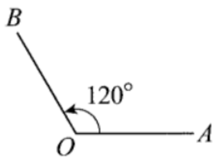
B2-02 廣義角與極坐標【基礎篇】

【主題 1】廣義角

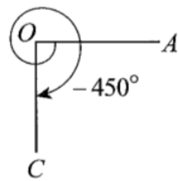
1.【有向角】

（1）將角視為由始邊沿著旋轉方向到終邊的旋轉量。

（2）規定逆時針方向旋轉的角為正向角(正角)，
順時針方向旋轉的角為負向角(負角)。



▲圖 1



▲圖 2

2.【廣義角】

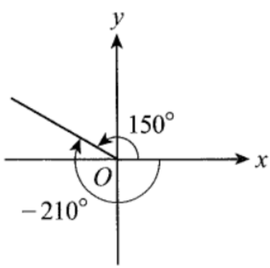
有正負方向，不限於$0°$到$180°$之間的角，統稱為廣義角。

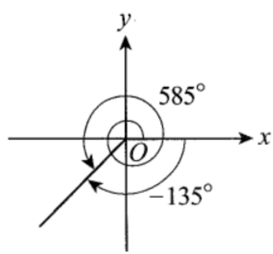
3.【標準位置角】

（1）第n象限角：

將廣義角放在坐標平面上，使角的頂點與原點重合，角的始邊在在x軸的正向上，此時角的終邊落在第n象限，就稱這個角為第n象限角。

例：$150°$與$-210°$都是第二象限角，
$-135°$與$585°$都是第三象限角。





（2） 同界角：具有相同始邊與終邊的角，稱之為同界角。

兩同界角之間一定【相差$360°$的整數倍】。

❶ θ為第一象限角

$\Leftrightarrow (n\times 360°) < \theta < 90° + (n\times 360°)$ ，$n\in Z$ 。

❷ θ為第二象限角

$\Leftrightarrow 90° + (n\times 360°) < \theta < 180° + (n\times 360°)$ ，$n\in Z$ 。

❸ θ為第三象限角

$\Leftrightarrow 180° + (n\times 360°) < \theta < 270° + (n\times 360°)$ ，$n\in Z$ 。

❹ θ為第四象限角

$\Leftrightarrow 270° + (n\times 360°) < \theta < 360° + (n\times 360°)$ ，$n\in Z$ 。

【範例 1】最小正同界角、最大負同界角

（1） 試求$4600°$之最小正同界角與最大負同界角。

（2） 若$793°$的最小正同界角為α，最大負同界角為β，

則數對$(\alpha,\beta)=$______。

解：(1) $4600° = 12\times 360° + 280°$ 　　$280° - 360° = -80°$

最小正同界角$280°$、最大負同界角$-80°$

(2) $793° = 2\times 360° + 73°$ 　　$73° - 360° = -287°$

$\therefore\ \alpha = 73°\quad \beta = -287°\quad (\alpha,\beta) = (73°,-287°)$

【範例 2】同界角

試求下列廣義角的同界角θ，使$0° \le \theta < 360°$。

（1） $980°$ 　　（2） $-700°$

解：(1) $980° = 2\times 360° + 260°$

(2) $-700° = -(360°\times 1 + 340°)$ 　最大負同界角$= -340°$

$-340° + 360° = 20°$ 　最小正同界角$= 20°$

(1) $260°$ 　　(2) $20°$

【範例 3】同界角

設 θ 是 490° 的同界角，且 $-1900^\circ < \theta < 1000^\circ$，則滿足此條件的 θ 有______個。

解：$-1900^\circ < 360^\circ \times n + 490 < 1000^\circ \Rightarrow -2390^\circ < 360^\circ \times n < 510^\circ$

$\dfrac{-2390}{360} < n < \dfrac{510}{360} \Rightarrow -6.6\cdots < n < 1.4\cdots$

$\Rightarrow n = -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1$

答：　共 8 個

【範例 4】同界角的判斷

下列何者是 45° 的同界角？

（1）2115°　（2）-2115°　（3）1215°

（4）-1215°　（5）405°

解：(1) $2115^\circ - 45^\circ = 2070^\circ = 360^\circ \times 5 + 270^\circ$

(2) $-2115^\circ - 45^\circ = -2160^\circ = 360^\circ \times (-6)$

(3) $1215^\circ - 45^\circ = 1170^\circ = 360^\circ \times 3 + 90^\circ$

(4) $-1215^\circ - 45^\circ = -1260^\circ = 360^\circ \times (-3) - 180^\circ$

(5) $405^\circ - 45^\circ = 360^\circ$

答：(2) (5)

NOTE

【主題 2】廣義角的三角比

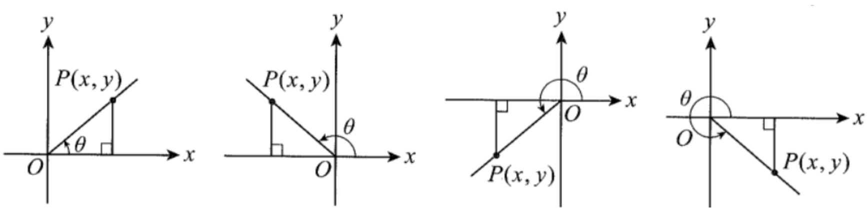
1. 定義：

設 θ 是一個標準位置角，在 θ 的終邊上任取一點 $P(x, y)$，

且 $\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}=r\ (r>0)$，我們定義：

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}\ (x\neq 0)$。

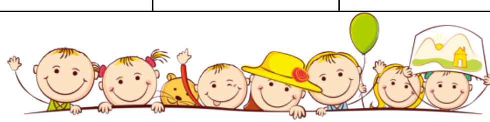
2. 各象限中三角比的正負情形



θ 終邊所在象限 (x, y)	第一象限 $(+, +)$	第二象限 $(-, +)$	第三象限 $(-, -)$	第四象限 $(+, -)$
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$

3. 軸上角(象限角)之三角比

值 \ θ	0°	90°	180°	270°
$\sin\theta$	0	1	0	-1
$\cos\theta$	1	0	-1	0
$\tan\theta$	0	無意義	0	無意義



【範例 1】廣義角的三角比

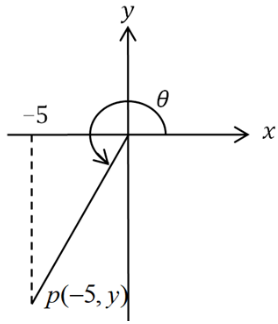
設 θ 是一個標準位置角，$P(-5，y)$ 為 θ 的終邊上一點，且 $\tan\theta=2$，則 $y=$______，$\sin\theta=$______，$\cos\theta=$______

解：$\because\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{y}{-5}=2\quad\therefore\ y=-10$

$\Rightarrow p(-5,-10)\quad r=\sqrt{(-5)^2+(-10)^2}=5\sqrt{5}$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-10}{5\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-5}{5\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$



【範例 2】特殊角的三角比

試求下列各式之值

(1) $\tan 225^\circ-\cos 150^\circ+\sin 330^\circ=$________

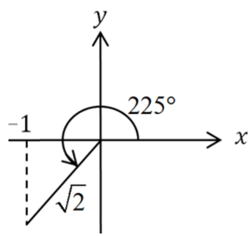
(2) $\sin 0^\circ+\cos 270^\circ+\cos 180^\circ-\tan 180^\circ\sin 270^\circ=$________

解：

(1) $\tan 225^\circ=\tan(180^\circ+45^\circ)=\tan 45^\circ=1$

$$\cos 150^\circ=\cos(90^\circ+60^\circ)=-\sin 60^\circ=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 330^\circ=\sin(270^\circ+60^\circ)=-\cos 60^\circ=\frac{-1}{2}$$



$$原式=1-(\frac{-\sqrt{3}}{2})+(\frac{-1}{2})=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

(2) $\sin 0^\circ=0$，$\cos 270^\circ=0$，$\cos 180^\circ=-1$

$\tan 180^\circ=0$，$\sin 270^\circ=-1$

$原式=0+0+(-1)-0\times(-1)=-1$

【範例 3】三角比的正負

(1) 若 $P(\sin\theta$，$-\cos\theta)$ 在第三象限，則 θ 是第幾象限角？
(2) 若 $\tan\theta>0$，$\cos\theta<0$ 則點 $Q(\sin\theta$，$\sin\theta+\cos\theta)$ 在第幾象限？

解：(1) $\because$ $\sin\theta<0$, $-\cos\theta<0$ $\Rightarrow$ $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

$\therefore$ θ 為第四象限角

(2) $\because$ $\tan\theta>0$ $\therefore$ $\theta\in$ I 或 III

$\because$ $\cos\theta<0$ $\therefore$ $\theta\in$ II 或 III　　故 $\theta\in$ III

$\therefore$ $\sin\theta<0$　　$\sin\theta+\cos\theta<0$

$\Rightarrow$ $Q(\sin\theta$，$\sin\theta+\cos\theta)$ 在第三象限

【範例 4】三角比的運算

(1) 設 $180^\circ<\theta<270^\circ$，試化簡 $\sqrt{\sin^2\theta}+\sqrt{(1+\sin\theta)^2}=$_____

(2) 設 $\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$，$\cos\theta<0$，試求 $\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}+\dfrac{\sin\theta}{2-\cos\theta}=$____

解：(1)

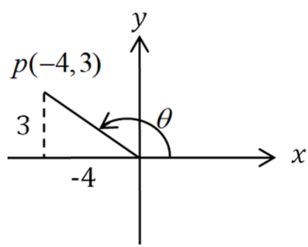
$\because$ $180^\circ<\theta<270^\circ$　　$\therefore$ $-1<\sin\theta<0$ $\Rightarrow$ $0<1+\sin\theta<1$

$$\sqrt{\sin^2\theta}+\sqrt{(1+\sin\theta)^2}=|\sin\theta|+|1+\sin\theta|=-\sin\theta+1+\sin\theta=1$$

(2) $\because$ $\cos\theta<0$ 且 $\tan\theta<0$ $\therefore$ $\theta\in$ III $\therefore$ $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$, $\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$

$$\text{所求}=\frac{-\frac{4}{5}}{1-(-\frac{3}{4})}+\frac{\frac{3}{5}}{2-(-\frac{4}{5})}$$

$$=-\frac{16}{35}+\frac{3}{14}=-\frac{17}{70}$$



主題 3. 廣義角三角比的基本關係

1. 商數關係：

當 θ 的終邊不在 y 軸上時，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 。

2. 平方關係：

對於任意角 θ ，恆有 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 。

3. 廣義角換算公式： 《奇變偶不變，正負看象限。》

(1)【同界角】凡同界角均具有相同的三角比

$n\in Z$ ⇨

$\sin(n\times360^\circ+\theta)=\sin\theta$　　$\cos(n\times360^\circ+\theta)=\cos\theta$

$\tan(n\times360^\circ+\theta)=\tan\theta$

(2)【負角 $(-\theta)$ 】

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ ，　$\cos(-\theta)=\cos\theta$ ，　$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

(3)【$180^\circ\pm\theta$】　《角度互補 ⇒ 正弦相等，餘弦變號》

$\sin(180^\circ+\theta)=-\sin\theta$ ，　$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$

$\cos(180^\circ+\theta)=-\cos\theta$ ，　$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$

$\tan(180^\circ+\theta)=\tan\theta$ ，　$\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta$

(5)【$90^\circ\pm\theta$】　《角度互餘 ⇒ 餘轉正，正轉餘》

$\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta$ ，　$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$

$\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta$ ，　$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

$\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

(6)【$270^\circ\pm\theta$】

$\sin(270^\circ+\theta)=-\cos\theta$ ，　$\sin(270^\circ-\theta)=-\cos\theta$

$\cos(270^\circ+\theta)=\sin\theta$ ，　$\cos(270^\circ-\theta)=-\sin\theta$

【範例 1】廣義角的三角比

試求下列各式之值

(1) $\sin 150^\circ = \underline{\qquad\qquad}$　　(2) $\cos 225^\circ = \underline{\qquad\qquad}$

(3) $\tan(-240^\circ) = \underline{\qquad\qquad}$　　(4) $\sin 1380^\circ = \underline{\qquad\qquad}$

(5) $\cos 1200^\circ = \underline{\qquad\qquad}$　　(6) $\tan(-570^\circ) = \underline{\qquad\qquad}$

解：(1) $\sin 150^\circ = \sin(90^\circ \times 1 + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

(2) $\cos 225^\circ = \cos(90^\circ \times 2 + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\tan(-240^\circ) = -(\tan 240^\circ) = -[\tan(180^\circ + 60^\circ)]$
$= -(\tan 60^\circ) = -\sqrt{3}$

(4) $\sin 1380^\circ = \sin(90^\circ \times 15 + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(5) $\cos 1200^\circ = \cos(90^\circ \times 13 + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\dfrac{1}{2}$

(6) $\tan(-570^\circ) = -(\tan 570^\circ)$

$$= -[\tan(90^\circ \times 6 + 30^\circ)] = -(\tan 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

NOTE

【範例 2】廣義角三角比的計算

試求下列各式之值

(1) $\sin(-150°)\times\tan 225°\times\cos(-300°)-\sin 135°\times\cos 315°=$______

(2) $\sin 90°+\tan 180°-\cos 270°+\cos(-720°)=$________

(3)化簡 $\dfrac{\sin(-\theta)}{\cos(90°-\theta)}-\dfrac{\tan(180°-\theta)}{\tan(180°+\theta)}+\dfrac{\cos(360°-\theta)}{\cos(180°-\theta)}=$________

解：

(1) $\sin(-150°)\times\tan 225°\times\cos(-300°)-\sin 135°\times\cos 315°$

$=[-(\cos 60°)]\times\tan 45°\times\sin 30°-\cos 45°\times\sin 45°$

$=(-\dfrac{1}{2})\times 1\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{3}{4}$

(2) $\sin 90°+\tan 180°-\cos 270°+\cos(-720°)$

$=1+0-0+1=2$

(3) $\dfrac{\sin(-\theta)}{\cos(90°-\theta)}-\dfrac{\tan(180°-\theta)}{\tan(180°+\theta)}+\dfrac{\cos(360°-\theta)}{\cos(180°-\theta)}$

$=\dfrac{-(\sin\theta)}{\sin\theta}-\dfrac{-(\tan\theta)}{\tan\theta}+\dfrac{\cos\theta}{-(\cos\theta)}=(-1)-(-1)+(-1)=-1$

NOTE

【範例 3】廣義角三角比的轉換

(1) 已知θ為銳角，且$\cos\theta=\frac{2}{3}$，則$\tan(180^\circ+\theta)=$__________

(2) 已知θ為第二象限角，且$\tan\theta=-\frac{2}{3}$，試求

$3\sin(180^\circ+\theta)\cos(90^\circ+\theta)-2\sin(90^\circ-\theta)\cos(180^\circ-\theta)=$________

(3) 已知θ為第二象限角，且$\cos\theta=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$，

則$\cos(\theta-450^\circ)=$__________

解：

(1) $\because \cos\theta=\frac{2}{3}$ $\therefore$ $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\tan\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

(2) $\because \tan\theta=-\frac{2}{3}$ $\therefore$ $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}$，$\cos\theta=\frac{-3}{\sqrt{13}}$

$$3\sin(180^\circ+\theta)\cos(90^\circ+\theta)-2\sin(90^\circ-\theta)\cos(180^\circ-\theta)$$

$$=3(-\sin\theta)(-\sin\theta)-2\cos\theta(-\cos\theta)$$

$$=3\sin^2\theta+2\cos^2\theta$$

$$=3\times\frac{4}{13}+2\times\frac{9}{13}=\frac{30}{13}$$

(3) $\because \cos\theta=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$ $\therefore$ $\sin\theta=\frac{1}{3}$，$\tan\theta=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$

$$\cos(\theta-450^\circ)=\cos[(\theta-450^\circ)+360^\circ\times 2]$$

$$=\cos(270^\circ+\theta)=\sin\theta=\frac{1}{3}$$

【範例 4】廣義角三角比的轉換

若 $\cos 130° = k$ ，試以 k 表示下列各值

（1） $\sin(-220°) =$ ________

（2） $\tan 230° =$ ________

解： $\cos 130° = -\sin 40° = k \Rightarrow \sin 40° = -k \ (k < 0)$

$$\cos 40° = \sqrt{1-k^2} \quad \tan 40° = \frac{-k}{\sqrt{1-k^2}}$$

(1) $\sin(-220°) = -[\sin(180° + 40°)] = -(-\sin 40°) = \sin 40° = -k$

(2) $\tan 230° = \tan(180° + 50°) = \tan 50°$

$$=\tan(90° - 40°) = \frac{1}{\tan 40°} = -\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$$

【範例 5】求值問題

已知 $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{17}{25}$ ，且 $90° < \theta < 180°$ 試求：

（1） $\sin\theta\cos\theta =$ ________ （2） $\sin\theta - \cos\theta =$ ________

解：

(1) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

$$(\frac{17}{25})^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \sin\theta\cos\theta = -\frac{168}{625}$$

(2) $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$

$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\times(-\frac{168}{625}) = \frac{961}{625}，$$

$$\sin\theta - \cos\theta = \pm\frac{31}{25} \text{ (負不合)}$$

【範例 6】求值問題

已知θ為第三象限角，且$2\sin\theta+1=\cos\theta$，則
$\cos\theta=$______，$\tan\theta=$______。

解：

$$2\sin\theta+1=\cos\theta \Rightarrow (2\sin\theta)^2=(\cos\theta-1)^2$$

$$4\sin^2\theta=\cos^2\theta-2\cos\theta+1$$

$$4(1-\cos^2\theta)=\cos^2\theta-2\cos\theta+1$$

$$5\cos^2\theta-2\cos\theta-3=0$$

$$(5\cos\theta+3)(\cos\theta-1)=0 \Rightarrow \cos\theta=-\frac{3}{5} \text{ 或 } 1 \text{ (不合)}$$

$$\therefore \cos\theta=-\frac{3}{5} \quad \tan\theta=\frac{4}{3}$$

NOTE

【範例 7】求值問題

已知 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{6}{13}$，且 $180°<\theta<225°$，則

（1） $\sin\theta+\cos\theta=$______　　（2） $\sin\theta-\cos\theta=$_______。

解：

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+\dfrac{12}{13}=\dfrac{25}{13}$

$\sin\theta+\cos\theta=\pm\dfrac{5}{\sqrt{13}}$ 但 $180°<\theta<225°$

$\therefore\ \sin\theta<0$, $\cos\theta<0\Rightarrow\ \sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{5}{\sqrt{13}}=-\dfrac{5\sqrt{3}}{13}$

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1-\dfrac{12}{13}=\dfrac{1}{13}$

$\sin\theta+\cos\theta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{13}}$ 但 $180°<\theta<225°$

$\therefore\ \sin\theta>\cos\theta\Rightarrow\ \sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$

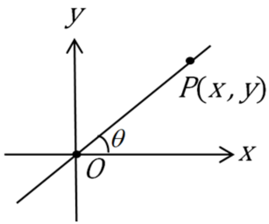
NOTE

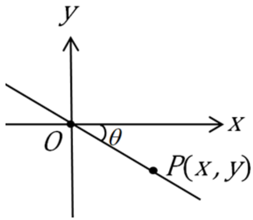
焦點 4. 直線的交角

1.【直線的斜角】

設直線L不為水平線或鉛直線，以L與x軸的交點為頂點，由此頂點起x軸正向為始邊，L的右向為終邊之有向角θ，稱為L之斜角。規定

水平線之斜角為$0°$，鉛直線之斜角為$90°$。$(-90°<\theta<90°)$





直線L通過$O(0,0)$與$P(x,y)$兩點，且斜角為θ，

$\Leftrightarrow$ $\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{y-0}{x-0}$ $\Rightarrow$ 直線L的斜率=斜角之正切函數值。

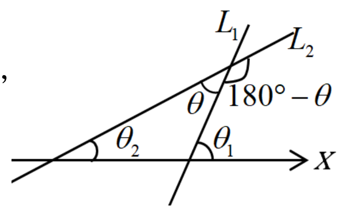
2.【兩直線的夾角】

當知道直線L_1、L_2的斜率時，

就可分別求出L_1、L_2的斜角θ_1、θ_2，

L_1、L_2的夾角$\theta=\theta_1-\theta_2$，同時

$(180°-\theta)$也是L_1、L_2的夾角。



【範例 1】直線的交角

(1) 試求直線 $\sqrt{3}x-y+2=0$ 的斜角 $\theta=$________。

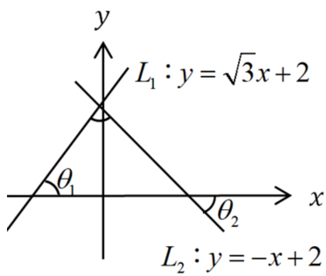
(2) 已知直線 $L_1:\sqrt{3}x-y+2=0$，$L_2:x+y-2=0$，

試求 L_1，L_2 的銳夾角為______。

解：

(1) $\sqrt{3}x-y+2=0 \Rightarrow y=\sqrt{3}x+2$

$\therefore$ 直線斜率 $\tan\theta=\sqrt{3} \Rightarrow \theta=60°$



(2) $L_1:y=\sqrt{3}x+2$ ， $L_2:y=-x+2$

設 L_1、L_2 的斜角分別為 θ_1、θ_2

，則 $\tan\theta_1=\sqrt{3}$ 且 $\tan\theta_2=-1$

$\therefore$ $\theta_1=60°$ 、 $\theta_2=-45°$

$\therefore$ L_1、L_2 的夾角：$\theta_1-\theta_2=105°$

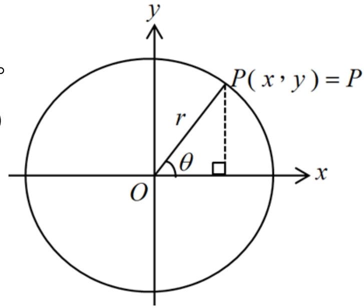
或$180°-105°=75°$

故 L_1、L_2 的銳夾角為 $75°$

NOTE

焦點 5. 極坐標

1. 對於平面上異於 O 的任一點 P，令 $r=\overline{OP}$，θ 為以 x 軸為始邊，
   射線 $\overrightarrow{OP}$ 為終邊的廣義角，我們以符號 $[r，\theta]$ 來表示 P 點的位置，
   這種坐標稱為極坐標，記做 $P[r，\theta]$。



2. 若平面上一點 P 的直角坐標為 $(x，y)$
   極坐標為 $[r，\theta]$，則
   (1) $x=r\times\cos\theta$
   (2) $y=r\times\sin\theta$
   (3) $r=\sqrt{x^2+y^2}$

【範例 1】坐標轉換

(1) 已知點 P 的極坐標為 $[4，-60°]$，求其直角坐標。

(2) 已知點 P 的直角坐標為 $(-2\sqrt{3}，2)$，求其極坐標。

解：

(1) $x=r\cos\theta=4\times\cos(-60°)=4\times\dfrac{1}{2}=2$

$y=r\sin\theta=4\times\sin(-60°)=4\times(-\dfrac{\sqrt{3}}{2})=-2\sqrt{3}$

$\therefore\ P(2,-2\sqrt{3})$

(2) $r=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$

$\theta=180°-30°=150°$，$P[4,150°]$

【範例 2】坐標旋轉

設點 P 的極坐標為 $\left[4, 60°\right]$，以原點為中心，將 P 點逆時針方向旋轉 $90°$ 得 P'，則 P' 的直角坐標為何？

解：

$$\theta = 60° + 90° = 150°$$

$$\therefore\ P' = [4, 150°] \Rightarrow P' = (4\cos 150°, 4\sin 150°)$$

$$= (4\times(-\frac{\sqrt{3}}{2}), 4\times\frac{1}{2}) = (-2\sqrt{3}, 2)$$

NOTE