B2-01

# 直角三角形的三角比【基礎篇】

## 【主題 1】銳角的三角比

### 焦點 1. 銳角的的三角比定義：

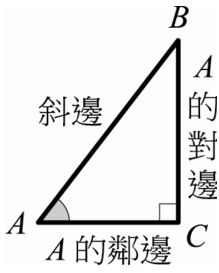
(1) 在直角 $\Delta ABC$ 中，若 $\angle C = 90^\circ$，對 $\angle A$ 而言，$\overline{BC}$ 稱作 $\angle A$ 的對邊，$\overline{AC}$ 稱作 $\angle A$ 的鄰邊，$\overline{AB}$ 稱作斜邊。

我們將上述的三個函數分別給定下列名稱：

$\sin A = \dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$，稱作 $\angle A$ 的【**正弦函數**】.

$\cos A = \dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$，稱作 $\angle A$ 的【**餘弦函數**】

$\tan A = \dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\angle A\text{的鄰邊}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$，稱作 $\angle A$ 的【**正切函數**】




(2) 由定義知：

$\angle A$ 為銳角時，

【 $\tan A > 0$ 】,

【 $0 < \sin A < 1$ 】且

【 $0 < \cos A < 1$ 】.

(3) 當 $\theta_1$, $\theta_2$ 為銳角時：

① $\sin\theta$ 隨著角度增加而【遞增】，即

【 $\theta_1 < \theta_2 \Leftrightarrow \sin\theta_1 < \sin\theta_2$ 】。

② $\cos\theta$ 隨著角度增加而【遞減】，即

【 $\theta_1 < \theta_2 \Leftrightarrow \cos\theta_1 > \cos\theta_2$ 】。

③ $\tan\theta$ 隨著角度增加而【遞增】，即

【$\theta_1 < \theta_2 \Leftrightarrow \tan\theta_1 < \tan\theta_2$】。

④ 若【$0° < \theta < 45°$】，則【$\sin\theta < \cos\theta$】【$\tan\theta < 1$】。

⑤ 若【$\theta = 45°$】，則【$\sin\theta = \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$】【$\tan\theta = 1$】。

⑥ 若【$45° < \theta < 90°$】，則【$\sin\theta > \cos\theta$】【$\tan\theta > 1$】。

## 焦點 2. 常用數值三角表

(1)

| $\theta$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $15°$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | $\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ |
| $\cos\theta$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ |
| $\tan\theta$ | $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{3}$ |

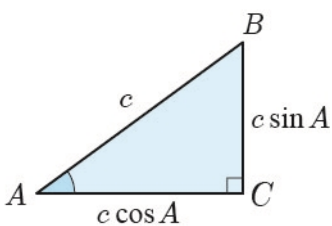
(2) 直角$\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，斜邊長為 $c$，$\angle A$ 的對邊長為 $a$、鄰邊長為 $b$，由三角比的定義知：

① $\sin A = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{a}{c}$，

故【$a = c \times \sin A$】。

② $\cos A = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{b}{c}$，

故【$b = c \times \cos A$】。



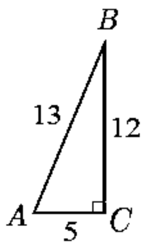

③ 當斜邊長【$c = 1$時】，【$a = \sin A$】且【$b = \cos A$】。

## 【範例 1】三角比的定義

(1) 在直角$\triangle ABC$中，已知$\angle C = 90^\circ$，$\overline{AC} = 5$、$\overline{AB} = 13$，試求$\angle A$的正弦、餘弦與正切函數值。

(2) 在直角$\triangle ABC$中，已知$\angle B = 90^\circ$，$\overline{AB} : \overline{BC} = 24 : 7$，試求$\angle A$的正弦、餘弦與正切值

[解]




(1) 如圖，$\overline{BC} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$　因此，

$\angle A$的正弦$\sin A = \dfrac{12}{13}$　餘弦$\cos A = \dfrac{5}{13}$

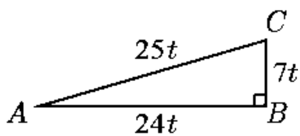
正切$\tan A = \dfrac{12}{5}$

(2) 依題意可設$\overline{AB} = 24t$，$\overline{BC} = 7t$，其中，$t > 0$

則$\overline{AC} = \sqrt{(24t)^2 + (7t)^2} = 25t$　因此，$\angle A$的

正弦$\sin A = \dfrac{7t}{25t} = \dfrac{7}{25}$　餘弦$\cos A = \dfrac{24}{25}$

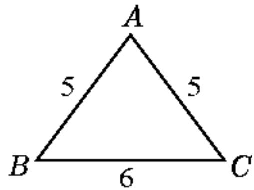
正切$\tan A = \dfrac{7}{24}$




NOTE

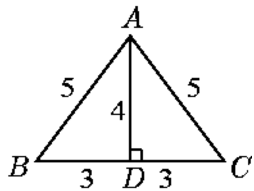
## 【範例 2】三角比的定義

如圖，在等腰△$ABC$ 中，
$\overline{AB}=\overline{AC}=5$，$\overline{BC}=6$。試求：
(1) $\sin B$ 、 $\cos B$
(2) $\sin A$ 、 $\cos A$




[解]

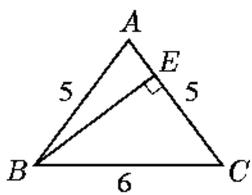
(1) 如圖，作 $\overline{BC}$ 上的高 $\overline{AD}$




則 $\overline{BD}=3$，$\overline{AD}=4$

$\therefore \sin B=\dfrac{4}{5}$，$\cos B=\dfrac{3}{5}$

(2) 如圖，作 $\overline{AC}$ 上的高 $\overline{BE}$




$\because$ △$ABC$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\times 5\times \overline{BE}$

$=\dfrac{1}{2}\times 6\times 4=12$

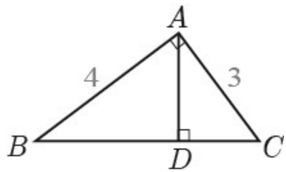
$\therefore \overline{BE}=\dfrac{24}{5}\Rightarrow \overline{AE}=\sqrt{5^2-(\dfrac{24}{5})^2}=\dfrac{7}{5}$

故 $\sin A=\dfrac{\frac{24}{5}}{5}=\dfrac{24}{25}$ 、 $\cos A=\dfrac{\frac{7}{5}}{5}=\dfrac{7}{25}$

NOTE

## 【範例 3】三角比的定義

如圖，直角$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90^\circ$，$\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=3$，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$。試求：




(1) $\sin(\angle CAD)$

(2) $\cos(\angle CAD)$

(2) $\tan(\angle BAD)$

[解]　在$\triangle ABC$中，$\overline{BC}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

(1) $\because \angle CAD=\angle B$　　$\therefore \sin(\angle CAD)=\sin B=\dfrac{3}{5}$

(2) $\cos(\angle CAD)=\cos B=\dfrac{4}{5}$

(3) $\because \angle BAD=\angle C$　　$\therefore \tan(\angle BAD)=\tan C=\dfrac{4}{3}$

## 【範例 4】三角比的大小關係

試比較下列之大小關係：（填入＞或＜或＝）

（1）$\sin 65^\circ$ ____ $\sin 55^\circ$　　（2）$\cos 65^\circ$ ____ $\cos 55^\circ$

（3）$\sin 46^\circ$ ____ $\cos 46^\circ$　　（4）$\sin 35^\circ$ ____ $\dfrac{1}{2}$

（5）$\cos 35^\circ$ ____ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（6）$\tan 46^\circ$ ____ 1

解：(1) > (2) < (3) > (4) > (5) < (6) >

NOTE

## 【範例 5】特殊角的三角比

(1) 試求 $\dfrac{\sin 30^\circ + \cos 45^\circ}{\sin 30^\circ - \cos 45^\circ} =$ ________。

(2) 試求 $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ + \tan 60^\circ \cos 30^\circ =$ ________。

[解]

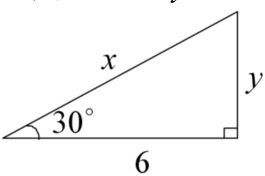
(1) 原式 $= \dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{1+2\sqrt{2}+2}{1-2} = -3-2\sqrt{2}$

(2) 原式 $=(\dfrac{1}{2})^2+(\dfrac{1}{2})^2+(\sqrt{3})\times(\dfrac{\sqrt{3}}{2})=2$

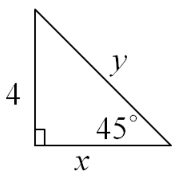
## 【範例 6】特殊角的三角比

求下圖中的 $x$，$y$

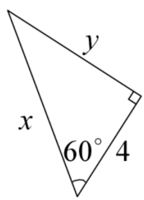
(1)




(2)




(3)




[解] (1) $\cos 30^\circ = \dfrac{6}{x}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{6}{x}$，$x = \dfrac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$

$\tan 30° = \dfrac{y}{6}$ ， $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{y}{6}$ ， $y = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

（2） $\tan 45° = \dfrac{4}{x}$ ， $1 = \dfrac{4}{x}$ ， $x = 4$

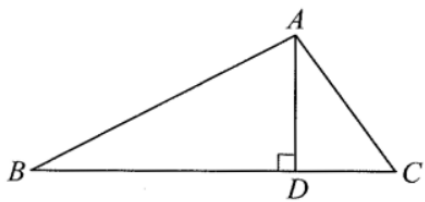
$\sin 45° = \dfrac{4}{y}$ ， $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{4}{y}$ ， $y = \dfrac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

（3） $\cos 60° = \dfrac{4}{x}$ ， $\dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{x}$ ， $x = 8$

$\tan 60° = \dfrac{y}{4}$ ， $\sqrt{3} = \dfrac{y}{4}$ ， $y = 4\sqrt{3}$

## 【範例 7】三角比與邊長

如圖 $\Delta ABC$ 中，$\overline{AD} \perp \overline{BC}$，已知 $\overline{AB} = 34$，$\sin B = \dfrac{8}{17}$，$\tan C = \dfrac{4}{3}$，求 $\overline{BC}$ 之長。




[解]

$$\overline{AD} = \overline{AB} \times \sin B = 34 \times \frac{8}{17} = 16$$

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = \sqrt{50 \times 18} = 30$$

$$\overline{CD} \times \tan C = \overline{AD} \text{ ， } \overline{CD} \times \frac{4}{3} = 16 \text{ ， } \overline{CD} = 12$$

$$\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{CD} = 30 + 12 = 42$$

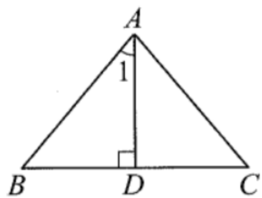
NOTE

## 【範例 8】三角比求邊長

有一等腰三角形底邊為 10，頂角 $72°$，下列敘述何者正確。

(1) $\overline{AB}=5\times\sin 36°$　(2) $\overline{AD}=5\times\tan 36°$

(3) $\overline{AB}\times\sin 36°=5$　(4) $\overline{AD}=\dfrac{5}{\tan 36°}$




[解] ： (3) (4)

$$\angle 1=\frac{72^{\circ}}{2}=36° \text{，} \overline{BD}=\frac{\overline{BC}}{2}=5$$

$\times$ (1) $\overline{AB}\times\sin 36°=\overline{BD}$ ， $\overline{AB}\times\sin 36°=5$

$\times$ (2) $\overline{AD}\times\tan 36°=\overline{BD}$ ， $\overline{AD}\times\tan 36°=5$

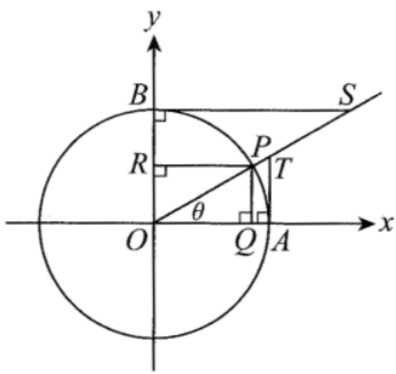
$\vee$(3) $\overline{AB}\times\sin 36°=\overline{BD}$ ， $\overline{AB}\times\sin 36°=5$

$\vee$(4) $\overline{AD}\times\tan 36°=\overline{BD}$ ， $\overline{AD}\times\tan 36°=5$ ， $\overline{AD}=\dfrac{5}{\tan 36°}$

NOTE

## 【範例 9】三角比求邊長

如圖，圓 $O$ 為一單位圓，
$\overline{AT}$ 及 $\overline{BS}$ 均與圓 $O$ 相切，
$\overline{PQ}$ 與 $\overline{PR}$ 分別垂直於 $x$ 軸及 $y$ 軸
，若 $\overline{BS}=\dfrac{12}{5}$，求 $\overline{AT}$ 及
矩形 $PQOR$ 的周長。




[解]

$$\overline{BS}\times\tan\theta=1\Rightarrow\frac{12}{5}\times\tan\theta=1$$

$$\Rightarrow\quad\therefore\tan\theta=\frac{5}{12}，\ \sin\theta=\frac{5}{13}，\ \cos\theta=\frac{12}{13}$$

(1) $\overline{AT}=1\times\tan\theta=\tan\theta=\dfrac{5}{12}$

(2) $\overline{PQ}=1\times\sin\theta=\sin\theta=\dfrac{5}{13}$；$\overline{PR}=1\times\cos\theta=\cos\theta=\dfrac{12}{13}$

矩形 $PQOR$ 的周長

$=2(\overline{PQ}+\overline{PR})=2(\sin\theta+\cos\theta)=2(\dfrac{5}{13}+\dfrac{12}{13})=\dfrac{34}{13}$

NOTE

## 【範例 10】三角比求邊長

如圖，圓 $O$ 為一單位圓，

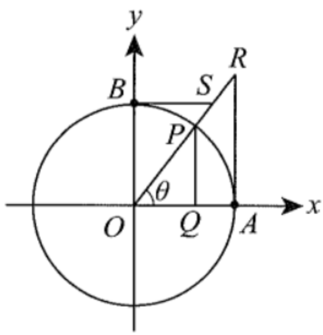
$\overline{AR}$ 及 $\overline{BS}$ 均與圓 $O$ 相切，

$\overline{PQ}$ 垂直於 $x$ 軸，則下列敘述那些正確？

(A) $\overline{AR}=\tan\theta$　　(B) $\overline{OQ}=\cos\theta$

(C) $\overline{BS}=\dfrac{1}{\tan\theta}$　　(D) $\overline{PQ}=\sin\theta$

(E) $\overline{OS}=\dfrac{1}{\sin\theta}$



[解]　(A)(B)(C)(D)(E)

$\vee(A)\ \overline{AR}=\overline{OA}\times\tan\theta=1\times\tan\theta=\tan\theta$

$\vee(B)\ \overline{OQ}=\overline{OP}\times\cos\theta=1\times\cos\theta=\cos\theta$

$\vee(C)\ \overline{BS}\times\tan\theta=\overline{OB}=1\quad\therefore\overline{BS}=\dfrac{1}{\tan\theta}$

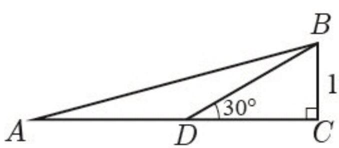
$\vee(D)\ \overline{PQ}=\overline{OP}\times\sin\theta=1\times\sin\theta=\sin\theta$

$\vee(E)\ \overline{OS}\times\sin\theta=\overline{OB}=1\quad\therefore\overline{OS}=\dfrac{1}{\sin\theta}$

NOTE

## 【範例 11】特殊角三角比

如圖，直角$\triangle ABC$中，已知$D$點在$\overline{AC}$上，
$\overline{DA}=\overline{DB}$，$\angle BDC=30^\circ$，$\overline{BC}=1$。
試求：
(1) $\overline{AB}$之長。
(2) $\sin15^\circ$、$\cos15^\circ$、$\tan15^\circ$之值。

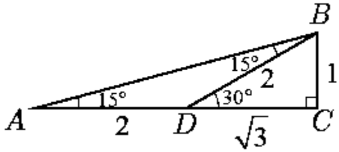



解題關鍵 (1) $\angle DAB=\angle DBA=15^\circ$
(2) 設$a, b$均$>0$
$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

[解]

$\because \overline{DA}=\overline{DB}$ $\quad\therefore \angle DAB=\angle DBA=15^\circ$

$\because \angle BDC=30^\circ$ 且 $\overline{BC}=1$ $\therefore \overline{CD}=\sqrt{3}$，$\overline{DA}=\overline{DB}=2$




(1) $\overline{AB}=\sqrt{1^2+(2+\sqrt{3})^2}$

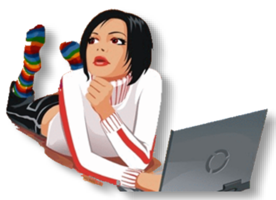
$=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}$

$=\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

(2) $\sin 15^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\cos 15^\circ=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\tan 15^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

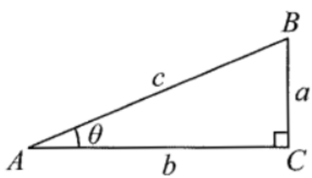


## 【主題 2】三角比的基本關係

### 焦點 1.三角比的基本關係：

1.【商數關係】

設 $0^\circ<\theta<90^\circ$，則 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$




2.【平方關係】

設 $0^\circ<\theta<90^\circ$，則 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

3.【餘角關係】(角度互餘：餘轉正、正轉餘)

設 $0^\circ<\theta<90^\circ$，則：

（1） $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$ （2） $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

## 【範例 1】平方關係、商數關係

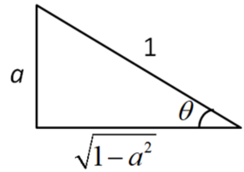
設 $\theta$ 為銳角，若 $\sin\theta=a$，則：

（1） $\cos\theta=$__________。（用 $a$ 表示）

（2） $\tan\theta=$__________。（用 $a$ 表示）

[解]

（1） $\sqrt{1-a^2}$ （2） $\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$




NOTE

## 【範例 2】平方關係、商數關係

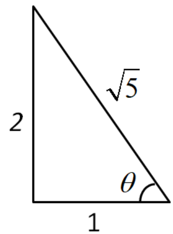
（1） 設 $\theta$ 為銳角，若 $\sin\theta=2\cos\theta$，試求 $\sin\theta+\cos\theta=$__________。

（2） 設 $\theta$ 為銳角，若 $\tan\theta=2$，試求 $\dfrac{2\sin\theta-\cos\theta}{3\sin\theta+\cos\theta}=$__________。

（3） 設 $\theta$ 為銳角，若 $\cos\theta=\tan\theta$，試求 $\sin\theta=$__________。

[解]

(1) $\sin\theta = 2\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2 = \tan\theta$




$\therefore\ \sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ ， $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \quad \sin\theta + \cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

(2) $\dfrac{2\sin\theta - \cos\theta}{3\sin\theta + \cos\theta} = \dfrac{2\times\dfrac{2}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}}{3\times\dfrac{2}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}} = \dfrac{\dfrac{3}{\sqrt{5}}}{\dfrac{7}{\sqrt{5}}} = \dfrac{3}{7}$

(3) $\because\ \cos\theta = \tan\theta \ \Rightarrow\ \cos\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \ \Rightarrow \cos^2\theta = \sin\theta$

又 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \ \Rightarrow\ \sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$

解得 $\sin\theta = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ (負不合) $\therefore\ \sin\theta = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

NOTE

**【範例 3】平方關係、餘角關係**

（1） 設 $\theta$ 為銳角，若 $\cos 40^\circ = \sin\theta$，則 $\theta =$ ＿＿＿＿＿ 。

（2） $\cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ =$ ＿＿＿＿＿ 。

（3）

$\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 70^\circ$
$+ \sin^2 80^\circ =$ ＿＿＿＿＿＿

[解]

(1) $\cos 40° = \sin(90° - 40°) = \sin 50° \quad \Rightarrow \quad \theta = 50°$

(2) $(\cos^2 40° + \cos^2 50°) + \cos^2 60°$

$= (\sin^2 50° + \cos^2 50°) + \cos^2 60° = 1 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$

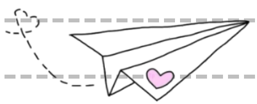
(3) $\sin^2 10° + \sin^2 20° + \sin^2 30° + \sin^2 40°$

$+ \sin^2 50° + \sin^2 60° + \sin^2 70° + \sin^2 80°$

$= \sin^2 10° + \sin^2 80° + \sin^2 20° + \sin^2 70°$

$+ \sin^2 30° + \sin^2 60° + \sin^2 40° + \sin^2 50° = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

NOTE



【範例 4】平方關係、餘角關係

（1） 設 $\theta$ 為銳角，若 $\frac{\cos 63°}{\sin 63°} = \tan\theta$，則 $\theta =$ ________ 。

（2） $(\sin 17° + \cos 17°)^2 + (\sin 73° - \cos 73°)^2 =$ ________ 。

[解]

$$(1)\ \frac{\cos 63^\circ}{\sin 63^\circ}=\frac{\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ}=\tan 27^\circ \quad \Rightarrow \quad \therefore \theta=27^\circ$$

$$(2)\ (\sin 17^\circ+\cos 17^\circ)^2+(\sin 73^\circ-\cos 73^\circ)^2$$

$$=\sin^2 17^\circ+\cos^2 17^\circ+2\sin 17^\circ\cos 17^\circ$$

$$+\sin^2 73^\circ+\cos^2 73^\circ-2\sin 73^\circ\cos 73^\circ=1+1=2$$

## 【範例 5】求值問題

設$\theta$為銳角，若$\sin\theta+\cos\theta=\frac{5}{4}$，則：

(1) $\sin\theta\cos\theta=$________。 (2) $\sin\theta-\cos\theta=$________。

(3) $\sin^3\theta+\cos^3\theta=$________。

[解]：

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$$(\frac{5}{4})^2=1+2\sin\theta\cos\theta \quad \therefore\ \sin\theta\cos\theta=\frac{9}{32}$$

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$$=1-2\sin\theta\cos\theta=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16} \quad \therefore\ \sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$$

(3) $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$$=\frac{5}{4}\times(1-\frac{9}{32})=\frac{5}{4}\times\frac{23}{32}=\frac{115}{128}$$

## 【範例 6】求值問題

已知$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$，且$\sin\theta$及$\cos\theta$為$2x^2+px+q=0$的

兩根，則判別式 $p^2-8q=$__________。

［解］：

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$$

$$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}2x^2+px+q&=2(x-\sin\theta)(x-\cos\theta)\\&=2\left[x^2-(\sin\theta+\cos\theta)x+\sin\theta\cos\theta\right]\end{aligned}$$

$$x^2+\frac{p}{2}x+\frac{q}{2}=x^2-(\sin\theta+\cos\theta)x+\sin\theta\cos\theta$$

$$\begin{cases}\sin\theta\cos\theta=\dfrac{q}{2} & \cdots\cdots ① \\ \sin\theta+\cos\theta=\dfrac{-p}{2} \cdots ② \end{cases}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{q}{2} \quad\Rightarrow\quad q=\frac{2}{3}$$

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=(\sin\theta-\cos\theta)^2+4\sin\theta\cos\theta$$

$$\left(\frac{-p}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad p^2=\frac{20}{3}$$

$$\therefore\quad p^2-8q=\frac{20}{3}-\frac{16}{3}=\frac{4}{3}$$

【範例 7】求值問題

設 $\theta$ 為銳角，若 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 為 $25x^2+kx+12=0$ 的兩根，

則 $k=$______。

［解］：

$$25x^2+kx+12=25(x-\sin\theta)(x-\cos\theta)$$

$$x^2+\frac{k}{25}x+\frac{12}{25}=x^2-(\sin\theta+\cos\theta)x+\sin\theta\cos\theta$$

$$\therefore\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}\qquad \sin\theta+\cos\theta=\frac{-k}{25}$$

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+\frac{24}{25}=\frac{49}{25}$$

$\therefore\quad \sin\theta+\cos\theta=\pm\frac{7}{5}$ (負不合) $\Rightarrow\ \frac{-k}{25}=\frac{7}{5}\ \Rightarrow\ k=-35$

NOTE

【範例 8】恆等式

設 $\theta$ 為銳角，試證明下列各式：

（1） $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ 。

（2） $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\dfrac{2}{\cos\theta}$

（3） $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

［解］：

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=1+2\sin\theta\cos\theta$

(2) $$\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$

$$=\frac{1+2\sin\theta+\sin\theta^2+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}=\frac{2+2\sin\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$

$$=\frac{2(1+\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}=\frac{2}{\cos\theta}$$

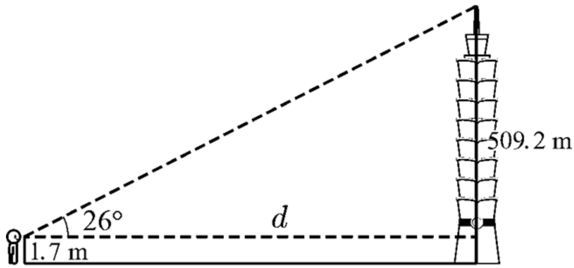
(3) $$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

NOTE

## 【範例 9】簡易三角測量

已知臺北 101 大樓的標高為 509.2 公尺，是臺北市的重要地標。某天，阿三利用量角器，在離地面 1.7 公尺高度，測得 101 大樓樓頂的仰角為 26°，試問：阿三所在的位置距離 101 大樓約幾公尺？

（ $\tan 26° \approx 0.5$ ）




[解]： $\tan 26° = \dfrac{509.2-1.7}{d} \Rightarrow d = \dfrac{507.5}{\tan 26°} \approx \dfrac{507.5}{0.5} \approx 1015$（公尺）

## 【範例 10】簡易三角測量

某林務專家為了測量新發現的一棵神木的高度 $\overline{AH}$ ，他在距離神木底部 8 公尺的 $B$ 處，利用儀器測得角度 $\angle HBA = 80°$ ，如圖所示。試以三角比與工程計算機，求出神木的高度。

（答案四捨五入到整數位）（ $\tan 80° \approx 5.6$ ）

[解]： $\because \tan 80° = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AB}}$

$\therefore$ 樹高 $\overline{AH} = \overline{AB} \times \tan 80°$

$= 8 \times \tan 80° \approx 45$（公尺）