theta$ 為樹枝在地面上的正射影長。



2.【三角形面積公式】

ΔABC 中，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，$r=$ 內切圓半徑，$R=$ 外接圓半徑



（1） $\Delta=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

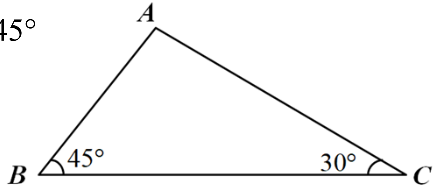
（2） $\Delta=\dfrac{abc}{4R}=r\times s$，

（3） $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ （海龍公式）

NOTE

【範例 1】三角形底邊長

ΔABC 中，$\overline{AB}=4\sqrt{2}$，$\angle B=45°$，$\angle C=30°$　則 $\overline{BC}$=________



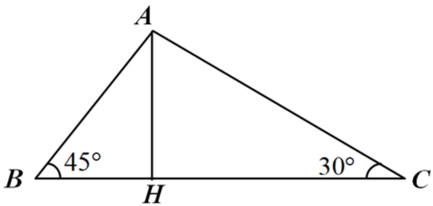
解：作 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$

$\overline{BH}=4\sqrt{2}\times\cos 45°=4$

$\overline{AH}=4\sqrt{2}\times\sin 45°=4$

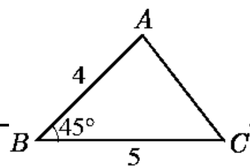
$\tan 30°=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{CH}}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{4}{\overline{CH}}$

$\overline{CH}=4\sqrt{3}$　　$\overline{BC}=4+4\sqrt{3}$



【範例 2】三角形面積公式

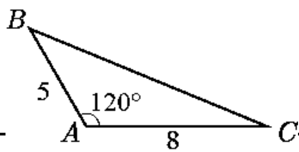
$\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\angle B=45°$，試求 $\triangle ABC$ 的面積。



[解]：所求 $=\dfrac{1}{2}\times4\times5\times\sin 45°=\dfrac{1}{2}\times4\times5\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$

【範例 3】三角形面積公式

$\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=8$，$\angle A=120°$，試求 $\triangle ABC$ 的面積。



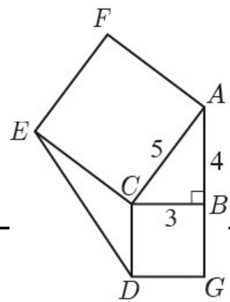
[解]：所求 $=\dfrac{1}{2}\times5\times8\times\sin 120°=\dfrac{1}{2}\times5\times8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$

【範例 4】三角形面積公式

如圖，設$\triangle ABC$為直角三角形，$\angle B=90^\circ$，四邊形 $ACEF$, $BCDG$ 為正方形，$\overline{AC}=5$，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=3$，試求：

(1) $\cos(\angle DCE)$。

(2) $\triangle DCE$ 的面積。



[解]

(1) $\cos(\angle DCE)=\cos(180^\circ-\angle ACB)$

$$=-\cos(\angle ACB)=-\frac{3}{5}$$

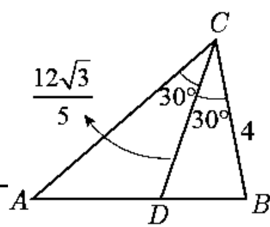
(2) $\because \cos(\angle DCE)=-\dfrac{3}{5}\Rightarrow \sin(\angle DCE)=\sqrt{1-\cos^2(\angle DCE)}=\dfrac{4}{5}$

又$\overline{CE}=\overline{AC}=5$，$\overline{CD}=\overline{BC}=3$

$\therefore \triangle DCE$ 面積$=\dfrac{1}{2}\times5\times3\times\dfrac{4}{5}=6$

【範例 4】三角形面積公式的應用

$\triangle ABC$ 中，已知$\overline{BC}=4$，$\angle C=60^\circ$，$\angle C$ 的內角平分線交$\overline{AB}$於 D 點，若$\overline{CD}=\dfrac{12\sqrt{3}}{5}$，則$\overline{AC}$的長度為何？



[解]

如圖，$\triangle ABC$ 面積$=\triangle ACD$ 面積$+\triangle BCD$ 面積

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\times\overline{AC}\times4\times\sin60^\circ=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\frac{12\sqrt{3}}{5}\times\sin30^\circ$$

$$+\frac{1}{2}\times4\times\frac{12\sqrt{3}}{5}\times\sin30^\circ\Rightarrow4\overline{AC}=\frac{12}{5}\overline{AC}+\frac{48}{5}\quad\Rightarrow\overline{AC}=6$$

【主題 2】正弦定理

1. 【正弦定理】

(1)【正弦定理】：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ 。

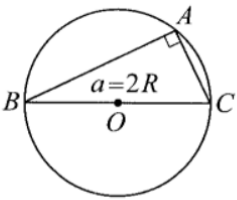
【比例關係】：　$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ 。

【角化邊關係】：　$\sin A=\dfrac{a}{2R}$ ，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$ ，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$ 。

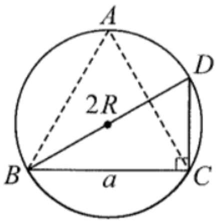
【邊化角關係】：　$a=2R\times\sin A$ ，
$b=2R\times\sin B$ ，
$c=2R\times\sin C$ 。

【高邊角關係】：

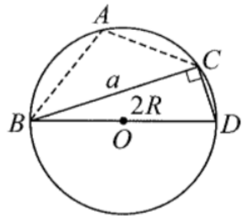
$$h_a:h_b:h_c=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}=\frac{1}{\sin A}:\frac{1}{\sin B}:\frac{1}{\sin C}$$



▲圖 1
（∠A 為直角）



▲圖 2
（∠A 為銳角）



▲圖 3
（∠A 為鈍角）

(2) ΔABC 中，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ ，$r=$內切圓半徑，$R=$外接圓半徑

$\Rightarrow\quad \Delta=\dfrac{abc}{4R}=r\times s$ 。

【範例 1】正弦定理

$\triangle ABC$ 中，若 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的對邊長分別為 $a=6$ ，$b=10$ ，$c=14$，且其外接圓半徑為 $\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$ 。

(1) 試求 $\sin A:\sin B:\sin C$ 。

(2) 試求最小角的正弦值。

[解]：(1) 由正弦定理得

$$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=6:10:14=3:5:7$$

(2) 由大邊對大角可知 $\angle A$ 為最小角

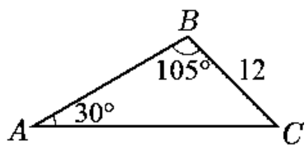
又 $\dfrac{6}{\sin A}=2R=\dfrac{28\sqrt{3}}{3}$ $\quad\therefore \sin A=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

【範例 2】正弦定理－AAS 型

$\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=30°$, $\angle B=105°$, $\overline{BC}=12$ ，試求 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 及 ΔABC 外接圓的半徑 R。(已知 $\sin 75°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$)

[解]： $\angle C=180°-30°-105°=45°$

由正弦定理可得



$$\frac{12}{\sin 30°}=\frac{\overline{AB}}{\sin 45°}=\frac{\overline{AC}}{\sin 105°}=2R$$

$$\therefore \overline{AB}=\frac{12}{\frac{1}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=12\sqrt{2} \quad , \quad \overline{AC}=\frac{12}{\frac{1}{2}}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=6\sqrt{6}+6\sqrt{2}$$

$\triangle ABC$ 外接圓的半徑 $R=\dfrac{12}{2\times\frac{1}{2}}=12$

【範例 3】正弦定理 $-SSA$ 型

$\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{BC}=4\sqrt{3}$，$\overline{AC}=4$，$\angle B=30^\circ$。試求：

(1) $\angle A=$____。　　(2) $\overline{AB}=$____。

(3) $\triangle ABC$ 外接圓的半徑 $R=$____。

[解]

(1) 由正弦定理可得 $\dfrac{4\sqrt{3}}{\sin A}=\dfrac{4}{\sin 30^\circ}=\dfrac{4}{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \angle A=60^\circ$ 或 120°

(2)、(3)

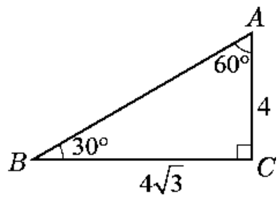
若 $\angle A=60^\circ$，則

$\angle C=180^\circ-30^\circ-60^\circ=90^\circ$

$\Rightarrow \overline{AB}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+4^2}=8$

由正弦定理可得

$2R=\dfrac{4}{\sin 30^\circ}=8\Rightarrow R=4$



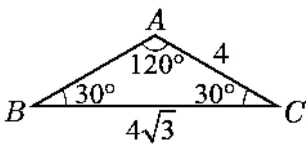
② 若 $\angle A=120^\circ$，則

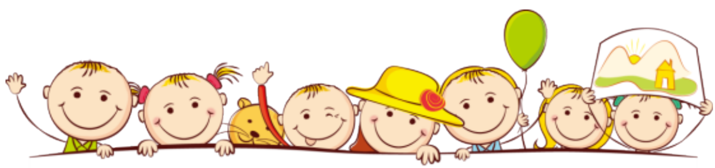
$\angle C=180^\circ-30^\circ-120^\circ=30^\circ$

$\Rightarrow \overline{AB}=\overline{AC}=4$

由正弦定理可得

$2R=\dfrac{4}{\sin 30^\circ}=8\Rightarrow R=4$





【範例 4】正弦定理與邊角的變換

(1) $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$，試求其三邊長的比。

(2) $\triangle ABC$ 中，設 $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$，
若 $(a+b):(b+c):(c+a) = 7:9:8$，則 $\sin A : \sin B : \sin C =$ ____。

[解]

(1) $\angle C = 180° - 60° - 45° = 75°$

由正弦定理得

$$\begin{aligned} a:b:c &= \sin 60° : \sin 45° : \sin 75° \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ &= 2\sqrt{3} : 2\sqrt{2} : (\sqrt{6}+\sqrt{2}) \\ &= \sqrt{6} : 2 : (\sqrt{3}+1) \end{aligned}$$

(2) 依題意可設 $\begin{cases} a+b = 7t \cdots\cdots \\ b+c = 9t \cdots\cdots ② \\ c+a = 8t \cdots\cdots ③ \end{cases}$，其中 $t > 0$

+②+③ 得 $2(a+b+c) = 24t$

$\Rightarrow a+b+c = 12t \cdots\cdots ④$

④− 得 $c = 5t$

④−② 得 $a = 3t$

④−③ 得 $b = 4t$

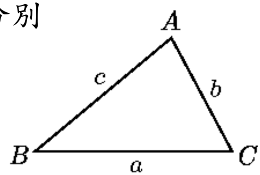
由正弦定理得

$$\begin{aligned} \sin A : \sin B : \sin C &= a:b:c \\ &= 3t : 4t : 5t = 3:4:5 \end{aligned}$$

【主題 3】餘弦定理與海龍公式

1. 【餘弦定理】

$\triangle ABC$ 中，若 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的對邊長分別為 a, b, c ，則



(1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Leftrightarrow \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$。

(2) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \Leftrightarrow \cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$。

(3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Leftrightarrow \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$。

2. 餘弦定理的應用

$\triangle ABC$ 中，若 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的對邊長分別為 a, b, c ，則

(1) $\angle C$ 是銳角 $\Leftrightarrow \cos C > 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 > c^2$。

(2) $\angle C$ 是直角 $\Leftrightarrow \cos C = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$。

(3) $\angle C$ 是鈍角 $\Leftrightarrow \cos C < 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 < c^2$。

3. 海龍公式

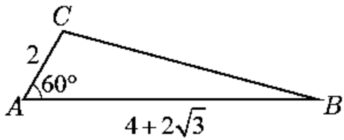
若 $\triangle ABC$ 的三邊長為 a, b, c，令半周長 $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ ，則

$$\triangle ABC \text{ 的面積} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

【範例 1】餘弦定理－SAS 型

$\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=60^\circ$，$\overline{AB}=4+2\sqrt{3}$，$\overline{AC}=2$，試求 $\overline{BC}$ 的長度。

[解]：由餘弦定理得

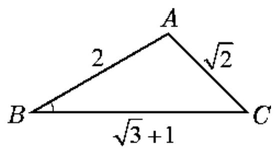


$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos 60^\circ$$
$$=(4+2\sqrt{3})^2+2^2-2(4+2\sqrt{3})\times 2\times\frac{1}{2}$$
$$=28+16\sqrt{3}+4-8-4\sqrt{3}$$
$$=24+12\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow \overline{BC}=\sqrt{24+12\sqrt{3}}=\sqrt{24+2\sqrt{108}}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{18}+\sqrt{6})^2}=\sqrt{18}+\sqrt{6}=3\sqrt{2}+\sqrt{6}$$

【範例 2】餘弦定理－SSS 型

$\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=\sqrt{3}+1$，$\overline{CA}=\sqrt{2}$，試求 $\angle B$。

[解]：由餘弦定理得



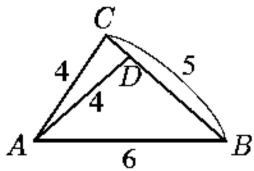
$$\cos B=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+2^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot 2}=\frac{6+2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}+1)}$$
$$=\frac{3+\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}(\cancel{\sqrt{3}+1})}{2(\cancel{\sqrt{3}+1})}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \angle B=30^\circ$$

【範例 3】餘弦定理的應用

$\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AC}=4$。
若 D 是 $\overline{BC}$ 邊上異於 C 的一個點且 $\overline{AD}=4$，
則 $\overline{BD}=$_____。

解題關鍵：
$\angle B$ 是 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ABD$ 的共用角，即 $\cos(\angle ABC)=\cos(\angle ABD)$。

[解]



$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos B=\dfrac{5^2+6^2-4^2}{2\times5\times6}=\dfrac{3}{4}$

$\therefore$ 在 $\triangle ABD$ 中，$\cos B=\dfrac{6^2+\overline{BD}^2-4^2}{2\times6\times\overline{BD}}=\dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow \overline{BD}^2-9\overline{BD}+20=0$

$\Rightarrow (\overline{BD}-4)(\overline{BD}-5)=0$

$\Rightarrow \overline{BD}=4$ 或 5（不合，$\because D\neq C$）

【範例 4】餘弦定理的應用

已知 $\triangle ABC$ 的三邊長為 $\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=7$，試判斷 $\triangle ABC$ 是銳角、鈍角或直角三角形。

[解]：$\because \overline{CA}=7$ 是最大邊

$\therefore$ 只需要判斷最大角 $\angle B$ 為銳角、鈍角或直角即可

$\cos B=\dfrac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=\dfrac{-15}{30}=-\dfrac{1}{2}<0$

$\Rightarrow \angle B=120^\circ$

故 $\triangle ABC$ 是鈍角三角形

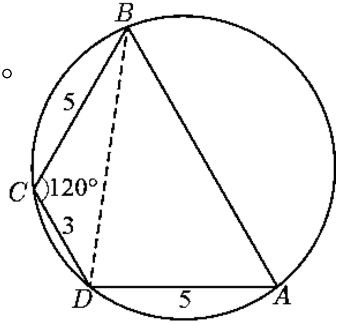
【範例 5】餘弦定理的應用

已知圓內接四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}=5$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CD}=3$，$\angle BCD=120^\circ$，試求 $\overline{AB}$ 的長度。

解題關鍵

$\because \angle BAD+\angle BCD=180^\circ \quad \therefore \cos(\angle BCD)=-\cos(\angle BAD)$

[解]



$\because ABCD$ 為圓內接四邊形

$\therefore \angle BAD+\angle BCD=180^\circ \Rightarrow \angle BAD=60^\circ$

在 $\triangle BCD$ 中

$\overline{BD}^2=5^2+3^2-2\times5\times3\times\cos120^\circ=49$

$\Rightarrow \overline{BD}=7$

在 $\triangle ABD$ 中

$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+5^2-2\overline{AB}\times5\times\cos60^\circ$

$\Rightarrow 7^2=\overline{AB}^2+5^2-10\times\overline{AB}\times\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \overline{AB}^2-5\overline{AB}-24=0 \Rightarrow (\overline{AB}-8)(\overline{AB}+3)=0$

$\Rightarrow \overline{AB}=8$ 或 -3（不合）

NOTE

【範例 6】海龍公式

已知△ABC 的三邊長為 $a=5$，$b=7$，$c=8$，試求

(1) △ABC 的面積。

(2) 內切圓半徑 $r=$______

(3) 外接圓半徑 $R=$______

[解]：$s=\dfrac{5+7+8}{2}=10$

(1) 由海龍公式得

$$\triangle ABC\text{ 的面積}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$=\sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)}$$
$$=\sqrt{10\times5\times3\times2}=10\sqrt{3}$$

(2) $\Delta=\dfrac{abc}{4R}=r\times s$　　$10\sqrt{3}=r\times(10)$　$\therefore\ r=\sqrt{3}$

(3) $\Delta=\dfrac{abc}{4R}=r\times s$

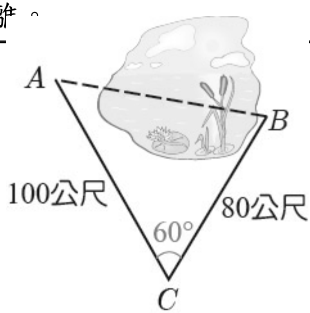
$10\sqrt{3}=\dfrac{abc}{4R}$　$\therefore\ 4R=\dfrac{5\times7\times8}{10\sqrt{3}}\Rightarrow R=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

NOTE

【主題 4】立體圖與測量

【範例 1】三角測量

如圖，為了測量一湖泊岸邊 A, B 兩點之間的距離，阿三在岸邊找了另一點 C，並測得 $\angle ACB=60°$，$\overline{AC}=100$ 公尺，$\overline{BC}=80$ 公尺。試根據這些條件，求出 $\overline{AB}$ 的距離。



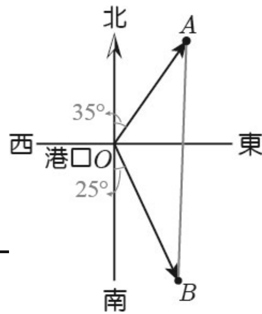
[解]

由餘弦定理得

$$\overline{AB}^2=100^2+80^2-2\times100\times80\times\cos60°$$
$$=8400$$
$$\Rightarrow \overline{AB}=20\sqrt{21}\text{（公尺）}$$

【範例 2】三角測量

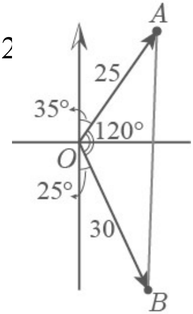
如圖，一船 A 在上午 10 點從港口 O 朝南偏東 $25°$ 的方向，以每小時 15 浬的速度出發直線航行，另一船 B 則在上午 10 點 45 分從同一港口 O 朝北偏東 $35°$ 的方向，以每小時 20 浬的速度出發直線航行。試求在中午 12 點時，A, B 兩船之間的距離。



[解]

如圖，中午 12 點時

$\overline{OA}=(12-10)\times15=30$，$\overline{OB}=(12-10\frac{45}{60})\times20=2$



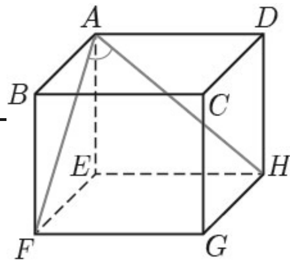
又 $\angle BOA=180°-35°-25°=120°$

由餘弦定理得

$$\overline{AB}^2=30^2+25^2-2\times30\times25\times\cos120°=2275$$
$$\Rightarrow \overline{AB}=5\sqrt{91}\text{（公尺）}$$

【範例 3】三角測量

如圖，長方體 $ABCD\text{-}EFGH$ 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{AD}=6$，$\overline{AE}=5$，試求 $\angle FAH$ 的度數。
（四捨五入到整數位）



[解]：在直角△AEF 中

$$\overline{AF}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{EF}^2}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$$

在直角△AEH 中

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{EH}^2}=\sqrt{5^2+6^2}=\sqrt{61}$$

在直角△EFH 中

$$\overline{FH}=\sqrt{\overline{EF}^2+\overline{EH}^2}=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}$$

在△AFH 中

$$\cos(\angle FAH)=\frac{(\sqrt{41})^2+(\sqrt{61})^2-(\sqrt{52})^2}{2\times\sqrt{41}\times\sqrt{61}}$$

$$=\frac{25}{\sqrt{2501}}\approx 0.499$$

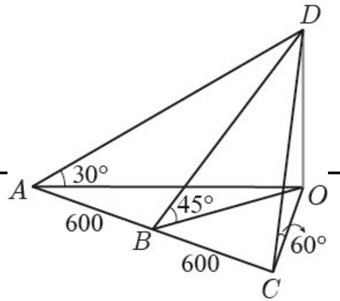
利用計算機可得

$\angle FAH\approx 60.006°\approx 60°$

NOTE

【範例 4】三角測量

如圖，自地面不同方位且共線之三點 A, B, C，測得一山頂的仰角分別為 $30°$, $45°$, $60°$，若 $\overline{AB}=\overline{BC}=600$ 公尺，則山高為＿＿＿＿公尺。



[解]：令山高為 h，則 $\overline{OA}=\sqrt{3}h$,

$$\overline{OB}=h,\ \overline{OC}=\frac{h}{\sqrt{3}}$$

在 $\triangle OAB$ 與 $\triangle OAC$ 中

$\cos(\angle OAB)=\cos(\angle OAC)$

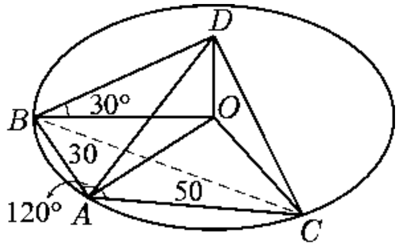
$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{3}h)^2+600^2-h^2}{2\times\sqrt{3}h\times 600}=\frac{(\sqrt{3}h)^2+1200^2-(\frac{h}{\sqrt{3}})^2}{2\times\sqrt{3}h\times 1200}$$

$\Rightarrow h=300\sqrt{6}$ $\Rightarrow$ 即山高為 $300\sqrt{6}$（公尺）

NOTE

【範例 5】三角測量

小民想測量出一大樓的高度，在地面上三個定點 A, B, C 分別測出大樓
頂端的仰角都是 30°，又 $\overline{AB}=30$ 公尺，$\overline{AC}=50$ 公尺，
$\angle BAC=120^\circ$，試求此大樓的高度。



[解]$\because$ 在 A, B, C 三點測得大樓的仰角都是 30°

$\therefore A, B, C$ 三點與大樓底部 O 的距離都相等

$\Rightarrow$ 大樓底部 O 是 ΔABC 的外接圓圓心。

由餘弦定理得

$$\overline{BC}^2=30^2+50^2-2\times30\times50\times\cos120^\circ=4900$$

$\Rightarrow \overline{BC}=70$

設 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑長度為 R

由正弦定理得

$$\frac{70}{\sin120^\circ}=2R \Rightarrow R=\frac{70}{\sqrt{3}}$$

故所求大樓高度 $=\dfrac{1}{\sqrt{3}}R=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\dfrac{70}{\sqrt{3}}=\dfrac{70}{3}$（公尺）

NOTE